ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

G. LORIA

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXI

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΕΙΣ ΤΟΝ Β΄ ΤΟΜΟΝ

Οἱ δύο ἱστορικοὶ αἰῶνες, εἰς τοὺς ὁποίους ἀφιεροῦται ὁ δεύτερος Τόμος, ἀποτελοῦν μίαν περίοδον μὲ ἰδιάζοντα χαρακτηριστικά, τὰ ὁποῖα εἶναι σκόπιμον νὰ ὑποδείξωμεν ἐδῶ ἐν συντομίᾳ.

Ἐνῷ κατὰ τὰ ἔτη ποὺ μεσολαβοῦν μεταξὺ Leonardo Fibonacci καὶ Luca Pacioli ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐρευνητῶν εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας εἶναι τόσον μικρός, ὥστε ὁ ἱστορικὸς δύναται μὲ τὴν μεγαλυτέραν εὐκολίαν νὰ τοὺς καταγράψῃ ὅλους, κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν αἰώνων XVI καὶ XVII ἀπὸ τόσον ὀλίγοι ἔγιναν στρατιὰ ὁλόκληρος καὶ δὲν εἶναι πλέον δυνατόν, παρὰ νὰ γίνῃ μιὰ ἐπιλογή. Μιὰ ἐπιλογὴ ὅμως ἐξαρτᾶται πάντοτε ἀπὸ τὰς προσωπικὰς γνώμας καὶ ὀρέξεις ἐκείνου, ὁ ὁποῖος τὴν ἐπιχειρεῖ. Διὰ τοῦτο, ἂν καὶ προσεπάθησα ν' ἀποφύγω ὅσον ἠδυνάμην τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὑποκειμενικῆς κρίσεως, δὲν δύναμαι νὰ ἰσχυρισθῶ, ὅτι ἐπέτυχον ν' ἀπαλλαγῶ ἀπὸ τὸν ψόγον ἐκείνου, ὁ ὁποῖος μὲ χολωμένην καρδίαν θὰ διαπιστώσῃ τὴν ἀπουσίαν κάποιου ὀνόματος, ἀπολαμβάνοντος τῆς συμπαθείας του.

Εἰς δικαιολογίαν μου διὰ τὰ ἐνδεχόμενα κενά, τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ μοῦ καταλογισθοῦν, ἀρκεῖ τὸ σοφὸν ἀξίωμα, τὸ ὁποῖον διετύπωσεν ὁ Montucla ὡς ἑξῆς: «Ἡ ἱστορία μιᾶς ἐπιστήμης δὲν εἶναι ἱστορία ὅλων τῶν συγγραφέων ποὺ ἔγραψαν σχετικῶς μὲ αὐτήν, ἀλλὰ μόνον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι συνέβαλον διὰ τῶν ἔργων των εἰς προώθησιν τῶν ὁρίων της. Ἡ ἀκριβὴς ἀπαρίθμησις εἶναι ἔργον τῆς βιβλιογραφίας καὶ ὄχι τῆς ἱστορίας».

Οἱ αἰῶνες, τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ ἱστορήσωμεν, ὑπῆρξαν ἀπὸ πολιτικῆς ἀπόψεως εἰς ἄκρον ταραχώδεις, λόγῳ κατακτητικῶν πολέμων καὶ λόγῳ θρησκευτικῶν καὶ κοινωνικῶν ἀναστατώσεων. Ἡ φιλοπόλεμος διάθεσις δὲν ἦτο γνώρισμα ἀποκλειστικὸν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι εἶχον ὡς ἐπάγγελμα τὰ ὅπλα. Ἀκόμη καὶ αὐτοὶ οἱ ἐργάται τῆς πλέον ἀφῃρημένης καὶ εἰρηνικῆς ἐξ ὅλων τῶν ἐπιστημῶν δὲν ἠδυνήθησαν νὰ κατασιγάσουν τὰς ἀγωνιστικὰς παρορμήσεις των. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Τόμος αὐτὸς ἀρχίζει μὲ τὰς βιαίας διενέξεις τοῦ Tartaglia μὲ τοὺς Cardano καὶ Ferrari καὶ κλείει μὲ τὴν μεγάλην ἔριδα, τὴν ὁποίαν προεκάλεσε μεταξὺ Newton καὶ Leibnitz ἡ ἐπινόησις τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

Εἰς τὴν δημιουργίαν τοιούτων διενέξεων συνετέλει τὰ μέγιστα ἡ ταπεινὴ ζηλοτυπία, ἡ ὁποία παρεκίνει τοὺς διασημοτέρους μαθηματικοὺς νὰ κρατοῦν μυστικὰς τὰς ἀνακαλύψεις των, διὰ νὰ ἔχουν ἐξησφαλισμένην ὑπεροχὴν ἔναντι τῶν ἀντιπάλων των ἢ τὸ πολὺ ν' ἀνακοινώνουν αὐτὰς δι' ἐπιστολῶν πρὸς φίλους καὶ ἀντιπάλους. Ἐξ ἄλλου ὅμως, πρὸς ἀποφυγὴν ἐπαναλήψεως τοιούτων δυσαρέστων καταστάσεων, εἰργάζοντο ὁ ἐπιστημονικὸς περιοδικὸς Τύπος καὶ τὰ Πρακτικὰ τῶν Ἀκαδημιῶν καὶ τῶν ἐπιστημονικῶν Ἑταιρειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀκριβῶς ἔλαβον διὰ πρώτην φορὰν ὑπόστασιν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος.

Προκειμένου νὰ συνοψίσωμεν εἰς ὀλίγας φράσεις τὰ μεγάλα ἐπιτεύγματα τῆς ἐπιστήμης μας μεταξὺ τοῦ 1500 καὶ τοῦ 1700, πρέπει πρὸ πάντων νὰ ὑπενθυμίσωμεν, ὅτι ὁ αἰὼν XV ἔκλεισε μὲ ἕνα ἐνοχλητικὸν ἐρωτηματικόν:—αἱ ἐγγράμματοι ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου εἶναι ἐπιδεκτικαὶ γενικῆς λύσεως; Ἡ δόξα διὰ τὴν καταφατικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο, τουλάχιστον ὅσον ἀφορᾷ τοὺς δύο ἑπομένους βαθμούς, ἀνήκει εἰς τοὺς ἰταλοὺς ἀλγεβριστάς, ποὺ ἔζησαν κατὰ τὴν πρώτην πεντηκονταετίαν τοῦ ἑπομένου αἰῶνος καὶ ἔγραψαν τὰς πρώτας γραμμὰς τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων παντὸς βαθμοῦ. Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐξερεύνησιν τῆς τεραστίας ἐκτάσεως τῆς οὕτω κατακτηθείσης, ἡ ἐν χρήσει τότε ἀλγεβρικὴ γραφὴ ἀπεδείχθη πολὺ γρήγορα ἀνεπαρκής. Ἤρχισε τότε διὰ τὴν ἄλγεβραν ἡ ἐξελικτικὴ ἐκείνη περίοδος, ἡ ὁποία τὴν ὡδήγησεν ἀπὸ τὸ στάδιον τῆς συγκεκομμένης ἐκφράσεως εἰς τὴν συμβολικὴν διατύπωσιν. Καθῆκον μας ἦτο νὰ ἐπισημάνωμεν τὰς κυριωτέρας ἐνδιαμέσους φάσεις, τὰς ὁποίας ἠκολούθησεν ἡ πρόοδος, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ μνημονεύσωμεν ἐδῶ ὅλας αὐτὰς τὰς φάσεις τῆς ἐξελίξεως, θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ παραπέμψωμεν τοὺς ἀναγνώστας εἰς ἕνα ἐξαντλητικὸν ἔργον ἐπὶ τοῦ θέματος, δημοσιευθὲν προσφάτως ἀπὸ κάποιον διακεκριμένον ἀμερικανὸν ἱστορικόν, πρὸ ὀλίγου ἐκλιπόντα *.

Ὀλίγον μετὰ τὴν τελείωσιν αὐτῆς τῆς μεταμορφώσεως, ἐπῆλθεν ὁ εὐτυχὴς ὑμέναιος μεταξὺ ἀλγέβρας καὶ γεωμετρίας, ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζεται ὡς Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης (ἀπὸ τῆς ὁποίας χρονολογοῦνται ἐπίσης καὶ αἱ σοβαρώτεραι προσπάθειαι πρὸς δημιουργίαν τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀπειροστῶν) ἄλγεβρα καὶ γεωμετρία ἀποτελοῦν τὰς στερεὰς βάσεις οἱασδήποτε καρποφόρου μαθηματικῆς ἐρεύνης. Τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις δὲν παρουσιάζεται ὡς κλάδος μὲ κύριον στόχον τὸν ἀφῃρημένον ἀριθμόν, ἀλλὰ μᾶλλον ὡς ὄργανον ἀπαραίτητον διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἐπιπέδων καμπύλων.

* F. CAJORI, A history of mathematical notations, Vol. I, Notations in elementary mathematics; Vol. II, Notations in higher mathematics, Chicago, 1928.

Ἐπειδὴ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἔλειπεν ἡ γενικὴ ἔννοια τῆς συναρτήσεως, οἱ στοχασταὶ εἶχον πρὸ ὀφθαλμῶν τὸ γραφικόν της ἰσοδύναμον, καὶ διὰ νὰ θέσουν ὑπὸ δοκιμὴν τὰς νέας μεθόδους, ἀντὶ ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων, κατέφευγον εἰς εἰδικὰς καμπύλας. Ἐντεῦθεν ἡ ἐξήγησις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν καμπύλων τούτων καὶ ἡ αἰτιολογία τῆς γνώμης τοῦ Fontenelle *, κατὰ τὴν ὁποίαν «ἕνας γεωμέτρης δὲν πρέπει νὰ θεωρῆται ὀλιγώτερον ἔνδοξος, ὅταν μία καμπύλη λαμβάνῃ τὸ ὄνομά του, ἀπὸ ἕνα πρίγκηπα, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα δίδεται εἰς μίαν πόλιν».

Λοιπὸν — καὶ πάλιν διὰ λόγους χώρου — ἦτο ἀδύνατον εἰς τὸν γράφοντα ν' ἀναφέρῃ ὅλα ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα, διὰ τῶν ὁποίων ηὐξήθη τότε ἡ συλλογὴ τῶν ἰδιαζουσῶν καμπύλων, ἀκόμη δὲ ὀλιγώτερον ν' ἀπαριθμίσῃ ὅλας τὰς ἀνακαλυφθείσας ἰδιότητας τούτων. Ὅσοι ἀναγνῶσται ἐπιθυμοῦν τοιαύτας λεπτομερειακὰς γνώσεις ἐπὶ τοῦ θέματος δύνανται ν' ἀνατρέξουν εἰς προγενεστέραν σχετικὴν ἐργασίαν τοῦ συγγραφέως. **

Ἡ λύσις τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ, ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἡ ἐπινόησις αὐστηρῶν μεθόδων χειρισμοῦ τοῦ ἀπείρου, εἶναι ἐπιτεύγματα τοσαύτης ἀξίας, ὥστε θὰ ἠδύναντο εὐλόγως νὰ θεμελιώσουν τὴν δόξαν μιᾶς ἐποχῆς. Ἀλλ' ἡ ἐποχή, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν, καυχᾶται καὶ δι' ἄλλα ἀκόμη ἐπιτεύγματα ὄχι ὀλιγώτερον θαυμαστά. Πράγματι – παρασιωπῶντες τὰς περισπουδάστους ἐργασίας, χάρις εἰς τὰς ὁποίας τ' ἀριστουργηματικὰ ἔργα τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων μαθηματικῶν ἐγένοντο κοινὸν κτῆμα — θὰ ὑπενθυμίσωμεν, πρῶτον, ὅτι ἡ προοπτικὴ καὶ ἡ κεντρικὴ προβολὴ ἔδωσαν τότε νέαν ζωὴν εἰς τὴν γεωμετρίαν, παρασκευάζουσαι ἐκ τοῦ μακρόθεν τὴν ἐμφάνισιν τῆς προβολικῆς γεωμετρίας· ὅτι, δεύτερον, ἡ ἐπινόησις τῶν λογαρίθμων καὶ αἱ πρόοδοι τῆς τριγωνομετρίας ἐπετάχυναν τὴν βαθυτέραν γνῶσιν καὶ περιγραφὴν τῶν οὐρανίων φαινομένων· ὅτι, τρίτον, κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν ἐτέθησαν αἱ βάσεις τῆς σημερινῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅτι, τέλος, ἡ ἔρευνα τῶν νόμων, ποὺ διέπουν τὰ φαινόμενα τῆς τύχης, ἤνοιξε τὸν δρόμον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων, ἡ ὁποία προεκάλεσε τόσας πνευματώδεις ἐρεύνας ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ XVIII αἰῶνος.

Ὁ ὄγκος καὶ ἡ σπουδαιότης τοῦ συντελεσθέντος ἔργου κατὰ τοὺς αἰῶνας XVI — XIX ἀπαρτίζουν τοιαύτην ὕλην, ὥστε κατέστη ἀναγκαία μία τροποποίησις τοῦ ἀρχικοῦ μας προγράμματος, ἡ κατανομὴ δηλαδὴ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν κατακτήσεων μετὰ τὸν XV αἰῶνα εἰς δύο τόμους ἐφαμίλλους τοῦ Πρώτου.

---

* Ἐγκώμιον διὰ τὸν M. Tschirnhausen

** Gino Loria: Curve piane Speciali, algebriche e trascendenti. Teoria e Storia (2 Vol., Milano, 1930).

Ἄς ἀποδοθοῦν χάριτες εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον, ὁ ὁποῖος δὲν ἔφερε καμμίαν ἀντίρρησιν εἰς τὴν μεταβολὴν αὐτήν, τὴν ὑπαγορευθεῖσαν μόνον ἐκ τῆς ἐπιθυμίας νὰ καταστήσωμεν τὸν ἱστορικὸν πίνακα, ποὺ παρουσιάζομεν εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας, ὅσον εἶναι δυνατὸν πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀλήθειαν.

Ὅπως καὶ εἰς τὸν Ι Τόμον, ἕκαστον Κεφάλαιον τοῦ παρόντος κλείει μὲ μίαν Βιβλιογραφίαν, ἡ ὁποία περιλαμβάνει (πρέπει νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν, πρὸς ἀποφυγὴν παρεξηγήσεων) τὰ ἐξετασθέντα κείμενα, ὄχι τὰ σχετικὰ ἱστορικὰ ἔργα. Προσθέτω ἐδῶ, ἅπαξ διὰ παντός, τὴν δήλωσιν, ὅτι τὰ μέγιστα ἐξυπηρετήθην ἀπὸ τὰ περιφημότερα βιογραφικὰ καὶ βιβλιογραφικὰ ἔργα, ὡς εἶναι ἡ Biblioteca Matematica Italiana τοῦ Riccardi, τὸ Biographish—Literarisches Handwörterbuch τοῦ Poggendorff, τὰ National Biography, Allgemeine deutsche Biographie, κλπ., χωρὶς νὰ ἐξαιρέσω τὸ ἰδικόν μας παλαιόν, ἀλλὰ πάντοτε πολύτιμον, τοῦ Tiraboschi.

Καὶ ἐπειδὴ ἀναφέρω διὰ βραχέων τὰ βιογραφικὰ στοιχεῖα τῶν διαφόρων συγγραφέων, θεωρῶ ἀναγκαῖον νὰ καταστήσω σαφὲς εἰς τὸν ἀναγνώστην, ὁ ὁποῖος ἐνδεχομένως θὰ παρετήρει χρονολογικὰς διαφορὰς ἢ διπλᾶς σχετικὰς ἐνδείξεις, ὅτι εἰς τὴν Ἰταλίαν ἡ Γρηγοριανὴ Μεταρρύθμισις τοῦ Ἡμερολογίου ἐφηρμόσθη τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1582, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὴν Ἱσπανίαν καὶ τὴν Πορτογαλίαν. Τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠκολουθήθη ταχέως ἀπὸ ἄλλα καθολικὰ ἔθνη, ἐνῷ ἡ ἐν λόγῳ Μεταρρύθμισις εἰς μὲν τὴν Γερμανίαν (κράτη διαμαρτυρόμενα) ἐγένετο ἀπὸ τοῦ 1700, εἰς δὲ τὴν Ἀγγλίαν ἀπὸ τοῦ 1757.

Γένοβα, 1931

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

Η ΣΥΓΚΕΚΟΜΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΕΙΣ ΤΟ ΑΠΟΓΕΙΟΝ

ΜΕΡΟΣ Ι: ΕΙΣ ΤΗΝ ΙΤΑΛΙΑΝ

Προοίμιον

204. Ὁ XVI αἰών, τοῦ ὁποίου ἐπιχειροῦμεν τώρα τὴν ἀναδίφησιν, εἶναι ὁ σπουδαιότερος ἐξ ὅσων ἀναφέρονται εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀλγέβρας καὶ ὁ ἐνδοξότερος διὰ τὴν Ἰταλίαν, συγχρόνως ὅμως καὶ ὁ πλέον ταραχώδης ἐξ ὅσων ἀναφέρονται εἰς τὰ χρονικὰ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ αἰῶνος τούτου ἐδόθησαν οἱ τύποι, διὰ τῶν ὁποίων λύονται αἱ ἐγγράμματοι ἐξισώσεις τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ, καὶ τῶν ὁποίων ἡ ὕπαρξις, ἔπειτα ἀπὸ τόσων ἐτῶν ἀγόνους προσπαθείας, προεκάλεσε μυρίας ἀμφιβολίας καὶ ἐπιφυλάξεις. Ἀλλ' ἡ κατάκτησίς των ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς βιαιοτέρας ἐπιστημονικὰς φιλονικίας, ποὺ θὰ συναντήσωμεν, φιλονικίαν, τῆς ὁποίας οἱ κριταὶ δὲν εἶναι ἐντελῶς σύμφωνοι, ἴσως διότι τὰ τεκμήρια παρουσιάζουν μερικὰ κενά, ἴσως ἀκόμη διότι ταῦτα προέρχονται ἀπὸ τὴν μίαν ἢ ἀπὸ τὴν ἄλλην παράταξιν τῶν διαμαχομένων. Ἐλάμβανον χώραν τὴν ἐποχὴν ἐκείνην προκλήσεις ἐπὶ μαθηματικῶν ζητημάτων, αἱ ὁποῖαι, κατά τινας*, ἠκολούθουν τοὺς θεατρικοὺς τύπους τῶν ἐφίππων μονομαχιῶν τῆς ἐποχῆς τῶν ἱπποτῶν καὶ αἱ ὁποῖαι ἐφανάτιζον τὰ πλήθη ὄχι ὀλιγώτερον τῶν μονομαχιῶν ποὺ διεξήγοντο μὲ τὸ ἀκόντιον καὶ τὴν σπάθην. Ὡς πρὸς τὴν ἀνωτέρω παρομοίωσιν, εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν, πρῶτον, ὅτι ἡ μονα-

* Πρώτη πηγὴ μιᾶς τοιαύτης γνώμης (καθ' ἡμᾶς ἀπαραδέκτου) εὑρίσκεται πιθανῶς εἰς ἕνα χωρίον τοῦ Catalogue of the mathematical, historical, bibliographical and miscellaneous portion of the celebrated Library of G. Libri (London, 1861), τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνατυπωθῆ εἰς τὴν Biblioteca matematica τοῦ P. Riccardi (στήλη 500 - 01). Ἀλλὰ προτοῦ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς βασιμότητός της, εἶναι σκόπιμον νὰ ὑπενθυμίσωμεν, ὅτι τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ὁ Libri ἔγραφεν αὐτὰς τὰς λέξεις, δὲν ἦτο πλέον ὁ ὑπὸ πάντων τιμώμενος καὶ θαυμαζόμενος ἱστορικός, ἀλλὰ ἕνας ἐξόριστος εἰς κατάστασιν ἐνδείας, ὁ ὁποῖος παρέδιδε τοὺς βιβλιογραφικούς του θησαυροὺς εἰς τοὺς τελευταίους πλειοδότας.

δική περιγραφή ἐπιστημονικοῦ ἀγῶνος, τὴν ὁποίαν θὰ συναντήσωμεν (§ 221), τὸν παρουσιάζει εἰς μετριωτάτας διαστάσεις καὶ ὑπὸ μίαν μορφὴν πολὺ διάφορον ἐκείνης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ Massimo d' Azeglio ἀπεθανάτισε τὴν πρόσκλησιν τοῦ Barletta, καὶ δεύτερον, ὅτι περὶ τοῦ ἀγῶνος, διὰ τὸν ὁποῖον ἐνδιαφερόμεθα ἐδῶ, δὲν εὑρέθη μέχρι σήμερον καμμία ἀφήγησις εἰς τὰ τότε χρονικὰ τοῦ Μιλάνου, ἂν καὶ ἐξηρευνήθησαν μετὰ σχολαστικότητος, κατ' ἐντολὴν τοῦ πρίγκηπος Boncompagni. Ἐνισχύεται τοιουτοτρόπως ἡ ἀμφιβολία γύρω ἀπὸ τὸν ἰσχυρισμόν, ὅτι τάχα τὸ κοινὸν ἐπεδείκνυε φανατικὸν ἐνδιαφέρον ἐπὶ θεμάτων καθαρῶς θεωρητικῶν, μὴ ἐχόντων δηλαδὴ καμμίαν συνάφειαν μὲ τὰ δημόσια πράγματα, εἰς ἐποχὴν ἀκόμη σχεδὸν βάρβαρον καὶ ἀνώριμον διὰ τὴν εἰρηνικὴν κατάκτησιν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀληθείας. Διότι ἀκριβῶς μὲ τὴν ἐκπνοὴν τοῦ XV αἰῶνος ἐγκαινιάζεται ἡ περίοδος τῶν ξενικῶν ἐπικρατήσεων εἰς τὴν Ἰταλίαν, κατὰ τὴν διάρκειαν δὲ τοῦ πρώτου ἡμίσεως τοῦ ἐπομένου αἰῶνος, ὁλόκληρος ἡ Ἰταλία συνεταράχθη καὶ ἐσπαράχθη ἐκ τῶν πολέμων Γαλλίας καὶ Ἱσπανίας, διεκδικουσῶν τὴν ἐπὶ τῆς χερσονήσου ἡγεμονίαν.

Προτοῦ ἐκθέσωμεν πῶς, εἰς περίοδον τοιούτων σκληρῶν πολέμων, ἡ θεωρία τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἔφθασεν εἰς τὸ ἀκραῖον ὅριον τῆς δυνάμεώς της (χωρὶς βεβαίως ἐπέκτασιν εἰς τὸ πεδίον τῶν ὑπερβατικῶν συναρτήσεων), εἶναι σκόπιμον νὰ καταστήσωμεν γνωστὰ τὰ πρόσωπα τοῦ δράματος (dramatis personae), ποὺ εὑρίσκοντο τότε ἐπὶ σκηνῆς καὶ ἰδιαιτέρως τοὺς δύο πρωταγωνιστάς: Nicolò Tartaglia καὶ Girolamo Cardano.

Δὲν πρέπει ἐν τούτοις νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ Pacioli μέχρι τῆς ἐμφανίσεως τῶν μαθηματικῶν τούτων δὲν ὑπῆρξεν εἰς τὴν Ἰταλίαν ἄλλος ἀσχολούμενος μὲ τὴν ἄλγεβραν. Πράγματι, κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἶχεν εὐρεῖαν διάδοσιν ἕνα ἔργον Summa di aritmetica κάποιου Francesco Galigai (ἢ Ghaligai), δημοσιευθὲν εἰς Φλωρεντίαν τὸ 1521 καὶ κατόπιν τὸ 1548, καὶ ἀφιερωμένον εἰς τὸν καρδινάλιον Giulio de' Medici, τὸν κατόπιν πάπαν Κλήμεντα VII.

Περὶ τοῦ συγγραφέως δὲν γνωρίζομεν τίποτε τὸ συγκεκριμένον, ὥστε μόνον ὑπόθεσιν ἀποτελεῖ ἡ γνώμη τοῦ Libri, ὅτι τάχα ὁ συγγραφεὺς ἦτο πρόγονος τῆς Ἐλεονώρας Γκαλιγκάι, κυρίας διασήμου εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς Γαλλίας, ὡς πολυπράγμονος συζύγου τοῦ Concini, στρατάρχου τοῦ Ἄνκρ (1580 – 1617).

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὸ ἔργον δὲν παρουσιάζει καμμίαν καινοτομίαν ἀξίαν ἰδιαιτέρας μνείας, ἡ δὲ ἐπιτυχία του ὀφείλεται κατὰ μέγα μέρος εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι, σχετικῶς πρὸς τὸ ἔργον τοῦ Pacioli, ἦτο διαστάσεων μικροτέρων καὶ μορφῆς κομψοτέρας. Ἔχει, ἐν τούτοις, τὴν ἱστορικὴν ἀξίαν, ὅτι περιέχει πολυάριθμα ἀποσπάσματα ἀπὸ τὴν Algebra, τὴν ὁποίαν μετέφρασεν ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν ὁ Guglielmo de Lunis

(Τόμος I, § 168) καὶ ἀπὸ τὸ βιβλίον Liber quadratorum τοῦ Fibonacci (Τόμος I, § 167). Ἐπὶ πλέον, εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ὀφείλεται ἡ διατήρησις τῆς μνήμης τοῦ Giovanni dal Sodo, τὸν ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει συχνὰ ὡς διατελέσαντα διδάσκαλόν του.

Τὰ δρῶντα πρόσωπα

205. Δὲν εἶναι μὲ ἀκρίβειαν γνωστὸν πότε ἐγεννήθη ὁ Tartaglia. Εἶναι ὅμως ἐξηκριβωμένον ὅτι ἦτο περίπου ἑξαετής, ὅταν ὁ Gaston de Foix, ὁ νεαρὸς ἀνεψιὸς τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας, μετὰ τὴν ἧτταν τῶν Βενετῶν, ἀνεκατέλαβε τὴν Brescia (19 Φεβρουαρίου 1511) καὶ ὑπέβαλε τὴν πόλιν εἰς μίαν τόσον φοβερὰν λεηλασίαν, ὥστε νὰ παραμείνῃ τὸ θλιβερὸν ἐκεῖνο γεγονὸς ἀλησμόνητον. Ὁ μαθηματικός μας ὑπῆρξεν ἕνα ἀπὸ τὰ πολλὰ ἄθῳα θύματα τοῦ σκληροῦ ἐκείνου Γάλλου. Τὸ περιστατικὸν ἀφηγεῖται ὁ ἴδιος εἰς ἕνα συγκινητικώτατον ἀπόσπασμα τοῦ ἔργου του Quesiti et inventioni diverse. (Διάφορα ζητήματα καὶ ἐφευρέσεις § 213). Ἀπὸ αὐτὸ πληροφορούμεθα, ὅτι ἦτο υἱὸς κάποιου «ἱπποκόμου, Micheletto, ἀγνώστου οἰκογενείας» ὁ ὁποῖος ἀπέθανε, ὅταν ὁ μέλλων ἐπιστήμων εὑρίσκετο ἀκόμη εἰς τρυφερὰν ἡλικίαν. Ἡ πτωχὴ μητέρα του ἀνέλαβε μόνη τὸ βάρος τῆς συντηρήσεως τριῶν ἀνηλίκων τέκνων. Ὅταν ὁ βάρβαρος Γάλλος ἐπλησίαζε μὲ τὸν στρατόν του εἰς τὴν Brescia, ἡ οἰκογένεια κατέφυγεν εἰς τὸν μητροπολιτικὸν ναόν, μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ εὕρισκεν ἐκεῖ ἀσφάλειαν. Ἠπατήθη ὅμως· διότι ἕνας ἀπὸ τοὺς στρατιώτας ποὺ εἰσεχώρησαν εἰς τὸν ναὸν κατέφερε τοὐλάχιστον πέντε κτυπήματα εἰς τὴν κεφαλὴν καὶ ἕνα εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ ἀτυχοῦς Tartaglia, ὁ ὁποῖος, ἐπὶ μακρὸν χρόνον ἔπειτα, ἔχασε τὴν ὁμιλίαν του. Χάρις εἰς τὰς φροντίδας τῆς μητρός του, ἡ ὁποία ἐκαθάριζε μὲ ἐπιμέλειαν τὰς πληγάς του, ἐθεραπεύθη, ἀλλ' ὄχι τελείως. Ἡ γλῶσσα του, ἐπὶ μακρὸν χρονικὸν διάστημα, εἶχε χάσει τὴν ἐλευθερίαν τῶν κινήσεών της, ὥστε πολὺ σύντομα τοῦ ἐδόθη τὸ ὄνομα Tartaglia (ποὺ σημαίνει ἰταλικὰ τραυλός), τὸ ὁποῖον καὶ διετήρησεν εἰς ὅλην του τὴν ζωήν.

Εἶναι ἄγνωστοι αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι τὸν ὤθησαν εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν στάδιον, ἐνῷ εἶναι γνωστόν, ὅτι ἀφιέρωνε τὸ μεγαλύτερον μέρος τοῦ χρόνου του εἰς τὸ νὰ διδάσκῃ, δημοσίᾳ καὶ κατ' ἰδίαν, εἰς διαφόρους πόλεις τῆς Δημοκρατίας τῆς Βενετίας. Τὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα ἔγραψεν, εἶναι τὰ μόνα ποὺ ρίπτουν κάποιο φῶς εἰς λεπτομερείας τῆς ζωῆς του. Μανθάνομεν ἀπὸ αὐτά, ὅτι κατὰ τὰ ἔτη 1521 - 1533 διέμενεν εἰς Verona, ὅτι τὸ 1526 ἔκαμε μίαν πορείαν πρὸς τὴν Mantova καὶ ὅτι τὸ 1534 ἐγκατεστάθη εἰς Βενετίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα δημοσίου ἐκπαιδευτικοῦ. Τὸ

(Τόμος Ι, § 168) καὶ ἀπὸ τὸ βιβλίον Liber quadratorum τοῦ Fibonacci (Τόμος Ι, § 167). Ἐπὶ πλέον, εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ὀφείλεται ἡ διατήρησις τῆς μνήμης τοῦ Giovanni dal Sodo, τὸν ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει συχνὰ ὡς διατελέσαντα διδάσκαλόν του.

Τὰ δρῶντα πρόσωπα

205. Δὲν εἶναι μὲ ἀκρίβειαν γνωστὸν πότε ἐγεννήθη ὁ Tartaglia. Εἶναι ὅμως ἐξηκριβωμένον ὅτι ἦτο περίπου ἑξαετής, ὅταν ὁ Gaston de Foix, ὁ νεαρὸς ἀνεψιὸς τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας, μετὰ τὴν ἧτταν τῶν Βενετῶν, ἀνεκατέλαβε τὴν Brescia (19 Φεβρουαρίου 1511) καὶ ὑπέβαλε τὴν πόλιν εἰς μίαν τόσον φοβερὰν λεηλασίαν, ὥστε νὰ παραμείνῃ τὸ θλιβερὸν ἐκεῖνο γεγονὸς ἀλησμόνητον. Ὁ μαθηματικός μας ὑπῆρξεν ἕνα ἀπὸ τὰ πολλὰ ἄθῳα θύματα τοῦ σκληροῦ ἐκείνου Γάλλου. Τὸ περιστατικὸν ἀφηγεῖται ὁ ἴδιος εἰς ἕνα συγκινητικώτατον ἀπόσπασμα τοῦ ἔργου του Quesiti et inventioni diverse. (Διάφορα ζητήματα καὶ ἐφευρέσεις § 213). Ἀπὸ αὐτὸ πληροφορούμεθα, ὅτι ἦτο υἱὸς κάποιου «ἱπποκόμου, Micheletto, ἀγνώστου οἰκογενείας» ὁ ὁποῖος ἀπέθανε, ὅταν ὁ μέλλων ἐπιστήμων εὑρίσκετο ἀκόμη εἰς τρυφερὰν ἡλικίαν. Ἡ πτωχὴ μητέρα του ἀνέλαβε μόνη τὸ βάρος τῆς συντηρήσεως τριῶν ἀνηλίκων τέκνων. Ὅταν ὁ βάρβαρος Γάλλος ἐπλησίαζε μὲ τὸν στρατόν του εἰς τὴν Brescia, ἡ οἰκογένεια κατέφυγεν εἰς τὸν μητροπολιτικὸν ναόν, μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ εὕρισκεν ἐκεῖ ἀσφάλειαν. Ἠπατήθη ὅμως· διότι ἕνας ἀπὸ τοὺς στρατιώτας ποὺ εἰσεχώρησαν εἰς τὸν ναὸν κατέφερε τοὐλάχιστον πέντε κτυπήματα εἰς τὴν κεφαλὴν καὶ ἕνα εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ ἀτυχοῦς Tartaglia, ὁ ὁποῖος, ἐπὶ μακρὸν χρόνον ἔπειτα, ἔχασε τὴν ὁμιλίαν του. Χάρις εἰς τὰς φροντίδας τῆς μητρός του, ἡ ὁποία ἐκαθάριζε μὲ ἐπιμέλειαν τὰς πληγάς του, ἐθεραπεύθη, ἀλλ' ὄχι τελείως. Ἡ γλῶσσα του, ἐπὶ μακρὸν χρονικὸν διάστημα, εἶχε χάσει τὴν ἐλευθερίαν τῶν κινήσεών της, ὥστε πολὺ σύντομα τοῦ ἐδόθη τὸ ὄνομα Tartaglia (ποὺ σημαίνει ἰταλικὰ τραυλός), τὸ ὁποῖον καὶ διετήρησεν εἰς ὅλην του τὴν ζωήν.

Εἶναι ἄγνωστοι αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι τὸν ὤθησαν εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν στάδιον, ἐνῷ εἶναι γνωστόν, ὅτι ἀφιέρωνε τὸ μεγαλύτερον μέρος τοῦ χρόνου του εἰς τὸ νὰ διδάσκῃ, δημοσίᾳ καὶ κατ' ἰδίαν, εἰς διαφόρους πόλεις τῆς Δημοκρατίας τῆς Βενετίας. Τὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα ἔγραψεν, εἶναι τὰ μόνα ποὺ ρίπτουν κάποιο φῶς εἰς λεπτομερείας τῆς ζωῆς του. Μανθάνομεν ἀπὸ αὐτά, ὅτι κατὰ τὰ ἔτη 1521 - 1533 διέμενεν εἰς Verona, ὅτι τὸ 1526 ἔκαμε μίαν πορείαν πρὸς τὴν Mantova καὶ ὅτι τὸ 1534 ἐγκατεστάθη εἰς Βενετίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα δημοσίου ἐκπαιδευτικοῦ. Τὸ

1548 τὸν εὑρίσκομεν εἰς τὴν Brescia, ὅπου ἐν τούτοις δὲν εἶχε λόγους νὰ εἶναι εὐχαριστημένος μὲ τοὺς συμπολίτας του. Ἐπέστρεψε λοιπὸν εἰς τὴν Βενετίαν καὶ αἱ ἀφιερώσεις αἱ ἀναγραφόμεναι εἰς τὰ πρῶτα βιβλία τοῦ ἔργου του General trattato (Σειρὰ γενικῶν μαθημάτων) (§ 222) μαρτυροῦν ὅτι παρέμεινεν ἐκεῖ μέχρι τοῦ θανάτου του (13 Δεκεμβρίου 1557). Εἰς τὴν διαθήκην του, τὴν ὁποίαν ὑπηγόρευσε τρεῖς ἡμέρας πρὸ τοῦ θανάτου του, ἀποκαθιστᾷ κληρονόμον ἕνα ἀδελφόν του, ἀναφερόμενον μὲ τὸ ὄνομα : Giampietro Fontana. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἔδωσεν εἰς πολλοὺς ἀφορμὴν νὰ ὑποθέσουν ὅτι Fontana ἦτο τὸ πραγματικὸν ὄνομα τῆς οἰκογενείας τῶν δύο ἀδελφῶν. Ἂν καὶ εἶναι δύσκολον νὰ ἐξηγήσωμεν τὸ φαινόμενον δύο ἀδελφῶν μὲ διαφορετικὰ ἐπίθετα, ἐν τούτοις δὲν ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τὸν Nicolò τὸ ὄνομα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔθετεν ὁ ἴδιος εἰς τὰ δημοσιεύματά του καὶ ὑπὸ τὸ ὁποῖον ἔγινεν ἀπὸ αἰώνων πασίγνωστος.

Εἰς αὐτὰ μόνον περιορίζονται ὅσα γνωρίζομεν περὶ τῆς ζωῆς τοῦ διακεκριμένου μαθηματικοῦ τῆς Brescia. Περισσότερον γνωστὰ εἶναι τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ προσώπου του, χάρις εἰς μίαν χαλκογραφίαν κατὰ κόρον ἐπαναλαμβανομένην εἰς τὰς προμετωπίδας τῶν ἔργων του. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν χαρακτῆρα του, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἐκ τῆς ἀναγνώσεως τῶν ἔργων του, ὅτι ἦτο μᾶλλον φιλόδοξος καὶ βίαιος. Εἰς τοὺς ἀντίποδας δηλαδὴ τοῦ Εὐκλείδου, τὸν ὁποῖον μᾶς παρέστησεν ὁ Πάππος, (Τόμος I, § 35), ὡς ἄνθρωπον πρᾷον καὶ συμπαθῆ τοὺς τρόπους. Πλησιέστερος μᾶλλον πρὸς τὸν Ἀπολλώνιον, ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὰς πληροφορίας τοῦ ἰδίου σχολιαστοῦ (Τόμος I, § 45). Καταγόμενος ἐκ ταπεινῆς οἰκογενείας, δὲν ἦτο δυνατὸν παρὰ νὰ τύχῃ ἀνεπαρκοῦς ἀγωγῆς καὶ παιδείας. Τοῦτο δὲ ἐξηγεῖ, διατί δὲν ἠκολούθησε τὴν συνήθειαν τῆς ἐποχῆς του νὰ γράφῃ εἰς τὴν λατινικήν, ἀλλ' ἐχρησιμοποίει μίαν δημώδη διάλεκτον, ἡ ὁποία ἐπλησίαζε περισσότερον ἐκείνην, ποὺ ὡμιλεῖτο τότε εἰς τὴν Brescia, παρὰ ἐκείνην ποὺ κατέστησεν ὁ Δάντης κοινὴν καὶ ὁριστικήν.

206. Πολὺ διάφορος εἶναι ἡ εἰκών, ὑπὸ τὴν ὁποίαν μᾶς παρουσιάζεται ὁ Girolamo Cardano. Γεννηθεὶς εἰς Pavia τὴν 24 Σεπτεμβρίου 1501, ἔκαμε τὰς ἐγκυκλίους σπουδάς του πρῶτα εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν καὶ ἔπειτα εἰς τὴν Padova, ὅπου μάλιστα κατέλαβε μίαν θέσιν «πρυτάνεως τῶν σπουδαστῶν», ἀργότερα δὲ συνέχισε τὰς σπουδάς του μέχρι τῆς ἀναγορεύσεώς του ὡς ἰατροῦ. Ἀκριβῶς ὡς ἰατρὸς ἀπέκτησε μεγάλην φήμην, ἡ ὁποία δὲν ἐβράδυνε νὰ διαβῇ τὰς Ἄλπεις. Τὸ 1534 τοῦ προσεφέρθη ἡ καθηγητικὴ ἕδρα τῆς ἀνακτορικῆς Ἀκαδημίας τοῦ Μιλάνου, ὅτε συνέταξε τὸ Γεωμετρίας ἐγκώμιον, τὸ ὁποῖον περιελήφθη εἰς τὰ Ἔργα του. Κατόπιν ὅμως ἑνὸς ἀτυχοῦς συναγωνισμοῦ, κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρέθη ἀντιμέτωπος τοῦ Zuanne da Coi (ἢ Colla) (§ 215), ἀπώλεσε τὴν

ἕδραν του καὶ μετέβη εἰς Pavia, ὅπου ἐδοκίμασε τὴν ἀπερίγραπτον ὀδύνην νὰ ἴδῃ (25 Ἀπριλίου 1560) τὸν υἱόν του καταδικαζόμενον ὡς ἔνοχον συζυγοκτονίας. Ἴσως διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἐζήτησε καὶ ἐπέτυχε, μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ Καρδιναλίου τοῦ κατέχοντος τότε τὴν ἐκκλησιαστικὴν Ἐξαρχίαν, μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ πανεπιστήμιον τῆς Βολωνίας ὅπου καὶ τοῦ ἐδόθη, τιμῆς ἕνεκεν, τὸ δικαίωμα νὰ πολιτογραφηθῇ μόνιμος πολίτης. Ἀλλὰ κατηγορηθεὶς ἐπὶ μαγείᾳ, ἐφυλακίσθη τὴν 14 Ὀκτωβρίου 1570 καὶ δὲν ἀνέκτησε τὴν ἐλευθερίαν, παρὰ κατόπιν ὑποσχέσεως, ὅτι δὲν πρόκειται νὰ διδάξῃ τοῦ λοιποῦ εἰς τὰ Κράτη τῆς Ἐκκλησίας. Μετέβη τότε εἰς Ρώμην (1571), ὅπου, διὰ τὴν ἀδιαφιλονίκητον μαεστρίαν του εἰς τὴν ἰατρικήν, ἀπέκτησε τὴν εὔνοιαν τοῦ Πάπα, ὁ ὁποῖος καὶ τοῦ ἐξεχώρησε λαμπρὰν ἐπιχορήγησιν, καταβαλλομένην εἰς αὐτὸν ἀνελλιπῶς μέχρι τοῦ θανάτου του (21 Σεπτεμβρίου 1576).

Ἄνθρωπος ἐξαιρετικῆς εὐφυΐας, ἐνηγκαλίσθη ὅλην τὴν ἐπιστήμην τῆς ἐποχῆς του, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ κατορθώσῃ ν' ἀποφύγῃ τὰς ἀποπλανήσεις ἐκείνας, ποὺ φέρονται μὲ τὰ ὀνόματα τῆς μαγείας, τῆς ἀστρολογίας, τῆς ἀλχημείας. Οὐδεὶς ἄλλος περισσότερον αὐτοῦ παρέχει ἐπιβεβαίωσιν εἰς τὸ γνωμικὸν τοῦ Σενέκα : «Nullum unquam magnum ingenium sine mixtura dementiae» (δὲν ὑπάρχει μεγαλοφυΐα χωρὶς συμμετοχὴν παραφροσύνης). Εἰς τὴν Αὐτοβιογραφίαν του, ἡ ὁποία καταντᾷ ἀνιαρὰ ἀπὸ τὰς πολλὰς παρασιωπήσεις, ἔδωσε μόνος του τὴν ἑξῆς παράδοξον προσωπογραφίαν :

«Ἐπροικίσθην ἐκ φύσεως μὲ πνεῦμα φιλοσοφικὸν καὶ ἐπιρρεπὲς πρὸς τὰς ἐπιστήμας. Εἶμαι ἔξυπνος, εὐπροσήγορος, εὐγενής, ἡδυπαθής, εὐτράπελος, εὐσεβής, φίλος τῆς ἀληθείας, φανατικὸς στοχαστής, τολμηρός, φλογερὸς ἐραστὴς τῆς γνώσεως, προικισμένος μὲ ἐφευρετικὸν δαιμόνιον. Πλήρης παιδείας ὁ ἴδιος, σωρεύω μὲ ἀπληστίαν ἰατρικὰς γνώσεις, καὶ ἐκστασιάζομαι ἐνώπιον τοῦ μυστηρίου. Πανοῦργος, δόλιος, ἀπατεών, σατυρικός, ἠσκημένος εἰς τὰς ἀποκρύφους τέχνας. Ἐγκρατής, ἐργατικός, ἐπιμελής, ἀμέριμνος, φλύαρος· δυσφημιστὴς τῆς θρησκείας, ἐκδικητικός, ζηλότυπος, θλιβερός, ὑποκριτής, ἄπιστος, μάγος, ἕρμαιον μυρίων ἀντιθέσεων, βάρος εἰς τοὺς ἰδικούς μου, ἀκόλαστος, φίλος τῆς ἐρημίας, προικισμένος μὲ τὸ χάρισμα νὰ μαντεύω, ἀγροῖκος, συκοφάντης, φιλόφρων καὶ ἀσταθὴς ἐξ αἰτίας τῆς ἀντιθέσεως, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς φύσεώς μου καὶ τῶν τρόπων μου».

Σπεύδομεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι μερικῶν ἐκ τῶν ἐλαττωμάτων, ποὺ ἀναγνωρίζει εἰς τὸν ἑαυτόν του ὁ Cardano, θ' ἀπαντήσωμεν μετ' οὐ πολὺ ἐκπληκτικὰς ἐκδηλώσεις. Ἀλλ' ἀσφαλῶς ἔβλαψε πολὺ τὴν ὑπόληψίν του καὶ ἡ ἐπίμεμπτος διαγωγὴ τῶν υἱῶν του, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος δολοφόνος, ὁ δὲ μικρότερος τόσον κακοήθης, ὥστε ἐδέησε νὰ ἐκδιωχθῇ ἐκ

τῆς Βολωνίας, ὡς ἐξόριστος, ἔπειτα ἀπὸ ἐπίμονον παράκλησιν τοῦ πατρός.

Αἱ δέκα διαθῆκαι, τὰς ὁποίας κατέλιπεν (γραφεῖσαι διαδοχικῶς κατὰ τὴν μακρὰν περίοδον 1531 - 1576), τὸν ἀποδεικνύουν ὡς «pater familiae», ἐνδιαφερόμενον ὑπερβολικὰ διὰ τὴν εὐτυχίαν ὄχι μόνον τῶν συγγενῶν του, ἀλλὰ καὶ τῶν ὑπηρετῶν του. Οἱ λεπτομερεῖς ὅροι τοὺς ὁποίους περιέχουν τὰ κείμενα αὐτὰ ἀποδεικνύουν, κατὰ τὴν γνώμην μας, ὅτι δὲν εἶναι παρὰ καθαρὸς θρῦλος τὰ λεγόμενα, ὅτι τάχα ἄφησε τὸν ἑαυτόν του ν' ἀποθάνῃ ἐξ ἀσιτίας, ἵνα πληρωθῇ τὸ ὑπὸ τοῦ ἰδίου καταστρωθὲν προσωπικόν του ὡροσκόπιον.

207. Παρὰ τὸ πλευρὸν τῶν μεγάλων, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν εἰς τὰς δύο προηγηθείσας παραγράφους, κατέχουν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀλγέβρας ἐξέχουσαν θέσιν δύο ἄλλοι ἄνδρες: ὁ Scipione dal Ferro καὶ ὁ Ludovico Ferrari.

Ὁ πρῶτος ἐγεννήθη εἰς Βολωνίαν τὴν 6 Φεβρουαρίου 1465, εἶναι λοιπὸν ἀρχαιότερος τοῦ Tartaglia καὶ τοῦ Cardano. Ἀπὸ τοῦ Δεκεμβρίου 1496 κατεῖχεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς πατρίδος του τὴν ἕδραν «ad arithmeticam», ἐπανεκλεγόμενος μὲ ἀμοιβὰς διαρκῶς αὐξανομένας — λόγῳ τῆς γενικῆς πεποιθήσεως ὅτι ἦτο «ἐξοχότης ὡς καθηγητὴς» καὶ «ὡς μαθηματικὸς ἐξαιρετικώτατος» — μέχρι τοῦ ἔτους 1526. Μετέβη τότε εἰς τὴν Βενετίαν, ἀλλὰ προτοῦ ἐκπνεύσῃ τὸ ἔτος, ἐπέστρεψε πάλιν εἰς τὴν Βολωνίαν, καταλαβὼν ἐκ νέου τὴν ἕδραν, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ ἴδιος καταστήσῃ ἔνδοξον. Ὀλίγον ἔπειτα χάνεται ἀπὸ «τὰς δέλτους» τοῦ Πανεπιστημίου, ἀποθανὼν μεταξὺ 30 Ὀκτωβρίου καὶ 15 Νοεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους 1526. Διάδοχός του ὑπῆρξεν ὁ Annibale della Nave, ὅστις ἐκληρονόμησεν, ἐκτὸς ἄλλων ποὺ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρουν, ἕνα πολύτιμον τετράδιον (μὴ εὑρεθὲν μέχρι τοῦδε, παρὰ τὰς ἐπανειλημμένας καὶ ἐπιμελεῖς ἐρεύνας), εἰς τὸ ὁποῖον ἐξετίθετο μὲ τὴν θεωρητικήν της ἀπόδειξιν ἡ λύσις τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, περιείχετο δὲ πιθανῶς καὶ μία συλλογὴ γεωμετρικῶν προβλημάτων λυομένων μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου. Εἶχον, ἄρα γε, αὐτὰ τὰ θέματα ἀναπτυχθῆ ὑπὸ τοῦ dal Ferro εἰς τὰ δημόσια μαθήματά του; Τοῦτο φαίνεται μᾶλλον ἀπίθανον· διότι ἂν ἡ μνημειώδης ἀνακάλυψις ἀνεκοινοῦτο ἐνώπιον πολυπληθοῦς ἀκροατηρίου, ἐπὶ τριάκοντα ἔτη συνεχῶς ἀνανεουμένου, δὲν θὰ εἶχε βραδύνει νὰ διαδοθῇ ἀπὸ στόματος εἰς στόμα καὶ ἀπὸ γραφίδος εἰς γραφίδα, ἐνῷ θὰ ἴδωμεν (§ 227), ὅτι ἕνας συμπατριώτης τοῦ dal Ferro, ὀλίγον μεταγενέστερος (ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν R. Bombelli), ἐδείχθη ἀγνοῶν ἀκόμη καὶ τὴν ὕπαρξιν. Πάντως εἶναι δυνατὸν κάποιος (ὅπως ὁ Anton Maria Fior, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν) νὰ ἔλαβε γνῶσιν κατ' ἰδίαν, ἴσως μάλιστα καὶ ὑπὸ τὴν δέσμευσιν τῆς ἐχεμυθείας, καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι ἔλαβε πράγματι γνῶσιν ὁ Pompeo Bolognetti (καθη-

γητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας ἀπὸ τοῦ 1565 μέχρι τοῦ 1582), τοῦ ὁποίου χειρόγραφον εὑρίσκεται εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν Βιβλιοθήκην τῆς Βολωνίας, ἕνα ἔργον ὅπου γίνεται λόγος διὰ τὴν μέθοδον ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ dal Ferro πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ. Παρ' ὅλα αὐτὰ εἰς ἡμᾶς φαίνεται τοὐλάχιστον παράδοξος ἡ στάσις ἑνὸς ἐπιστήμονος, κατερχομένου εἰς τὸν τάφον, χωρὶς νὰ φέρῃ εἰς τὴν δημοσιότητα μίαν ἀνακάλυψιν, ἡ ὁποία ἦτο ἀρκετὴ νὰ τὸν ἀναβιβάσῃ ἐπὶ τῶν ἀετωμάτων τῆς δόξης, καὶ κατεχομένου μόνον ἀπὸ τὴν μὴ ἀξιέπαινον ἐπιθυμίαν νὰ διατηρῇ ἐκεῖνος τὴν ἀποκλειστικότητα τῆς γνώσεως.

Ὁ ἄλλος μαθηματικός, ἐκ τῶν δύο ποὺ προεμνημονεύσαμεν, δηλαδὴ ὁ Ludovico Ferrari, ἐγεννήθη καὶ αὐτὸς εἰς τὴν Βολωνίαν, ἀλλ' ἀπὸ ἕνα πρόσφυγα ἐκ Μιλάνου, τὴν 2 Φεβρουαρίου 1522. Ὀρφανὸς εἰς ἡλικίαν 14 ἐτῶν μετέβη εἰς Μιλᾶνον, ὅπου εὗρεν «ἑστίαν καὶ πῦρ» πλησίον τοῦ Cardano, ὁ ὁποῖος τὰ μέγιστα ἐβοηθήθη ἀπὸ αὐτὸν κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐρευνῶν ποὺ ἀπεκορυφώθησαν εἰς τὴν Ars magna (§210). Ἀπὸ ἕνα πρόβλημα προταθὲν ὑπὸ τοῦ ἀναφερθέντος ἤδη ἀνωτέρω διδασκάλου Zuanne da Coi, ὁ Ferrari ὡδηγήθη εἰς ἀναζήτησιν τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ καὶ ἐπιτυχὼν εἰς τὴν προσπάθειάν του, ἐξησφάλισεν αἰωνίαν καὶ παγκόσμιον φήμην εἰς τὸ ὄνομά του. Ἡ προστασία τῶν Gonzaga τοῦ ἐξεχώρησεν εἰς ἡλικίαν 22 ἐτῶν μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Μιλᾶνον, κατόπιν δὲ τοῦ ἀνετέθη τὸ ἔργον τῆς ἀπογραφῆς τοῦ Δουκάτου τῆς Mantova. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν παρέμεινεν ὀκτὼ ἔτη καὶ ἀνεχώρησεν ἐξ αὐτῆς, λόγῳ μιᾶς βαρείας ἀσθενείας ἐκ τῆς ὁποίας προσεβλήθη ἐκεῖ. Μεταφερθεὶς εἰς τὴν Βολωνίαν, ἀνηγορεύθη (14 Ἰουλίου 1565) διδάκτωρ τῆς φιλοσοφίας καὶ ἀμέσως κατόπιν καθηγητὴς τοῦ ἐκεῖ Πανεπιστημίου. Δὲν ἐπέτρεψεν ὅμως νὰ ἐγκαινιάσῃ τὴν ἕδραν του ὁ προλαβὼν θάνατος κατ' Ὀκτώβριον τοῦ 1565, ὀφειλόμενος, ὅπως θέλουν αἱ φῆμαι (οἱ Βοργίαι εἶχον ἤδη ἀναδείξει σχολὴν τοῦ εἴδους !), εἰς δηλητηρίασιν σχεδιασθεῖσαν ὑπὸ ἀδελφῆς του ὀρεγομένης τὴν κληρονομίαν. Ὁ Cardano, ἂν καὶ τὸν παριστᾷ ὡς ἄνθρωπον βιαίου καὶ δυστρόπου χαρακτῆρος, ἐν τούτοις δὲν ἐδίστασε νὰ τὸν χαρακτηρίσῃ «ὡς πνεῦμα μὲ ἰδιοφυΐαν καὶ εὐρυμάθειαν εἰς τὰ μαθηματικὰ οὐδενὸς ἄλλου ὑποδεέστερα». Τὸ μοναδικόν του ἔργον ποὺ ἔφθασε μέχρις ἡμῶν (§220), ἂν καὶ χαρακτῆρος ἐριστικοῦ, ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ἔπαινος αὐτὸς δὲν εἶναι ὑπερβολικὸς ἢ ἀνάρμοστος.

Πρῶτα ἔργα τοῦ N. Tartaglia

208. Ὡς συγγραφεὺς ἐμφανίζεται ὁ Nicolò Tartaglia διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1537. Εἰς μίαν ἐποχήν, ὅπως τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ὅπλα οὐδέποτε ἐφησύχαζον, δὲν εἶναι περίεργον ὅτι

γητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας ἀπὸ τοῦ 1565 μέχρι τοῦ 1582), τοῦ ὁποίου χειρόγραφον εὑρίσκεται εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν Βιβλιοθήκην τῆς Βολωνίας, ἕνα ἔργον ὅπου γίνεται λόγος διὰ τὴν μέθοδον ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ dal Ferro πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ. Παρ' ὅλα αὐτὰ εἰς ἡμᾶς φαίνεται τοὐλάχιστον παράδοξος ἡ στάσις ἑνὸς ἐπιστήμονος, κατερχομένου εἰς τὸν τάφον, χωρὶς νὰ φέρῃ εἰς τὴν δημοσιότητα μίαν ἀνακάλυψιν, ἡ ὁποία ἦτο ἀρκετὴ νὰ τὸν ἀναβιβάσῃ ἐπὶ τῶν ἀετωμάτων τῆς δόξης, καὶ κατεχομένου μόνον ἀπὸ τὴν μὴ ἀξιέπαινον ἐπιθυμίαν νὰ διατηρῇ ἐκεῖνος τὴν ἀποκλειστικότητα τῆς γνώσεως.

Ὁ ἄλλος μαθηματικός, ἐκ τῶν δύο ποὺ προεμνημονεύσαμεν, δηλαδὴ ὁ Ludovico Ferrari, ἐγεννήθη καὶ αὐτὸς εἰς τὴν Βολωνίαν, ἀλλ' ἀπὸ ἕνα πρόσφυγα ἐκ Μιλάνου, τὴν 2 Φεβρουαρίου 1522. Ὀρφανὸς εἰς ἡλικίαν 14 ἐτῶν μετέβη εἰς Μιλᾶνον, ὅπου εὗρεν «ἑστίαν καὶ πῦρ» πλησίον τοῦ Cardano, ὁ ὁποῖος τὰ μέγιστα ἐβοηθήθη ἀπὸ αὐτὸν κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐρευνῶν ποὺ ἀπεκορυφώθησαν εἰς τὴν Ars magna (§210). Ἀπὸ ἕνα πρόβλημα προταθὲν ὑπὸ τοῦ ἀναφερθέντος ἤδη ἀνωτέρω διδασκάλου Zuanne da Coi, ὁ Ferrari ὡδηγήθη εἰς ἀναζήτησιν τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ καὶ ἐπιτυχὼν εἰς τὴν προσπάθειάν του, ἐξησφάλισεν αἰωνίαν καὶ παγκόσμιον φήμην εἰς τὸ ὄνομά του. Ἡ προστασία τῶν Gonzaga τοῦ ἐξεχώρησεν εἰς ἡλικίαν 22 ἐτῶν μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Μιλᾶνον, κατόπιν δὲ τοῦ ἀνετέθη τὸ ἔργον τῆς ἀπογραφῆς τοῦ Δουκάτου τῆς Mantova. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν παρέμεινεν ὀκτὼ ἔτη καὶ ἀνεχώρησεν ἐξ αὐτῆς, λόγῳ μιᾶς βαρείας ἀσθενείας ἐκ τῆς ὁποίας προσεβλήθη ἐκεῖ. Μεταφερθεὶς εἰς τὴν Βολωνίαν, ἀνηγορεύθη (14 Ἰουλίου 1565) διδάκτωρ τῆς φιλοσοφίας καὶ ἀμέσως κατόπιν καθηγητὴς τοῦ ἐκεῖ Πανεπιστημίου. Δὲν ἐπέτρεψεν ὅμως νὰ ἐγκαινιάσῃ τὴν ἕδραν του ὁ προλαβὼν θάνατος κατ' Ὀκτώβριον τοῦ 1565, ὀφειλόμενος, ὅπως θέλουν αἱ φῆμαι (οἱ Βοργίαι εἶχον ἤδη ἀναδείξει σχολὴν τοῦ εἴδους !), εἰς δηλητηρίασιν σχεδιασθεῖσαν ὑπὸ ἀδελφῆς του ὀρεγομένης τὴν κληρονομίαν. Ὁ Cardano, ἂν καὶ τὸν παριστᾷ ὡς ἄνθρωπον βιαίου καὶ δυστρόπου χαρακτῆρος, ἐν τούτοις δὲν ἐδίστασε νὰ τὸν χαρακτηρίσῃ «ὡς πνεῦμα μὲ ἰδιοφυΐαν καὶ εὐρυμάθειαν εἰς τὰ μαθηματικὰ οὐδενὸς ἄλλου ὑποδεέστερα». Τὸ μοναδικόν του ἔργον ποὺ ἔφθασε μέχρις ἡμῶν (§220), ἂν καὶ χαρακτῆρος ἐριστικοῦ, ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ἔπαινος αὐτὸς δὲν εἶναι ὑπερβολικὸς ἢ ἀνάρμοστος.

Πρῶτα ἔργα τοῦ N. Tartaglia

208. Ὡς συγγραφεὺς ἐμφανίζεται ὁ Nicolò Tartaglia διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1537. Εἰς μίαν ἐποχήν, ὅπως τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ὅπλα οὐδέποτε ἐφησύχαζον, δὲν εἶναι περίεργον ὅτι

ἕνα πρόσωπον μὲ παιδικὰς ἀναμνήσεις κηλιδωμένας ἀπὸ δάκρυα καὶ αἵματα ἔστρεψε τὴν προσοχήν του εἰς τὴν τέχνην τοῦ πολέμου καὶ μάλιστα εἰς τὰ προβλήματα τῶν πυροβόλων ὅπλων, τῶν ὁποίων ἡ χρῆσις ἀπό τινος ἤρχισε νὰ γενικεύεται. Καὶ πράγματι ἡ Nuova Scientia (Νέα ἐπιστήμη), τῆς ὁποίας ὁ Tartaglia θεωρεῖ ἑαυτὸν ἐφευρέτην, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά ἡ Βλητική. Καὶ εἰς αὐτὸν ἀνήκει ἡ δόξα ὅτι πρῶτος ἐφήρμοσε τὸν μαθηματικὸν συλλογισμὸν εἰς τὴν τέχνην τοῦ πολέμου. Εἰς ἀπόδειξιν τῆς γονιμότητος τῶν μεθόδων του, ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι πρῶτος ἀπέδειξεν ὅτι τὸ μέγιστον βεληνεκὲς τῶν πυροβόλων ὅπλων ἐπιτυγχάνεται ὑπὸ γωνίαν βολῆς 45°.

Δὲν θὰ ἐπανέλθωμεν ἐπὶ τῆς ἰδιοποιήσεως, τὴν ὁποίαν διαπράττει ὁ Tartaglia, ἐμφανίζων ὡς ἰδικόν του ἔργον τὴν λατινικὴν μετάφρασιν τοῦ ἔργου *Περὶ ὀχουμένων* τοῦ Ἀρχιμήδους, ὀφειλομένην ὡς εἴδομεν εἰς τὸν Guglielmo di Moerbecke (Τόμος I, § 114). Ἐὰν ἐξ αἰτίας τοῦ παραπτώματος τούτου ἐπισύρῃ ἐναντίον του ὁ Tartaglia αὐστηρὰν τὴν ἐτυμηγορίαν τοῦ ἠθικοῦ κώδικος, ἡ ἐπιστήμη ἐπικαλεῖται τὴν συγχώρησιν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι, μὲ τὴν δημοσίευσιν ἐκείνην, ἔθετεν ἐκ νέου εἰς κυκλοφορίαν σκέψεις καὶ μεθόδους ταφείσας ἀπὸ αἰώνων, αἱ ὁποῖαι αἰφνιδίως ἐξεδήλωσαν τὴν ἀμάραντον ζωτικότητά των. Καὶ ἐπὶ πλέον γνωρίζων νὰ ἐκτιμήσῃ ὁλόκληρον τὸ μεγαλεῖον τοῦ μαθηματικοῦ τῶν Συρακουσῶν, ἐπεμελήθη (1543) μίαν θαυμασίαν λατινικὴν ἔκδοσιν τῶν ἄλλων ἔργων του.

Μεγάλην καὶ ἐπαξίαν ἐπιτυχίαν εἶχεν ἐπίσης ἡ ὑπ' αὐτοῦ γενομένη μετάφρασις εἰς τὴν Ἰταλικὴν τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου *, μὲ ἐκτεταμένα σχόλια, ἐν μέρει πρωτότυπα, ἐν μέρει ληφθέντα ἀπὸ τὸν Campano καὶ ἄλλους προγενεστέρους ἐκδότας. Εἶναι κρῖμα ὅτι ἀποδίδει εἰς τὸν Εὐκλείδη τὰ βιβλία XIV καὶ XV τῶν *Στοιχείων* (Τόμος I, §52) καὶ ὅτι παρασύρεται ἀπὸ τὸν Valerio Massimo εἰς ταύτισιν τοῦ συγγραφέως τοῦ μεγάλου τούτου ἔργου πρὸς τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ παραλείψωμεν καὶ τοῦτο, ὅτι ὁ Tartaglia, κατὰ τὴν μετάφρασιν, προέβη εἰς μερικὰς θεμιτὰς τροποποιήσεις, ὅπως π.χ. εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας, ὡς γραμμῆς ἐλαχίστου μήκους καὶ τὸν ἀνάλογον διὰ τὸ ἐπίπεδον, ἀσφαλῶς κατ' ἐπίδρασιν τοῦ Ἀρχιμήδους.

Μαθηματικὰ ἔργα τοῦ Cardano

209. Ἡ χρονολογικὴ σειρὰ ἐπιβάλλει νὰ ἐγκαταλείψωμεν προσωρινῶς τὸν μαθηματικὸν τῆς Brescia διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὰ μαθηματικὰ ἔργα

* Τὸ εἰσαγωγικὸν μάθημα ποὺ προτάσσεται τοῦ βιβλίου ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐργασία εἶναι καρπὸς μιᾶς σειρᾶς μαθημάτων γενομένων εἰς Βενετίαν.

ἕνα πρόσωπον μὲ παιδικὰς ἀναμνήσεις κηλιδωμένας ἀπὸ δάκρυα καὶ αἵματα ἔστρεψε τὴν προσοχήν του εἰς τὴν τέχνην τοῦ πολέμου καὶ μάλιστα εἰς τὰ προβλήματα τῶν πυροβόλων ὅπλων, τῶν ὁποίων ἡ χρῆσις ἀπό τινος ἤρχισε νὰ γενικεύεται. Καὶ πράγματι ἡ Nuova Scientia (Νέα ἐπιστήμη), τῆς ὁποίας ὁ Tartaglia θεωρεῖ ἑαυτὸν ἐφευρέτην, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ Βλητική. Καὶ εἰς αὐτὸν ἀνήκει ἡ δόξα ὅτι πρῶτος ἐφήρμοσε τὸν μαθηματικὸν συλλογισμὸν εἰς τὴν τέχνην τοῦ πολέμου. Εἰς ἀπόδειξιν τῆς γονιμότητος τῶν μεθόδων του, ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι πρῶτος ἀπέδειξεν ὅτι τὸ μέγιστον βεληνεκὲς τῶν πυροβόλων ὅπλων ἐπιτυγχάνεται ὑπὸ γωνίαν βολῆς 45°.

Δὲν θὰ ἐπανέλθωμεν ἐπὶ τῆς ἰδιοποιήσεως, τὴν ὁποίαν διαπράττει ὁ Tartaglia, ἐμφανίζων ὡς ἰδικόν του ἔργον τὴν λατινικὴν μετάφρασιν τοῦ ἔργου Περὶ ὀχουμένων τοῦ Ἀρχιμήδους, ὀφειλομένην ὡς εἴδομεν εἰς τὸν Guglielmo di Moerbecke (Τόμος I, § 114). Ἐὰν ἐξ αἰτίας τοῦ παραπτώματος τούτου ἐπισύρῃ ἐναντίον του ὁ Tartaglia αὐστηρὰν τὴν ἐτυμηγορίαν τοῦ ἠθικοῦ κώδικος, ἡ ἐπιστήμη ἐπικαλεῖται τὴν συγχώρησιν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι, μὲ τὴν δημοσίευσιν ἐκείνην, ἔθετεν ἐκ νέου εἰς κυκλοφορίαν σκέψεις καὶ μεθόδους ταφείσας ἀπὸ αἰώνων, αἱ ὁποῖαι αἰφνιδίως ἐξεδήλωσαν τὴν ἀμάραντον ζωτικότητά των. Καὶ ἐπὶ πλέον γνωρίζων νὰ ἐκτιμήσῃ ὁλόκληρον τὸ μεγαλεῖον τοῦ μαθηματικοῦ τῶν Συρακουσῶν, ἐπεμελήθη (1543) μίαν θαυμασίαν λατινικὴν ἔκδοσιν τῶν ἄλλων ἔργων του.

Μεγάλην καὶ ἐπαξίαν ἐπιτυχίαν εἶχεν ἐπίσης ἡ ὑπ' αὐτοῦ γενομένη μετάφρασις εἰς τὴν Ἰταλικὴν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου *, μὲ ἐκτεταμένα σχόλια, ἐν μέρει πρωτότυπα, ἐν μέρει ληφθέντα ἀπὸ τὸν Campano καὶ ἄλλους προγενεστέρους ἐκδότας. Εἶναι κρῖμα ὅτι ἀποδίδει εἰς τὸν Εὐκλείδη τὰ βιβλία XIV καὶ XV τῶν Στοιχείων (Τόμος I, §52) καὶ ὅτι παρασύρεται ἀπὸ τὸν Valerio Massimo εἰς ταύτισιν τοῦ συγγραφέως τοῦ μεγάλου τούτου ἔργου πρὸς τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ παραλείψωμεν καὶ τοῦτο, ὅτι ὁ Tartaglia, κατὰ τὴν μετάφρασιν, προέβη εἰς μερικὰς θεμιτὰς τροποποιήσεις, ὅπως π.χ. εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας, ὡς γραμμῆς ἐλαχίστου μήκους καὶ τὸν ἀνάλογον διὰ τὸ ἐπίπεδον, ἀσφαλῶς κατ' ἐπίδρασιν τοῦ Ἀρχιμήδους.

Μαθηματικὰ ἔργα τοῦ Cardano

209. Ἡ χρονολογικὴ σειρὰ ἐπιβάλλει νὰ ἐγκαταλείψωμεν προσωρινῶς τὸν μαθηματικὸν τῆς Brescia διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὰ μαθηματικὰ ἔργα

* Τὸ εἰσαγωγικὸν μάθημα ποὺ προτάσσεται τοῦ βιβλίου ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐργασία εἶναι καρπὸς μιᾶς σειρᾶς μαθημάτων γενομένων εἰς Βενετίαν.

(ὅλα ἐκτὸς ἑνὸς) τοῦ μεγάλου ἀντιζήλου του. Τῶν ἔργων τοῦ Cardano δύναται ὁ βουλόμενος νὰ λάβῃ πλήρη γνῶσιν, καθ' ὅσον ἔχουν ὅλα περιληφθῆ εἰς τὸν Τόμον IV τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν του (εἰς 10 ἐπιβλητικοὺς τόμους καὶ εἰς μέγα φύλλον). Θὰ συντελέσῃ ὅμως πολὺ εἰς τὴν μόρφωσιν πληρεστέρας ἀντιλήψεως περὶ τοῦ συγγραφέως καὶ τῆς δημιουργίας του, ἂν λάβῃ ὑπ' ὄψιν του καὶ τὸν Τόμον I, διότι εὑρίσκονται ἐκεῖ τὰ δύο κείμενα «Περὶ τῆς ζωῆς μου» (De vita propria) καὶ «Περὶ τῶν βιβλίων μου» (De libris propriis), μεγίστης βιογραφικῆς καὶ βιβλιογραφικῆς ἀξίας.

Πιεζόμενοι ἀπὸ τὸν μακρὸν δρόμον ποὺ ἔχομεν νὰ διανύσωμεν, δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς μίαν σύντομον μονογραφίαν De numerorum proprietatibus (Περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν), ἀφοῦ οὐσιαστικῶς δὲν περιλαμβάνεται εἰς αὐτὴν τίποτε περισσότερον τῶν ὅσων ἐκτίθενται εἰς τὰ βιβλία VII - IX τοῦ Εὐκλείδου.

Μακροτέραν διατριβὴν ἀπαιτεῖ τὸ ἔργον του Practica arithmeticae (Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀριθμητικῆς, 1539)* ἀποτελούμενον ἀπὸ 67 Κεφάλαια ἢ ὑπερδιακοσίας σελίδας εἰς μέγα φύλλον καὶ δύο στήλας. Πρόκειται περὶ μιᾶς ἐκθέσεως, ὄχι πάντοτε εὐστόχου, τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ἐνῷ κατὰ τὴν μορφὴν ἀνήκει εἰς τὴν ρητορικὴν ἄλγεβραν, καθ' ὕλην πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸ Liber Abbaci, τοῦ ὁποίου ὁ Cardano ἔλαβε γνῶσιν ἀπὸ τὴν Summa τοῦ L. Pacioli. Πολὺν χῶρον καταλαμβάνουν, φυσικά, αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, κλασματικῶν καὶ ἀσυμμέτρων. Μεταξὺ τῶν τεχνασμάτων, πρὸς ἐκτέλεσιν ἀπὸ μνήμης ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, ἐξαίρομεν ἐκεῖνο (Κεφ. 39) ποὺ εἶναι πόρισμα τοῦ τύπου:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Μὲ τὸ τέχνασμα τοῦτο τρέπεται ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς ἀφαίρεσιν, εἶναι δὲ κατ' ἐξοχὴν χρήσιμον, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄρτιοι ἢ

---

* Ἐξ ὅσων ἀναφέρει ὁ ἴδιος ὁ Cardano εἰς τὸ ἔργον του De libris propriis, τοῦτο θ' ἀπετέλει τὸ πρῶτον μέρος μιᾶς μεγάλης ἐγκυκλοπαιδείας ἐπὶ τῆς τέχνης τοῦ λογισμοῦ (ἀριθμητικοῦ καὶ ἀλγεβρικοῦ), προωρισμένης νὰ φέρῃ τὸν ὑπέροχον τίτλον Opus Perfectum (Ἔργον τέλειον). Τὰ 14 Μέρη τοῦ ὅλου ἔργου, θὰ περιελάμβανον τὰ ἑξῆς θέματα: 1. Περὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν· 2. Περὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν· 3 - 4. Τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ρίζαι· 5. Ἀναλογίαι· 6. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν· 7. Περὶ ἐμπορίου· 8. Ὑπολογισμὸς τόκων· 9. Περὶ ἐξαιρετικῶν προβλημάτων(;)· 10. Μείζονες κανόνες ἢ ἡ οὕτω καλουμένη Ars magna (Μεγάλη τέχνη). 11. Μέτρησις ἐπιπέδων σχημάτων· 12. Μέτρησις στερεῶν σχημάτων· 13. Ἀριθμητικὰ προβλήματα· 14. Γεωμετρικὰ προβλήματα.

Τὸ 10ον μέρος θὰ ἐκπροσωπεῖτο πιθανῶς ἀπὸ τὸ ἔργον, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος εἰς § 210 - 211.

περιττοὶ καὶ ὅταν διαθέτωμεν ἕνα πίνακα τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ὁ Cardano συνιστᾷ ἐπίσης τὴν χρῆσιν τῆς σχέσεως :

$$ab = 100\,\alpha\beta - 10\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + \alpha'\beta',$$

ὅπου $a = 10\alpha - \alpha'$, $b = 10\beta - \beta'$ καὶ α' καὶ β' ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Ἀκολουθῶν τὰς ἀστρολογικὰς κλίσεις του, τὰς ὁποίας μὲ τόσην ἀφέλειαν ἐξομολογεῖται εἰς τὴν αὐτοβιογραφίαν του (§ 206), καὶ μιμούμενος τὸν Pacioli (Τόμος I, § 203), ἀποκαθιστᾷ μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν μαγικῶν τετραγώνων μὲ ἀριθμοὺς στοιχείων: $3^2, 4^2, \ldots, 9^2$ καὶ τῶν ἄστρων : Σελήνη, Ἑρμῆς Ἀφροδίτη, Ἥλιος, Ἄρης, Ζεύς, καὶ Κρόνος, ὡς ἐπίσης μεταξὺ τούτων καὶ τῶν ἀριθμῶν : 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, οἱ ὁποῖοι λαμβάνονται ὡς ἄθροισμα τῶν στοιχείων μιᾶς στήλης ἢ γραμμῆς τῶν ἰδίων μαγικῶν τετραγώνων ἀντιστοίχως. Χάριν περιεργείας, προσθέτομεν ὅτι, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν γνώμην τοῦ Ἀβερρόη (1126—1198), ὁ Cardano θεωρεῖ ὀλεθρίους διὰ τὸν ἄνθρωπον τοὺς ἀριθμοὺς 20, 40, 60, 80· 9, 18, 27, 36· 63, 81.

Συμμορφούμενος πρὸς τὰς μεσαιωνικὰς συνηθείας, ὁ Cardano ἐφαρμόζει εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τὸν «κανόνα τοῦ σφάλματος» (regula falsi) καὶ τὸν «κανόνα τῶν ἓξ ποσοτήτων» (regula sex quantitatum). Πολλὰς σελίδας ἀφιερώνει εἰς τὰς ἐξισώσεις α' καὶ β' βαθμοῦ. Περιττὸν εἶναι νὰ προσθέσωμεν ὅτι, ὡς πρὸς τὰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις, θεωρεῖ καὶ λύει κεχωρισμένως τοὺς τρεῖς κλασσικοὺς τύπους (μὲ p καὶ q θετικούς):

$$x^2 = px + q,$$
$$x^2 + px = q,$$
$$x^2 + q = px.$$

Ὡς πρὸς τὸν τελευταῖον παρατηρεῖ, παρεμπιπτόντως, ὅτι ὑπάρχουν περιπτώσεις ποὺ ἔχει δύο ρίζας καὶ περιπτώσεις ποὺ δὲν ἔχει καμμίαν. Καὶ ἐνῷ δὲν ἀποκλείει τὴν δυνατότητα ἀρνητικῶν ριζῶν, δὲν παραδέχεται μηδενικὰς ρίζας, χαρακτηρίζων τοιουτοτρόπως ὅλας τὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $ax^m = bx^n$ ὡς ἀδυνάτους.

Δὲν ἀπουσιάζουν συστήματα ἐξισώσεων, δυνάμενα νὰ λυθοῦν μὲ τοὺς προαναφερθέντας κανόνας· ματαίως ὅμως θ' ἀναζητήσῃ κανεὶς οἱανδήποτε ἀπόδειξιν τῶν ἐκτιθεμένων μεθόδων. Ἐκτὸς τῶν συνήθων προόδων, ἐξετάζει ὑπὸ τὸν τίτλον Progressio ἄλλας ἀπειρομερεῖς ἀκολουθίας ἀριθμῶν. Ἐπίσης, ἐκτὸς ἑνὸς πλήθους ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προβλημάτων (εἰς μερικὰ τῶν ὁποίων σημειοῦται ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν) παραθέτει τὰς λύσεις σειρᾶς

προβλημάτων διαφόρων τύπων ἀπαντωμένων εἰς τὰς ἐμπορικὰς συναλλαγὰς (προβλήματα ἑταιρείας, ἀνταλλαγῆς νομισμάτων, τόκου κλπ.). Δὲν ἀπουσιάζουν ἐπίσης ἁπλαῖ ἐφαρμογαὶ τῆς συνδυαστικῆς καὶ τῶν πιθανοτήτων, ληφθεῖσαι ἀπὸ τὸν Pacioli, μὲ τὸν ὁποῖον πάντως ὁ Cardano διαφωνεῖ ὡς πρὸς τὸν τρόπον διανομῆς τῆς «πόστας» μεταξὺ δύο παικτῶν, ποὺ διέκοψαν τὸ παιγνίδι πρὸ τοῦ τέλους (Τόμος I, § 199). Πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων παραθέτει ἕνα πίνακα χορδῶν καὶ ἀποστημάτων μερικῶν κανονικῶν πολυγώνων, ὡς καὶ μερικὰ δεδομένα τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

Ὁ Cardano, ὁ ὁποῖος προφανῶς οὐκ ὀλίγα παρέλαβεν ἀπὸ τὴν Summa τοῦ Pacioli, διατρίβει ἐπὶ μακρὸν εἰς τὸ τελευταῖον Κεφάλαιον τοῦ ἔργου του, διὰ ν' ἀποκαλύψῃ τὰ σφάλματα ποὺ συνήντησεν εἰς αὐτὴν καὶ νὰ ἐπιμεληθῇ τῆς διορθώσεώς των.

Καίτοι ὁ Cardano δὲν χρησιμοποιεῖ εἰδικὰ σύμβολα, ἀλλὰ μόνον μερικὰς συντομογραφίας, καθιερωθείσας ἤδη ὑπὸ τῶν προγενεστέρων (R διὰ τὴν δήλωσιν τῆς ρίζης, p τοῦ + καὶ m τοῦ —), γνωρίζει νὰ μετασχηματίζῃ θαυμασίως τὰς ἐξισώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγονται τὰ διάφορα προβλήματα. Ἀρκεῖ εἰς ἀπόδειξιν τούτου τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα· ἐνώπιον τῆς ἐξισώσεως:

$$6x^3-4x^2=34x+24,$$

προσθέτει εἰς τὰ δύο μέλη τὸ πρῶτον καὶ λαμβάνει:

$$2(6x^3-4x^2)=6x^3-4x^2+34x+24.$$

Κατόπιν προσθέτει εἰς τὰ δύο μέλη $24x^2$, ὅτε γεννᾶται ἡ ἐξίσωσις:

$$2(6x^3+8x^2)=6x^3+20x^2+34x+24$$

ἢ ἡ ἰσοδύναμος:

$$4x^2(3x+4)=(2x^2+4x+6)(3x+4).$$

Ἐπειδὴ τώρα τὸ διώνυμον $3x+4$ δὲν μηδενίζεται διὰ τιμὴν τοῦ x θετικήν, ὁ Cardano ἀπαλείφει τοῦτο καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη λαμβάνων:

$$2x^2=x^2+2x+3$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^2=2x+3,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἀμέσως $x=3$.

Ἐπισύρομεν τὴν προσοχὴν ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τούτων χειρισμῶν, διότι δι' αὐτῶν ὁ Ferrari κατώρθωσε καὶ ἴσως ἐξ αὐτῶν ἐνεπνεύσθη τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τετάρτου βαθμοῦ.

Ὡς παράρτημα καὶ συμπλήρωμα τῆς Practica arithmeticae θεωρεῖται τὸ

τιτλοφορούμενον Libellus qui dicitur computus minor (Βιβλιάριον, τὸ καλούμενον ἐλάσσων λογισμός), ἀφιερωμένον εἰς τὴν διδασκαλίαν μιᾶς μεθόδου ἐν χρήσει τότε εἰς τὸ ἐμπόριον, ἀλλὰ περιελθούσης σήμερον εἰς ἀχρηστίαν. Περιοριζόμεθα νὰ μνημονεύσωμεν ἐξ αὐτοῦ μόνον ἕνα σύντομον πίνακα πολλαπλασιασμοῦ ἀπὸ 0×0 ἕως 20×20.

210. Σπουδαιότητα κατὰ πολὺ μεγαλυτέραν ἔχει τὸ δικαίως καταστὰν διάσημον ἔργον Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus (Μεγάλης τέχνης ἢ περὶ ἀλγεβρικῶν μεθόδων Βιβλίον ἕνα, 1545), διὰ τοῦ ὁποίου διεδόθησαν εἰς ὅλον τὸν κόσμον αἱ μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν τριτοβαθμίων καὶ τεταρτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ ἐγνώσθησαν αἱ πρῶται ἰδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων παντὸς βαθμοῦ. Ἀτυχῶς ὁ Cardano ἀποδεικνύεται ἐδῶ ἀδεξιώτατος εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως καὶ τοῦτο ἐνισχύει τὴν ἄποψιν, ὅτι ἡ ὕλη του δὲν εἶχεν ὑποστῇ τὴν πολύτιμον δοκιμασίαν τῆς προφορικῆς διδασκαλίας. Ἐπὶ πλέον μὴ δυνηθεὶς ν' ἀποτινάξῃ τὴν συνήθειαν τῆς ἐποχῆς του, νὰ θεωρῇ ἀποκλειστικῶς ἐξισώσεις μὲ συντελεστὰς θετικούς, ἠναγκάσθη νὰ διακρίνῃ πλῆθος περιπτώσεων εἰς ἑκάστην ἐξίσωσιν δοθέντος βαθμοῦ· ἐντεῦθεν ἀφόρητοι μακρηγορίαι καθιστῶσαι τὸ ἔργον δυσανάγνωστον καὶ ἀποκρουστικόν. Ὅταν ὅμως κατορθώσῃ κανεὶς νὰ ὑπερνικήσῃ τὰς δυσκολίας τῆς ἀναγνώσεως καὶ νὰ διεισδύσῃ εἰς τὸ βάθος τῆς καρντανικῆς σκέψεως, δὲν θὰ βραδύνῃ ν' ἀναγνωρίσῃ εἰς διαφόρους εὐφυεῖς παρατηρήσεις τοῦ συγγραφέως μερικὰς πραγματικὰς ἀνακαλύψεις.

Μεταξὺ τῶν 40 Κεφαλαίων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἡ Ars Magna, παρουσιάζουν ἀληθὲς καὶ μέγα ἐνδιαφέρον ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα (Κεφ. XI - XXV) πραγματεύονται περὶ τῶν ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ (ἢ ἀναγομένων εἰς τοιαύτας) καὶ περὶ τῶν ἐξισώσεων τετάρτου βαθμοῦ (Κεφ. XXVI - XXVIII).

Ἡ ἀνακάλυψις τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ τρίτου βαθμοῦ περιγράφεται ἀπὸ τὸν Cardano εἰς τὸ Κεφ. I τῆς Ars Magna ὡς ἑξῆς:

«Ὁ Scipione dal Ferro, ἐκ Βολωνίας, εὗρεν, ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας, τὸ Κεφάλαιον «Τρίτη δύναμις τοῦ ἀγνώστου καὶ ἄγνωστοι, δίδοντα ὡς ἄθροισμα ἀριθμὸν» (Cubo e cose eguali a numero), θέμα τῇ ἀληθείᾳ ὡραῖον καὶ θαυμαστόν. Τοιαύτη τέχνη, ὑπερβαίνουσα κάθε ἀνθρωπίνην ἀγχίνοιαν καὶ τὴν λάμψιν κάθε θνητοῦ πνεύματος, πιστοποιεῖ τὴν ἀξίαν τῆς διανοίας. Εἶναι πρᾶγμα τόσον θαυμάσιον, ὥστε ἐκεῖνος ποὺ τὸ κατώρθωσε νὰ δύναται νὰ φαντασθῇ, ὅτι τίποτε δὲν τοῦ εἶναι ἀκατόρθωτον. Ἐκ πνεύματος ἁμίλλης πρὸς αὐτὸν ὁ Nicolò Tartaglia, ἐκ τῆς Brescia, φίλος μου, φιλονικήσας μὲ τὸν Anton Maria Florido (ἢ Fior), μαθητὴν τοῦ dal Ferro, καὶ ἐπιθυμῶν νὰ ἐξέλθῃ νικητής, ἀνεκάλυψε τὸ ἴδιον ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἐνεπιστεύθη εἰς ἐμὲ κατόπιν ἐπιμόνων μου παρακλήσεων. Ἐγώ, ἀπατηθεὶς ἀπὸ τοὺς λόγους

τοῦ Luca Pacioli, ὁ ὁποῖος ἀρνεῖται ὅτι πέραν τῶν ἰδικῶν του Κεφαλαίων δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἄλλο γενικοῦ χαρακτῆρος, καίτοι ἡ ἀνακάλυψις θὰ ἠδύνατο νὰ εἶχε διευκολυνθῆ ἀπὸ πολλὰ ἄλλα πράγματα, ποὺ εἶχον εὕρει ἐν τῷ μεταξύ, ἐν τούτοις ἀπεῖχον ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν ἐκείνου, τὸ ὁποῖον δὲν ἐτόλμουν νὰ ἐρευνήσω. Ὅταν ὅμως ἔγινα κύριος τοῦ ζητήματος καὶ τῆς ἀποδείξεώς του, κατενόησα ὅτι πολλὰ ἄλλα πράγματα ἠδύναντο νὰ προέλθουν ἐξ αὐτοῦ καὶ μὲ ἑδραιωθεῖσαν πλέον αὐτοπεποίθησιν κατέληξα εἰς τὴν εὕρεσίν των, ἐν μέρει μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πρώην μαθητοῦ μου Ludovico Ferrari. Ὅ,τι ὀφείλεται εἰς αὐτὸν θ᾽ ἀναφερθῇ μὲ τὸ ὄνομά του, ὅλα τὰ λοιπὰ ἀποτελοῦν εὑρήματα ἰδικά μου».

Θὰ ἴδωμεν (§ 218) ὅτι ἡ ὡς ἄνω ἔκθεσις περιέχει μερικὰς παρασιωπήσεις, αἱ ὁποῖαι διαστρέφουν τὰ γεγονότα. Πρὸς τὸ παρὸν περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ Cardano θὰ ἠδύνατο νὰ ἰσχυρισθῇ, ὅτι τίποτε δὲν εἶπεν ἀντίθετον πρὸς τὴν ἀλήθειαν, ἐξ ἄλλου ὅμως θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ ἐναντίον του, ὅτι δὲν ἀπεκάλυψεν ὁλόκληρον τὴν ἀλήθειαν.

Τὸ θεωρητικὸν μέρος τῆς Ars magna ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν σειρὰν Κεφαλαίων, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων λύονται ἀριθμητικαὶ ἐξισώσεις ἀνήκουσαι εἰς τὰς ἀκολούθους μορφάς, τὰς ὁποίας ὁ Cardano εἶχεν ἤδη ἀπαριθμήσει εἰς τὸ Κεφ. II:

$$x^3+px=q,\qquad x^3=px+q,\qquad x^3+q=px,$$
$$x^3+px^2=q,\qquad x^3=px^2+q,\qquad x^3+q=px^2,$$
$$x^3+px^2=qx+r,\qquad x^3+px^2+qx=r,$$
$$x^3+qx=px^2+r,$$
$$x^3=px^2+qx+r,\qquad x^3+r=px^2+qx,$$
$$x^3+px+r=qx^2,\qquad x^3+px^2+r=qx.$$

Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἀναγόμεναι εἰς τοὺς τρεῖς πρώτους τύπους λύονται μὲ τὸ γνωστὸν τέχνασμα τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀγνώστου x εἰς ἄθροισμα δύο ἄλλων, ὑποκειμένων εἰς κατάλληλον δέσμευσιν. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀκολούθων τριῶν τύπων ἀνάγονται εἰς τοὺς προηγουμένους ἢ ἀντικαθισταμένου τοῦ ἀγνώστου μὲ τὸν ἀντίστροφόν του ἢ ἀπαλειφομένου τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου διὰ τῆς γνωστῆς ἀντικαταστάσεως $x=y-p/3$. Ἀνάλογα τεχνάσματα εἶναι ἐφαρμόσιμα εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις.

Παρὰ ταῦτα ὁ Cardano δὲν παρέλειψε νὰ παρατηρήσῃ, ὅτι ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦ σκοποῦ μὲ ἄλλους τρόπους συντομωτέρους. Παράδειγμα αἱ δύο ἐξισώσεις:

$$x^3=(a+b^2)\,x+ab,$$
$$x^3=(a^2+b^2)\,x+2\,ab\,(a+b),$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ δευτέρα ἔχει ρίζαν προφανῆ $\alpha + b$, ἡ δὲ πρώτη δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$x(x+b)(x-b) = \alpha(x+b)$$

καὶ συνεπῶς ν' ἁπλοποιηθῇ διὰ $(x+b)$.

Ἐν τῇ ρύμῃ τῶν ἐρευνῶν του, ὁ Cardano ἐνέπεσεν εἰς ἕνα γεγονὸς μεγίστης σημασίας, ὅτι δηλαδὴ (Κεφ. XVIII) αἱ ἐξισώσεις τῶν μορφῶν:

$$x^3 + 10x = 6x^2 + 4,$$
$$x^3 + 21x = 9x^2 + 5,$$
$$x^3 + 26x = 12x^2 + 12,$$

ἔχουν ἑκάστη τρεῖς ρίζας. Καὶ ἐπειδή, ὡς παρετήρησεν, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ριζῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ x^2, ἐνεκαινίασε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν σειρὰν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου. Ἀλλὰ δὲν ἠγνόει ἐπίσης ὅτι, τοὐλάχιστον εἰς τινας περιπτώσεις, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀπολύτως ἴσον πρὸς τὸν γνωστὸν ὅρον τῆς ἐξισώσεως, εἰς τρόπον, ὥστε δικαίως θεωρεῖται ἡ Ars magna ὡς ἀφετηρία τῆς θεωρίας τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Καὶ πράγματι, ἐνῷ προηγουμένως μοναδικὸς σκοπὸς τῶν ἐρευνητῶν ἦτο ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ριζῶν, ἀπὸ τοῦδε καὶ ἑξῆς ἀρχίζει νὰ διαμορφοῦται τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ ριζῶν καὶ συντελεστῶν.

211. Ἡ πρώτη ὤθησις πρὸς μετάβασιν ἀπὸ τοῦ τρίτου βαθμοῦ εἰς τὸν τέταρτον φαίνεται ὅτι ἐδόθη ἀπὸ τὸν Διδάσκαλον Zuanne da Coi, ὁ ὁποῖος ἀπὸ τῆς 15ης Δεκεμβρίου 1536 εἶχε προτείνει εἰς τὸν Tartaglia ἕνα πρόβλημα, ἀναγόμενον ἀκριβῶς εἰς μίαν ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, τοῦ ὁποίου τὴν λύσιν δὲν ἐπέτυχεν ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia, ἀπαντᾶται εἰς τὴν Ars magna (Κεφ. XXXIX) μὲ ἄλλα ἀριθμητικὰ δεδομένα, ὡς προερχόμενον ἐκ τῆς αὐτῆς πηγῆς καί, ὅπερ σπουδαιότερον, συνοδευόμενον ἀπὸ μίαν λύσιν, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀνακαλύψει ὁ Ludovico Ferrari. Τὸ πρόβλημα ἐκεῖνο συνίστατο εἰς τὸν χωρισμὸν δοθέντος ἀριθμοῦ α εἰς τρία μέρη, ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο πρῶτα εἶχον γινόμενον δοθὲν b. Ἐὰν λοιπὸν τὰ τρία ζητούμενα μέρη παρασταθοῦν, συμφώνως πρὸς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, διὰ τῶν ἐκφράσεων x, xy, xy^2, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὰς ἐξισώσεις:

$$x + xy + xy^2 = \alpha,$$
$$x^2 y = b,$$

ἐκ τῶν ὁποίων, ἀπαλειφομένου τοῦ y, εὑρίσκομεν τὴν τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν:

$$x^4 + bx^2 + b^2 = \alpha x^3,$$

μὲ ἐλλείποντα τὸν ὅρον τοῦ x. Ἐὰν πάλιν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ παρασταθοῦν διὰ τῶν ἐκφράσεων x/y, x, xy, αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος θὰ ἔδιδον, κατόπιν ἀπαλοιφῆς τοῦ y, τὴν τεταρτοβάθμιον:

$$x^4+bx^2+b^2=abx,$$

μὲ ἐλλείποντα τὸν ὅρον τοῦ x^3.

Καὶ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην περίπτωσιν τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν δεύτερον βαθμόν, ἂν γράψωμεν τὴν ἐπιλύουσαν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(x^2+px+q)^2=(rx+s)^2,$$

πρᾶγμα ἐπιτυγχανόμενον μέσῳ μιᾶς ἐξισώσεως τρίτου βαμοῦ. Τούτου γενομένου, μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης καὶ τῶν δύο μελῶν, ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς δευτεροβάθμιον. Τέχνασμα εὐφυέστατον μὲ ἀναμφισβήτητον διοφαντικὴν γεῦσιν, ἐφαρμόσιμον ἀκόμη καὶ εἰς τὴν πλήρη τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν.

Ὁ Cardano παρατηρεῖ ὅτι, ἀναλόγως πρὸς ὅ,τι συμβαίνει εἰς τὰς τριτοβαθμίους ἐξισώσεις, ὑπάρχουν εἰδικαὶ περιπτώσεις τεταρτοβαθμίων, τῶν ὁποίων ἡ λύσις δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ταχύτερον μὲ ἁπλουστέρους τρόπους. Ἐὰν π.χ. οἱ συντελεσταὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$x^4=nx^2+px+q,$$

πληροῦν τὴν συνθήκην:

$$p/2n=\sqrt{q/n} \quad (\text{ἢ} \quad p=2\sqrt{qn}\ ),$$

ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ :

$$4nx^4=(2nx+p)^2$$

καὶ ἑπομένως μεταπίπτει ἀμέσως εἰς δευτεροβάθμιον.

Τὴν γενικὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἀνεκάλυψεν ὁ Ferrari, ἐφήρμοσεν ὁ Cardano εἰς μέγαν ἀριθμὸν προβλημάτων, χωρὶς ὅμως νὰ κάμῃ μίαν πλήρη κατάταξιν τῶν διαφόρων δυνατῶν περιπτώσεων, ἡ ὁποία εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένη μὲ τὴν δεσμευτικὴν προϋπόθεσιν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἶναι πάντοτε θετικοί. Τοῦτο, ὅπως θὰ ἴδωμεν (§ 230), ἔκαμεν ὁ Bombelli.

Ἀρκετὰ εἶναι βεβαίως ὅσα εἴπομεν διὰ νὰ καταδείξουν τὴν σπουδαιότητα τῆς Ars magna. Παρὰ ταῦτα δὲν ἐξηντλήθησαν ὅλα τὰ ἀξιόλογα ποὺ περιέχονται εἰς αὐτήν. Εἰς τὸ Κεφ. XXIX π.χ., ὑπὸ τὸν τίτλον De regula modi (περὶ κανόνος τοῦ μέτρου) διδάσκεται μία μέθοδος πρὸς λύσιν δύο γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, ἐνῷ εἰς τὸ ἑπόμενον ὑπὸ τὸν τίτλον De regula aurea (περὶ χρυσοῦ κανόνος) ἐκτίθεται μία μέθοδος προσεγγίσεως τῶν ριζῶν τῶν ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων.

Θὰ ἐφελκύσωμεν ἀκόμη τὴν προσοχὴν τῶν ἀναγνωστῶν ἐπὶ τοῦ Κεφ. XXXVII, φέροντος τίτλον De regula falsum ponendi (περὶ κανόνος τοῦ θέτειν τὸ ψεῦδος), τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι ὁ Cardano, κατ' ἀντίθεσιν

πρὸς τοὺς συγχρόνους του, ἐχρησιμοποίει ἐνίοτε εἰς τοὺς ὑπολογισμούς του, φανταστικοὺς ἀριθμούς, κατανικῶν τὴν γενικὴν ἀποστροφὴν τῶν τότε μαθηματικῶν πρὸς ἀριθμητικὰς ὀντότητας τόσον ἰδιοτρόπους καὶ μυστηριώδεις.

Μεταγενέστεραι ἐξελίξεις καὶ ἐφαρμογαὶ τῶν μεθόδων λύσεως τῶν τριτοβαθμίων καὶ τεταρτοβαθμίων ἐξισώσεων εὑρίσκονται εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον τοῦ ἰδίου συγγραφέως, φέρον τὸν τίτλον Ars magna arithmeticae sive liber quadraginta capitulorum et quadraginta questionum (Μεγάλη τέχνη τῆς ἀριθμητικῆς ἢ βιβλίον μὲ 40 κεφάλαια καὶ 40 ζητήματα). Τὸ ἔργον τοῦτο δὲν ἀναγράφει χρονολογίαν καὶ φαίνεται ὅτι εἶχεν ὡς κύριον σκοπὸν τὴν ἔκθεσιν τοῦ X Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὴν ἐπέκτασιν αὐτοῦ εἰς τὰς κυβικὰς ρίζας. Ἐνῷ διὰ τῆς μνείας τῶν ὀνομάτων τοῦ Tartaglia καὶ τοῦ Ferrari δὲν προστίθεται τίποτε τὸ οὐσιῶδες εἰς ὅσα ἔγραψεν ὁ Cardano εἰς τὴν Ars Magna γύρω ἀπὸ τὰς ἐργασίας των, τὸ Βιβλίον τοῦτο μαρτυρεῖ, ὅτι ὁ πνευματώδης ἰατρὸς τοῦ Μιλάνου συνέλαβε τόσον θαυμάσια καὶ καθολικὰ τὸ πρόβλημα τῆς φύσεως τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ὥστε οἱ ὁραματισμοί του προσλαμβάνουν ἐνίοτε προφητικὸν χαρακτῆρα. Ἀναφέρομεν π.χ. τὴν παρατήρησίν του, ὅτι μία πλήρης ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ παρουσιάζουν μόνον παραλλαγὰς δύναται νὰ ἔχῃ ἀποκλειστικῶς θετικὰς ρίζας.

212. Μὲ τὰς ἀλγεβρικὰς ἐρεύνας ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ὁ Cardano προσεκόμισε συμβολὰς ἀναμφισβητήτου ἀξίας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ἕνα ὅμως σημεῖον παρέμενεν ἀκόμη κεκαλυμμένον ὑπὸ σκοτεινοῦ μυστηρίου, τὸ τῆς παρουσίας δηλαδὴ φανταστικῶν ποσοτήτων εἰς τοὺς τύπους τοὺς παρέχοντας τὰς ρίζας τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν καὶ αἱ τρεῖς εἶναι πραγματικαὶ (περίπτωσις μὴ ἀναγώγιμος). Ἐπὶ τοῦ ἐνοχλητικοῦ τούτου φαινομένου θὰ πρέπει νὰ ἐσκέφθη ἐπὶ μακρὸν πρὶν ἤ, τὸ 1570, δημοσιεύσῃ ἕνα εἰδικὸν ἔργον του, εἰς τὸ ὁποῖον ἔδωσε τίτλον, ἀνεξήγητον μέχρι σήμερον, De regula aliza (κατά τινας, ἡ λέξις aliza θὰ ἔπρεπε νὰ προέρχεται ἐκ μιᾶς ἀραβικῆς λέξεως ποὺ σημαίνει δύσκολος). Ἐνῷ, ὅπως παρετηρήσαμεν ἤδη, ὅλα τὰ γραπτὰ τοῦ Cardano δὲν διακρίνονται διὰ τὴν σαφήνειάν των, τὸ τελευταῖον τοῦτο ἀποτελεῖ παράδειγμα ἀπελπιστικῆς σκοτεινότητος. Οὐδεὶς ἢ ὀλίγιστοι (ἕνας ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἱστορικὸς Cossali) προσεπάθησαν νὰ τὸ κατανοήσουν, μὲ πενιχρὸν ὅμως, ἂν μὴ μηδενικὸν ἀποτέλεσμα. Καταφανὴς εἶναι πάντως ἡ ἀγωνιώδης προσπάθεια τοῦ συγγραφέως νὰ διαλύσῃ τὸ μυστήριον.

Ὁ διεξερχόμενος τὸ κείμενον βλέπει τὸν συγγραφέα νὰ σταματᾷ κατὰ διαστήματα καὶ νὰ ὀπισθοδρομῇ, διὰ νὰ ἐπαναλάβῃ κατόπιν τὴν πορείαν του πρὸς τὰ ἐμπρός, ὠθούμενος ἀπὸ τὸν πόθον νὰ καθορίσῃ τὰ ὅρια ἰσχύος

τῆς μεθόδου ποὺ ἐπενόησεν ὁ Tartaglia καὶ νὰ εὕρῃ τρόπον τοιαύτης διαμορφώσεως τῆς λύσεως, ὥστε ν' ἀποφεύγεται ὁ ἐπικίνδυνος σκόπελος. Κατὰ τὴν ἐν λόγῳ ἔρευναν, ἐνέπεσεν ὁ Cardano εἰς τὰ κατωτέρω τρία προβλήματα μεγίστου, τὰ ὁποῖα καὶ ἔλυσεν ἐπιτυχῶς:

I. «Ἀπὸ δοθὲν ὀρθογώνιον μὲ πλευρὰς α, b ν' ἀφαιρεθῇ ἕνα μέρος αὐτοῦ ὕψους x, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πλευράν α οὕτως, ὥστε τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ ἔχον ὕψος $\sqrt{ax}$ καὶ βάσιν τὸ ὑπόλοιπον ὀρθογώνιον νὰ εἶναι μέγιστον». Ὁ Cardano εὑρίσκει ὅτι τὸ ζητούμενον μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς $x = b/3$.

II. «Νὰ διαιρεθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα α εἰς δύο ἄλλα τοιαῦτα, ὥστε νὰ γίνεται μέγιστον τὸ παραλληλεπίπεδον $x(\alpha - x)^2$». Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ Cardano εὑρίσκει ὀρθῶς τὸ μέγιστον διὰ $x = \alpha/3$.

III. «Νὰ διαιρεθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα α εἰς δύο μέρη x, y τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα $xy^2 + x^2y$ νὰ εἶναι μέγιστον». Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται πρὸς αxy, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, πρόβλημα λελυμένον ἤδη ἀπὸ τῶν χρόνων τοῦ Εὐκλείδου.

Ἐὰν εἰς αὐτὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ Cardano εἰς ὡρισμένα προβλήματα δίδει λύσιν στηριζομένην ἐπὶ τῆς ἀλληλοτομίας κωνικῶν τομῶν, θὰ ἔχωμεν συγκεντρώσει στοιχεῖα ἐπαρκῆ πρὸς ἐκτίμησιν τῆς ἀξίας τοῦ ἐν λόγῳ κειμένου, ἔστω καὶ ἂν τοῦτο δὲν ἐπέτυχε τὸν σκοπόν του, νὰ διαλύσῃ δηλαδὴ τὰ σκότη, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἐβάδιζον ψηλαφητὶ οἱ μαθηματικοὶ οἱ ἀποροῦντες ἐνώπιον τοῦ μυστηρίου τῶν μὴ ἀναγωγίμων ἐξισώσεων.

Ὁ Cardano, ἐπηρεαζόμενος ἀπὸ τὰς προκαταλήψεις τῆς ἐποχῆς του, ὅσον ἀφορᾷ τὰς φανταστικὰς παραστάσεις, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ φθάσῃ εἰς αἴσιον τέλος. Τὸ φῶς ἐπέπρωτο νὰ ἔλθῃ ὀλίγον βραδύτερον, χάρις εἰς ἕνα ἄλλον Ἰταλόν, τὸν R. Bombelli, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα ἐφείλκυσαν τὴν προσοχὴν τοῦ Cardano, ὅταν πλέον ὁ τελευταῖος ἦτο ὑπέργηρως, ὡς πιστοποιεῖται ἀπὸ ἕνα σύντομον ὑπόμνημα περιληφθὲν εἰς τὰ Ἅπαντά του ὑπὸ τὸν τίτλον Sermo de plus et minus (Λόγος περὶ τοῦ σὺν καὶ πλήν). Τὸ ὑπόμνημα ἔχει φιλοσοφικὸν χαρακτῆρα, διατυπώνει τὰς ἀπορίας ποὺ γεννᾷ ἡ παρουσία τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, χωρὶς ὅμως νὰ δύναται νὰ τὰς διαλύσῃ. Μηδαμινὴ λοιπὸν ἡ συμβολή του εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς θεωρίας τῶν νέων τούτων ἀριθμητικῶν ὀντοτήτων.

Προτοῦ ἐγκαταλείψωμεν τὸν διαπρεπῆ ἰατρὸν τοῦ Μιλάνου, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι δὲν εἶναι τὸ ἔργον τοῦτο τὸ μοναδικόν, ποὺ ἀποδεικνύει τὴν εἰς τὰ μαθηματικὰ προσήλωσίν του μέχρι τέλους τῆς βασανισμένης ζωῆς του. Πράγματι τὸ 1572 ἐπεράτωσε τὴν συγγραφὴν μιᾶς σειρᾶς προβλημάτων, εἰς τὴν ὁποίαν ἔδωσε τίτλον Exaereton mahematicorum. Πρὸς τὰς δυσμὰς δὲ τοῦ βίου του ἔγραψε τὸ μακρὸν ἔργον Opus de proportionibus

numerorum, ὅπου ἐκτίθεται τὸ V Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, μετὰ σχολίων καὶ ἐφαρμογῶν εἰς λόγους καὶ ἀναλογίας, ἀπαντωμένας εἰς τὴν μηχανικήν, τὴν ἀκουστικὴν κλπ.

«Διάφοροι ἔρευναι καὶ ἐφευρέσεις» τοῦ N. Tartaglia

213. Ἡ χρονολογικὴ τάξις μᾶς ἐπιβάλλει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν τὰ μαθηματικὰ ἔργα τοῦ Tartaglia, ποὺ εἶδον τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἐμφάνισιν τῆς Ars magna τοῦ διασήμου ἀντιζήλου του.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον προπάντων προκαλεῖ ἑλκυστικὸν ἐνδιαφέρον εἶναι τὸ ἔργον τὸ φέρον τὸν τίτλον Π ε ρ ὶ δ ι α φ ό ρ ω ν π ρ ο β λ η μ ά τ ω ν κ α ὶ ν έ ω ν ε ὑ ρ η μ ά τ ω ν (Delli quesiti et inventioni diverse) τὸ ὁποῖον ἐξετυπώθη διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Βενετίαν τὸν Ἰούλιον τοῦ 1546, ἀνετυπώθη κατ' ἐπανάληψιν καί, ὅπως γράφει ὁ συγγραφεύς, ἦτο ἀφιερωμένον

«σ' ὅποιον λαχταρᾶ νὰ δεῖ καινούργιες κατακτήσεις,
ποὺ δὲν θὰ βρεῖ στὸν Πλάτωνα οὔτε καὶ στὸν Πλωτῖνο
οὔτε καὶ σ' ἄλλον Ἕλληνα κανένα ἢ Λατῖνο,
ἀλλὰ στὴν Τέχνη μοναχά, στὶς πράξεις, στὶς μετρήσεις».

Ἀποφεύγοντες πρὸς τὸ παρὸν νὰ κάμωμεν λόγον περὶ τῆς ἐπιστημονικῆς ἀξίας τοῦ ἔργου (περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον), περιοριζόμεθα νὰ ἐξάρωμεν τὴν μεγίστην σπουδαιότητα τούτου ἀπὸ βιογραφικῆς καὶ ἱστορικῆς ἀπόψεως. Πράγματι ὁ Tartaglia εἰς τὰς ἐκφωνήσεις καὶ εἰς τὰς λύσεις τῶν ζητημάτων ποὺ πραγματεύεται φροντίζει νὰ προσθέτῃ πληροφορίας περὶ τοῦ πότε, ποῦ καὶ ἀπὸ ποῖον τοῦ ἐπροτάθησαν. Τοιουτοτρόπως λαμβάνει ἀφορμὴν νὰ παράσχῃ συμπτωματικῶς πληροφορίας περὶ τῶν τόπων, εἰς τοὺς ὁποίους διέμεινε καὶ περὶ τῶν προσώπων, μὲ τὰ ὁποῖα ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν καὶ νὰ προσθέσῃ ἐδῶ καὶ ἐκεῖ πληροφορίας προσωπικοῦ χαρακτῆρος, τὰς ὁποίας ἐν μέρει καὶ ἐχρησιμοποιήσαμεν.

Τὰ τρία πρῶτα βιβλία τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος συγγράμματος περιέχουν προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν βλητικὴν καὶ τὸ πυροβολικόν, καὶ κατὰ συνέπειαν εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ προγράμματος τῆς παρούσης ἐργασίας. Τὸ Βιβλίον IV ἀναφέρεται εἰς τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀργανώσωμεν ἕνα στράτευμα εἰς διαφόρους σχηματισμούς. Τὸ V ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν τοπογραφίαν, τὰ δὲ ἀκόλουθα τρία τὴν ὀχυρωματικὴν καὶ τὴν στατικήν, πράγματα τὰ ὁποῖα δικαιοῦνται ἁπλῆς μόνον μνείας ἐκ μέρους ἡμῶν.

214. Μακροτέραν διατριβὴν ἀπαιτεῖ τὸ ἔνατον καὶ τελευταῖον Βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιστρέφεται «περὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἐπιστήμην, τὴν γεωμετρίαν καὶ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν καὶ μὲ ἄλλα συναφῆ θέματα θεωρούμενα ὑπὸ τῶν ἐπιστημόνων ὡς ἄλυτα».

numerorum, ὅπου ἐκτίθεται τὸ V Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, μετὰ σχολίων καὶ ἐφαρμογῶν εἰς λόγους καὶ ἀναλογίας, ἀπαντωμένας εἰς τὴν μηχανικήν, τὴν ἀκουστικὴν κλπ.

«Διάφοροι ἔρευναι καὶ ἐφευρέσεις» τοῦ N. Tartaglia

213. Ἡ χρονολογικὴ τάξις μᾶς ἐπιβάλλει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν τὰ μαθηματικὰ ἔργα τοῦ Tartaglia, ποὺ εἶδον τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἐμφάνισιν τῆς Ars magna τοῦ διασήμου ἀντιζήλου του.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον προπάντων προκαλεῖ ἑλκυστικὸν ἐνδιαφέρον εἶναι τὸ ἔργον τὸ φέρον τὸν τίτλον Π ε ρ ὶ δ ι α φ ό ρ ω ν π ρ ο β λ η μ ά τ ω ν κ α ὶ ν έ ω ν ε ὑ ρ η μ ά τ ω ν (Delli quesiti et inventioni diverse) τὸ ὁποῖον ἐξετυπώθη διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Βενετίαν τὸν Ἰούλιον τοῦ 1546, ἀνετυπώθη κατ' ἐπανάληψιν καί, ὅπως γράφει ὁ συγγραφεύς, ἦτο ἀφιερωμένον

«σ' ὅποιον λαχταρᾶ νὰ δεῖ καινούργιες κατακτήσεις,
ποὺ δὲν θὰ βρεῖ στὸν Πλάτωνα οὔτε καὶ στὸν Πλωτῖνο
οὔτε καὶ σ' ἄλλον Ἕλληνα κανένα ἢ Λατῖνο,
ἀλλὰ στὴν Τέχνη μοναχά, στὶς πράξεις, στὶς μετρήσεις».

Ἀποφεύγοντες πρὸς τὸ παρὸν νὰ κάμωμεν λόγον περὶ τῆς ἐπιστημονικῆς ἀξίας τοῦ ἔργου (περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον), περιοριζόμεθα νὰ ἐξάρωμεν τὴν μεγίστην σπουδαιότητα τούτου ἀπὸ βιογραφικῆς καὶ ἱστορικῆς ἀπόψεως. Πράγματι ὁ Tartaglia εἰς τὰς ἐκφωνήσεις καὶ εἰς τὰς λύσεις τῶν ζητημάτων ποὺ πραγματεύεται φροντίζει νὰ προσθέτῃ πληροφορίας περὶ τοῦ πότε, ποῦ καὶ ἀπὸ ποῖον τοῦ ἐπροτάθησαν. Τοιουτοτρόπως λαμβάνει ἀφορμὴν νὰ παράσχῃ συμπτωματικῶς πληροφορίας περὶ τῶν τόπων, εἰς τοὺς ὁποίους διέμεινε καὶ περὶ τῶν προσώπων, μὲ τὰ ὁποῖα ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν καὶ νὰ προσθέσῃ ἐδῶ καὶ ἐκεῖ πληροφορίας προσωπικοῦ χαρακτῆρος, τὰς ὁποίας ἐν μέρει καὶ ἐχρησιμοποιήσαμεν.

Τὰ τρία πρῶτα βιβλία τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος συγγράμματος περιέχουν προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν βλητικὴν καὶ τὸ πυροβολικόν, καὶ κατὰ συνέπειαν εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ προγράμματος τῆς παρούσης ἐργασίας. Τὸ Βιβλίον IV ἀναφέρεται εἰς τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀργανώσωμεν ἕνα στράτευμα εἰς διαφόρους σχηματισμούς. Τὸ V ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν τοπογραφίαν, τὰ δὲ ἀκόλουθα τρία τὴν ὀχυρωματικὴν καὶ τὴν στατικήν, πράγματα τὰ ὁποῖα δικαιοῦνται ἁπλῆς μόνον μνείας ἐκ μέρους ἡμῶν.

214. Μακροτέραν διατριβὴν ἀπαιτεῖ τὸ ἔνατον καὶ τελευταῖον Βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιστρέφεται «περὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἐπιστήμην, τὴν γεωμετρίαν καὶ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν καὶ μὲ ἄλλα συναφῆ θέματα θεωρούμενα ὑπὸ τῶν ἐπιστημόνων ὡς ἄλυτα».

Τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα ποὺ περιέχονται εἰς τὸ ὑπ' ὄψει βιβλίον ἀνάγονται εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιστήμης. Τοιοῦτον εἶναι π. χ. τὸ προταθὲν εἰς τὸν Tartaglia ἀπὸ τὸν Zuanne de Tonini da Coi εἰς τὴν Βενετίαν τὴν 15ην Δεκεμβρίου 1536 (Βιβλίον IX, πρόβλημα XXVI). Τοῦτο συνίσταται εἰς τὸ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι «εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου». Ἀλλ' ἐν συνεχείᾳ ὁ ἴδιος διετύπωσε τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς ἄλλου προβλήματος, τὸ ὁποῖον δὲν περιποιεῖ τιμὴν εἰς τὸν προτείναντα, οὔτε βέβαια καὶ εἰς τὸν Tartaglia, ὁ ὁποῖος ἐπεχείρησε νὰ τὸ λύσῃ. Ἐκφραζόμεθα δὲ τοιουτοτρόπως, διότι πρόκειται περὶ προβλήματος περισσότερον τοῦ δέοντος ὡρισμένου καὶ συνεπῶς ἀδυνάτου. Πράγματι ὑποτίθεται εἰς τὸ πρόβλημα, ὅτι δίδεται τὸ κλασσικὸν τρίγωνον μὲ πλευρὰς 13, 14, 15 καὶ ἐπὶ πλέον ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα (μήκους 3), εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν 14 τέμνεται ἀπὸ τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν 15 καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τελευταῖον τοῦτο ὕψος χωρίζει τὴν ἀντίστοιχον πλευράν.

Αὐτὸ δὲν ἀποτελεῖ τὸ μοναδικὸν τεκμήριον τῆς μετριωτάτης πείρας ἀκόμη καὶ τῶν καλυτέρων μαθηματικῶν τοῦ 16ου αἰῶνος εἰς τὸν κλάδον τῆς γεωμετρίας. Ἕνα ἄλλο παράδειγμα ἀπαντῶμεν εἰς μίαν ἐπιστολὴν τὴν ὁποίαν ἔγραψεν ὁ Cardano εἰς τὸν Tartaglia ὑπὸ χρονολογίαν 4 Αὐγούστου 1539 (πρόβλημα XXXVIII), διὰ νὰ τοῦ ζητήσῃ ὁδηγίας πῶς νὰ ἐγγράψῃ ἕνα τετράγωνον εἰς δοθὲν τρίγωνον. Ὁ Tartaglia τοῦ ἀπήντησε κατὰ τρόπον ἀπρεπῆ, ἀποστέλλων εἰς αὐτὸν τὰς λύσεις, ποὺ εἶχον δώσει εἰς τὸ πρόβλημα δύο μαθηταί του (αἱ λύσεις αὐταὶ ὅμως δὲν ἐδημοσιεύθησαν). Παρατηροῦμεν ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ αὐτὸ πρόβλημα εἶχε προταθῆ εἰς τὸν Tartaglia τὴν 12ην Ὀκτωβρίου 1530 (πρόβλημα XV) εἰς τὴν Brescia καὶ ἐλύθη ὑπὸ τοῦ ἰδίου μὲ μίαν μέθοδον, ἡ ὁποία εἶναι εὔκολον ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς πᾶν τρίγωνον.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ προβλήματα ἀναφέρονται εἰς τὴν θεωρητικὴν καὶ ἐμπορικὴν ἀριθμητικὴν (ὅπως εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα IV, ὅπου κατόπιν ἐρωτήματος ποὺ τοῦ ὑπεβλήθη εἰς τὴν Mantova τὸ 1526, προσδιορίζεται τὸ ζεῦγος τῶν φίλων ἀριθμῶν 220, 284), ἐνῷ ἄλλα εἶναι ἐξ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα σήμερον λύονται μέσῳ πρωτοβαθμίων ἢ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Ἀλλὰ αἱ σελίδες ποὺ ἔχουν τὴν μεγίστην ἀξίαν, τόσον ἀπὸ ἱστορικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως, εἶναι αἱ περιέχουσαι τὴν λύσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ διὰ τοῦτο ἀξίζουν ἐκ μέρους μας μίαν λεπτομερεστέραν ἀνάλυσιν.

215. Τὰ πρῶτα προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους ἐπροτάθησαν εἰς τὸν

Tartaglia, ὅταν κατὰ τὸ 1530 εὑρίσκετο εἰς Brescia. Τοῦ τὰ ἔστειλε ὁ da Coi μὲ τρίτον πρόσωπον (πρόβλημα XIV). Ἰδοὺ αἱ ἐκφωνήσεις: I. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ ηὐξημένου κατὰ 3 νὰ δίδῃ 5· II. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς x, x + 2, x + 4, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι 1000.

Ὁ Tartaglia δὲν ἐδυσκολεύθη νὰ εὕρῃ τὰς ἐξισώσεις τῶν προβλημάτων αὐτῶν ἤτοι:

$$x^3 + 3x^2 = 5, \qquad x^3 + 6x^2 + 8x = 1000.$$

Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι, ἐὰν εἰς τὸ δεύτερον ζήτημα λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὸν μέσον ἐξ αὐτῶν, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος γίνεται:

$$x^3 = 1000 + 4x.$$

Ἐπειδὴ ὅλαι αὐταὶ αἱ ἐξισώσεις ἔχουν μορφάς, τὰς ὁποίας ὁ Pacioli ἐχαρακτήρισεν «ἀδυνάτους» (Τόμος I, § 200), ὁ Tartaglia μέμφεται τὸν da Coi, διότι ἐπρότεινε ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ὁ ἴδιος δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ. Εἰς δικαιολογίαν τοῦ da Coi δύναται νὰ προσαχθῇ ἡ ὑπόθεσις, ὅτι εἶχεν ἴσως λάβει γνῶσιν τῆς ἀνακαλύψεως, τὴν ὁποίαν εἶχε κάμει ὁ Scipione dal Ferro 15 ἔτη προηγουμένως. Ὁ Tartaglia προσθέτει ὅτι δὲν συμμερίζεται τὴν γνώμην τοῦ Πατρὸς Luca, ὅτι ἐπέτυχε γενικὸν κανόνα λύσεως ὅλων τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$x^3 + px = q \text{ *}.$$

Ἀκολουθῶν δὲ τὴν συνήθειαν τῆς ἐποχῆς, προτείνει ἐπὶ τοῦ θέματος ἕνα στοίχημα. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τίποτε δὲν μᾶς ἐπιβάλλει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι αἱ λύσεις αἱ παρεχόμεναι ὑπὸ τοῦ Tartaglia ἐκτίθενται κατὰ τρόπον ἀκολουθοῦντα πιστῶς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἦτο ἐν χρήσει καθ' ὃν χρόνον ἐπροτάθησαν τὰ ζητήματα.

Φαίνεται ὅτι τὸ στοίχημα ἐκεῖνο δὲν εἶχε συνέχειαν. Ὁ da Coi ὅμως ἐπανέρχεται μετὰ πενταετίαν, ἀποστέλλων εἰς τὸν Tartaglia (12 Σεπτεμβρίου 1535) τρία προβλήματα (καταχωρηθέντα ὑπ' ἀριθμὸν XX), εἰς τὸ τρίτον ἐκ τῶν ὁποίων ἀνεγνώρισε κάποιαν δυσκολίαν, δεδομένου ὅτι ἀπαιτεῖ τὴν λύσιν ἐξισώσεως ἀνωτέρου βαθμοῦ. Σκοπὸς τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἀριθμοῦ 20 εἰς τρία μέρη κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον, τῶν ὁποίων τὰ δύο πρῶτα νὰ δίδουν γινόμενον 8. Ὁ ἀναγνώστης θ' ἀναγνωρίσῃ ἀσφαλῶς ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι, ὅπως εἴδομεν ἤδη (§ 211), ἐκεῖνο ποὺ ὡδήγησεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τετάρτου βαθμοῦ.

Διέρρευσε περίπου ἕνα ἀκόμη ἔτος. Τὸν Αὔγουστον τοῦ 1536 ὁ Tartaglia κατεῖχεν ἕδραν εἰς Βενετίαν καὶ ἀνταποκρινόμενος εἰς ἐρώτημα κάποιου

* Παραπέμπομεν ἀκόμη εἰς τὰς δηλώσεις τὰς γενομένας τὸ 1541 εἰς Ventuorth καὶ ἀναφερομένας εἰς τὸ πρόβλημα XLII.

Vincenti (Πρόβλημα XXIII), προέτεινε τὴν ἔρευναν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν τετραγωνικήν του ρίζαν ηὐξημένην κατὰ 6 νὰ δίδῃ γινόμενον 100. Μὲ διάφορα δεδομένα ἐπιστρέφει εἰς τὸ ζήτημα ποὺ τοῦ ἐπρότεινε τὸ 1530 ὁ da Coi καί, ὅπως φαίνεται, τὸ ζήτημα παρέμεινε καὶ πάλιν ἄθικτον. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἰδίου ἔτους, ὁ da Coi μετέβη εἰς Βενετίαν καὶ τὴν 12ην Δεκεμβρίου προέτεινεν εἰς τὸν Tartaglia μερικὰ προβλήματα (Πρόβλημα XXV). Εἰς τὴν σχετικὴν ἀφήγησιν γίνεται ὑπαινιγμὸς ἐπίσης περὶ μιᾶς προγενεστέρας προκλήσεως, ἡ ὁποία εἶχε λάβει χώραν εἰς Brescia μεταξὺ Anton Maria Fior καὶ τοῦ Tartaglia καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ὁ Tartaglia ἔλυσεν ἐντὸς δύο μόνον ὡρῶν ὄχι ὀλιγώτερα τῶν τριάντα προταθέντων προβλημάτων. Αἱ σχετικαὶ ἐξισώσεις ἦσαν ὅλαι μερικαὶ περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως $x^3 + px = q$, τὴν ὁποίαν ὁ Fior ἐνόμιζεν ὅτι εἶχε λύσει δι' ἐφαρμογῆς ἑνὸς κανόνος, τὸν ὁποῖον τοῦ ἐδίδαξεν ἕνας μεγάλος μαθηματικὸς (μήπως ὁ Scipione dal Ferro;). Ἐξ ὅσων βεβαιώνει ὁ Tartaglia, ἀφοῦ ἔλυσε τ' ἀνωτέρω προβλήματα εἰς Βενετίαν τὴν 12ην Φεβρουαρίου 1535, ἐστράφη τὴν ἑπομένην εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $x^3 = px + q$.

Ὁ Tartaglia, ὑπὸ μορφὴν πάντοτε ἀνταποδόσεως, προέτεινεν εἰς τὸν Fior, μὲ τὴν ἀνωτέρω εὐκαιρίαν, ἄλλα 30 προβλήματα, τῶν ὁποίων ὅμως δὲν ἔλαβε τὰς λύσεις. Τεσσάρων ἐξ αὐτῶν διετήρησε τὴν ἐκφώνησιν (προβλ. XXV). Ἀναγράφομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐξισώσεις χρησιμοποιοῦντες τὸ γράμμα R ὡς δηλωτικὸν ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ :

$$x(\sqrt{x} + 40) = R, \qquad x(30 - \sqrt{x}) = R$$

$$x + 4\sqrt[3]{x} = 13, \qquad x - \sqrt[3]{x} = 10,$$

αἱ ὁποῖαι ἀνάγονται εὐκόλως εἰς τὰς ἀκολούθους μορφάς :

$$x^3 + px^2 = q, \qquad px^2 = q + x^3, \qquad x^3 + px = q, \qquad x^3 = px + q.$$

Ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia λέγει ὅτι εἶχε λύσει αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις ἀπὸ τοῦ 1530, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον φαίνεται νὰ εὑρίσκεται εἰς δυσαρμονίαν μὲ ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὴν τελευταίαν ἀπὸ τὰς στροφάς, ποὺ θ' ἀναφέρωμεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον.

216. Μέχρι τῆς στιγμῆς αὐτῆς ὁ Tartaglia εἶχεν ἀπέναντί του προσωπικότητας δευτέρας τάξεως. Ὀλίγον ἔπειτα ὅμως (πρόβλημα XXXI) εἰσέρχεται εἰς τὴν σκηνὴν ὁ Cardano, διὰ μιᾶς ἐπιστολῆς ὑπὸ χρονολογίαν 2 Ἰανουαρίου 1539, περισωθείσης μέσῳ ἑνὸς βιβλιοπώλου. Εἰς τὴν ἐπιστολὴν αὐτὴν ἀναφέρεται ὅτι ὁ διάσημος ἰατρὸς τοῦ Μιλάνου λαβὼν γνῶσιν τῆς ἐπιτυχίας τοῦ Tartaglia εἰς τὴν πρόκλησιν τοῦ Fior, ἡ ὁποία περιεστρέφετο

γύρω ἀπὸ ἐξισώσεις τοῦ μορφῆς $x^3 + px = q$, καὶ ἀποπερατώσας μίαν πλήρη ἀλγεβρικὴν πραγματείαν πρὸς δημοσίευσιν, ἐζήτει νὰ μάθῃ τὸν ἐφαρμοσθέντα κανόνα ἐπιλύσεως, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ τὸν δημοσιεύσῃ μὲ τὸ ὄνομα τοῦ ἐφευρέτου ἢ νὰ τὸν κρατήσῃ μόνον διὰ τὸν ἑαυτόν του. Ὁ Tartaglia ἀπήντησεν ἀρνούμενος νὰ παράσχῃ τὴν ζητουμένην πληροφορίαν, ὁ δὲ Cardano ἐζήτησε νὰ τοῦ δοθοῦν τοὐλάχιστον αἱ ἐκφωνήσεις τῶν τριάκοντα ἐκείνων προβλημάτων. Ἀλλ' οὔτε καὶ αὐτὴν τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ προσέφερεν ὁ Tartaglia, εἰς τὸν ὁποῖον τότε ὁ Cardano ἀπέστειλε τὰς ἐκφωνήσεις ὀκτὼ προβλημάτων, τῶν ὁποίων ὁ Tartaglia ἀνεγνώρισε τὴν ταυτότητα μὲ ἄλλα ποὺ τοῦ εἶχε προηγουμένως προτείνει ὁ da Coi. Κατόπιν δὲ νέων πιέσεων, ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia κατέληξε (28 Φεβρουαρίου 1559) νὰ τοῦ κοινοποιήσῃ τὰς ἐκφωνήσεις τῶν περιφήμων τριάκοντα προβλημάτων.

Ὁ Cardano εἰς μίαν ἄλλην ἐπιστολήν του τῆς 12ης Φεβρουαρίου 1559 ἐξέφρασε τὴν δυσαρέσκειάν του διὰ τὴν ἀποτυχίαν τῆς ἀποστολῆς τὴν ὁποίαν εἶχεν ἐμπιστευθῆ εἰς τὸν ἐκδότην του (πρόβλ. XXXII). Διὰ νὰ ἐκδικηθῇ λοιπὸν ἐστράφη ἐναντίον ἑνὸς χωρίου τῆς πυροβολικῆς τοῦ Tartaglia. Ὁ τελευταῖος ἀμυνόμενος (ἐπιστολὴ 18 Φεβρουαρίου 1539) ἔκαμε συγχρόνως κάποιαν μεταγενεστέραν προσθήκην εἰς τὰ προβλήματα ποὺ εἶχε προτείνει ὁ Fior, εἰς τὸν ὁποῖον ἀναγνωρίζεται ἡ ἰδιότης τοῦ ὑπολογιστοῦ «μεγάλης πείρας». Πολὺ μετριοπαθεστέρα καὶ συμφιλιωτικὴ εἶναι ἡ ἐπιστολή, τὴν ὁποίαν ἔγραψεν ὁ Cardano ὑπὸ χρονολογίαν 13 Μαρτίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Ἔπειτα ἀπὸ ἕνα χαρακτηρισμὸν ἐλάχιστα κολακευτικὸν διὰ τὸν da Coi, ὁ Cardano, πέραν τῆς ἐπιμονῆς του νὰ λάβῃ γνῶσιν τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Tartaglia, προσκαλεῖ τοῦτον νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν οἰκίαν του εἰς Μιλᾶνον διὰ νὰ γνωρισθῇ μὲ τὸν Μαρκήσιον del Vasto, θερμὸν φίλον τῶν ἐπιστημῶν καὶ προστάτην τοῦ Cardano.

Ἡ πρόσκλησις ἐγένετο δεκτή, εἰς τὸ ἔργον μάλιστα ποὺ ἐξετάζομεν (πρόβλ. XXXIV) περιλαμβάνεται ἡ ἀφήγησις τῶν διαμειφθέντων μεταξὺ τῶν δύο μαθηματικῶν εἰς τὸ Μιλᾶνον τὴν 25ην Μαρτίου 1539. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς συνομιλίας ὁ Cardano ἀνενέωσε τὴν παράκλησίν του, ὁρκισθεὶς νὰ μὴ κάμῃ λόγον εἰς κανένα περὶ τῶν ἀνακοινώσεων τούτων, τῶν ὁποίων θὰ ἐλάμβανε μόνον γνῶσιν μὲ ἀριθμούς, ἵνα μὴ δυνηθῇ κανεὶς νὰ ἀντιληφθῇ τὴν σημασίαν των. Ὁ Tartaglia κατέληξε νὰ ὑποχωρήσῃ, διαλαμβάνων τὴν ἀνακάλυψίν του εἰς μίαν σειρὰν στίχων, ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται νὰ προκύπτῃ, ὅτι διὰ νὰ λάβῃ μίαν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως $x^3 + px = q$ προέβαινεν εἰς ἀντικατάστασιν τοῦ ἀγνώστου μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων, ὅπως ἀκριβῶς συνηθίζεται μέχρι σήμερον. Παραθέτομεν ἐδῶ μερικοὺς ἀπὸ τοὺς τελευταίους στίχους, εἰς ἐλευθέραν μετάφρασιν :

«Τὰ βρῆκα ὅλ' αὐτά, καμμιὰ ἑκατοστή,
μὲ βῆμα ὄχι ἀργό, μὲ θέμελα γερὰ
καὶ τολμηρά, στὴ θαλασσοκρατοῦσα,
τὸ χίλια πεντακόσια τριάντα τέσσερα».

217. Ὁ Cardano, ἀφοῦ ἔλαβε γνῶσιν, ἴσως δὲ καὶ ἀντίγραφον τοῦ στιχουργήματος τοῦ Tartaglia, ἐπανέλαβε τὰς προσπαθείας του. Ἀλλ' ἐπανερχόμενος μὲ νέαν ἐπιστολὴν (9 Ἀπριλίου 1539) ὁμολογεῖ, ὅτι δὲν κατώρθωσε νὰ ἐπιτύχῃ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $x^3 + 3x = 10$. Ὁ Tartaglia, ἂν καὶ ἐξεδήλωσε κάποιαν ἀνησυχίαν διὰ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐνήργει ὁ Cardano, ἐξέθεσε ἐν ἐκτάσει τὴν σχετικὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος του. Ἐὰν ἀνατρέξωμεν εἰς δύο ἐπιστολάς, τὰς ὁποίας ἀντήλλαξαν οἱ δύο μαθηματικοὶ ὀλίγον μετέπειτα (12 καὶ 17 Μαΐου 1539), καίτοι ξένας πρὸς τὸ ἐπίμαχον θέμα, θὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ καχυποψίαι περὶ κακῆς πίστεως, αἱ ὁποῖαι ἐγεννήθησαν εἰς τὸν Tartaglia, ὠξύνθησαν ἐν συνεχείᾳ (ἐπιστολαὶ 10 καὶ 19 Ἰουλίου 1539) ἀπὸ τὴν πληροφορίαν, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ἀπὸ κάποιον διδάσκαλον Mafio Poncini, ὅτι ὁ ἐκ Μιλάνου μαθηματικὸς κατεγίνετο μὲ τὴν συγγραφὴν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἔργου σχετικοῦ ἀκριβῶς μὲ τὰς τριτοβαθμίους ἐξισώσεις. Τὸ γεγονὸς τοῦτο δίδει ἐξήγησιν εἰς τὴν ὄχι τόσον φιλόφρονα ἀπάντησιν, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν ὁ Tartaglia εἰς ἐρώτησιν τοῦ Cardano (ἐπιστολὴ 4 Αὐγούστου 1539) περὶ τῆς ἐξισώσεως $x^3 = 9x + 10$, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὴν ἀνεπίδεκτον ἀναγωγῆς περίπτωσιν. Ὁ Cardano ἐφάνη μνησικακῶν (ἐπιστολὴ 18ης Ὀκτωβρίου 1539). Παρὰ ταῦτα ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν τοῦ Tartaglia ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $x^3 = 12x + 20$, ὁ τελευταῖος ὅμως ἠρνήθη νὰ τὸν ἀκολουθήσῃ, προσάγων ὡς δικαιολογίαν τὴν ἀνεπάρκειαν τῶν μέτρων, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὁ Cardano πρὸς προστασίαν τῶν ἀνακαλύψεών του. Τοιουτοτρόπως ἡ ψυχρότης εἰς τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο μαθηματικῶν ἐγίνετο ὁλοὲν ἐντονωτέρα. Εἰς τὴν πληροφορίαν ποὺ ἔδωσεν ὁ Cardano (ἐπιστολὴ 5ης Ἰανουαρίου 1540), ὅτι ὁ da Coi ἐκαυχᾶτο διὰ τὴν ἀνακάλυψιν μεθόδων λύσεως τῶν ἐξισώσεων $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, καθ' ἣν στιγμὴν ὁ Tartaglia διεφιλονίκει μὲ τὸν Fior, ὁ Tartaglia ἀπήντησεν ὅτι δὲν ἐπεθύμει πλέον καμμίαν ἐπαφὴν οὔτε μὲ τὸν Cardano οὔτε μὲ τὸν da Coi. Καὶ πράγματι ἡ ἀλληλογραφία μεταξὺ τῶν δύο ἐπιστημόνων δὲν ἔλαβεν ἔκτοτε συνέχειαν. Ἐν τούτοις μερικαὶ μεταγενέστεραι πληροφορίαι σχετικαὶ μὲ τὰς τριτοβαθμίους ἐξισώσεις περιέχονται εἰς τὸ τελευταῖον τῶν προβλημάτων, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἀπαντῶνται ἐκεῖ αἱ ἀπαντήσεις καὶ τὰ ἐρωτήματα, ποὺ ἀπηύθυνεν εἰς τὸν Tartaglia ὁ ἐπίλεκτος μαθητής του Ventuorth, ὁ ὁποῖος εὑρίσκετο εἰς τὰς παραμονὰς τῆς ἀναχωρήσεώς του διὰ τὴν πατρίδα του Ἀγγλίαν. Τὰ ζητήματα τὰ ὁποῖα διετύπωσεν ὁ βρεττανὸς εὐπατρίδης ἀφοροῦν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $x^3 + px^2 = q$.

Ὁ Tartaglia φαίνεται ὅτι ἐπέτυχε τὴν λύσιν των κατὰ τὴν νύχτα τοῦ Ἁγίου Μαρτίνου τοῦ 1536, ἀπέφυγεν ὅμως ν' ἀνακοινώση τὴν μέθοδόν του, μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ τὴν ἐκθέση εἰς ἕνα μέγα ἔργον ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον ἐσχεδίαζε νὰ συγγράψη. Περιωρίσθη εἰς μίαν ἐφαρμογήν της ἐπὶ κάποιας εἰδικῆς περιπτώσεως. Κατόπιν ἀνεφέρθη εἰς τὰς τρεῖς μορφὰς $x^3 = px^2 + q$, $x^3 + px^2 = q$, $x^3 + q = px^2$, ὡς ἐπίσης εἰς τὰς γενικὰς ἐξισώσεις καὶ τέλος ἐσημείωσε τὴν δυνατότητα ἀναγωγῆς εἰς δεύτερον βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων $x^6 = px^3 + q$, $x^6 + qx^3 = q$, $x^6 + q = qx^3$, χωρὶς νὰ παρατηρήση ὅτι μεταβαλλομένων τῶν ἐκθετῶν 3 εἰς 2 προκύπτουν ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τριτοβαθμίους.

Αἱ Προκλήσεις τῆς μαθηματικῆς μονομαχίας *

218. Ἡ κατηγορία περὶ κακῆς πίστεως τοῦ Cardano ἔναντι τοῦ Tartaglia, τὴν ὁποίαν διετύπωσεν ὁ δεύτερος κατὰ τοῦ πρώτου, δὲν ἦτο δυνατὸν ν' ἀφήση τὸν Cardano ἀδιάφορον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ κοινωνικὴ καὶ ὑπαλληλικὴ του θέσις δὲν τοῦ ἐπέτρεπε νὰ φιλονικήση κατ' εὐθεῖαν μὲ τὸν Tartaglia, τὴν ὑπεράσπισίν του ἀνέλαβεν ὁ μαθητής του Ludovico Ferrari. Αὐθορμήτως; Αὐτὸ ἐβεβαίωνε κατ' ἐπανάληψιν ὁ Ferrari· ὁ Tartaglia ὅμως οὐδέποτε τὸ ἐπίστευσε καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὰ πολεμικά του κείμενα θεωρεῖ πάντοτε τὸν Ferrari ὡς φερέφωνον τοῦ διδασκάλου του, εἴτε διότι αὐτὴ ἦτο ἡ πεποίθησίς του, εἴτε διότι, μὲ τὸ διαλεκτικὸν αὐτὸ τέχνασμα, ἔφερεν εἰς ἀγανάκτησιν τὸν ἀντίπαλόν του.

Τὴν 10ην Φεβρουαρίου 1547, ὁ Ferrari ἐξαπέλυσεν ἀπὸ τὸ Μιλᾶνον τὴν Πρώτην Πρόκλησιν εἰς μονομαχίαν (Io Cartello di sfida) πρὸς τὸν Tartaglia, εἰς τὴν ὁποίαν ἀφοῦ ὑπογραμμίζει τὴν ἀμοιβαίαν συμπεριφορὰν τῶν δύο ἀντιπάλων, ὡς καὶ τὰ σφάλματα, μὲ τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν γνώμην του βρίθει τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Quesiti et inventioni diverse (Διάφοροι ἔρευναι καὶ ἐφευρέσεις) βιβλίον τοῦ Tartaglia, προέτεινεν εἰς τὸν συγγραφέα «νὰ συζητήση κατ' ἀντιπαράστασιν μὲ αὐτὸν εἰς κατάλληλον τόπον καὶ ἐνώπιον ἁρμοδίων κριτῶν ἐπὶ θεμάτων τῶν κλάδων γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ ὅλων τῶν ἄλλων οἱ ὁποῖοι ὑπάγονται ἢ ἐξαρτῶνται ἀπὸ αὐτούς», δηλῶν συγχρόνως, ὅτι ἦτο ἕτοιμος νὰ καταθέση εἰς ἀσφαλεῖς

* Αἱ πρῶται ἄξιαι προσοχῆς εἰδήσεις ἐπὶ τῶν σημαντικωτάτων αὐτῶν τεκμηρίων ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Fantuzzi (Notizie degli scrittori bolognesi, Bologna, 1781 - 90) εἰς ἕνα παράρτημα τοῦ ἄρθρου τοῦ σχετικοῦ μὲ τὸν dal Ferro. Διεξοδικώτεραι λεπτομέρειαι εὑρίσκονται εἰς τὸ ὑπόμνημα τοῦ S. Gherardi : Di alcuni materiali per la storia della Facoltà matematica nell' antica Università di Bologna, (Annali delle Sc. nat. Ser. II, t. V., 1846). Ἐπηκολούθησεν ἡ πλήρης δημοσίευσις τῶν Προκλήσεων, τὴν ὁποίαν ἀναφέρομεν εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ Κεφαλαίου τούτου.

Ὁ Tartaglia φαίνεται ὅτι ἐπέτυχε τὴν λύσιν των κατὰ τὴν νύχτα τοῦ Ἁγίου Μαρτίνου τοῦ 1536, ἀπέφυγεν ὅμως ν' ἀνακοινώση τὴν μέθοδόν του, μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ τὴν ἐκθέση εἰς ἕνα μέγα ἔργον ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον ἐσχεδίαζε νὰ συγγράψη. Περιωρίσθη εἰς μίαν ἐφαρμογήν της ἐπὶ κάποιας εἰδικῆς περιπτώσεως. Κατόπιν ἀνεφέρθη εἰς τὰς τρεῖς μορφὰς $x^3 = px^2 + q$, $x^3 + px^2 = q$, $x^3 + q = px^2$, ὡς ἐπίσης εἰς τὰς γενικὰς ἐξισώσεις καὶ τέλος ἐσημείωσε τὴν δυνατότητα ἀναγωγῆς εἰς δεύτερον βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων $x^6 = px^3 + q$, $x^6 + qx^3 = q$, $x^6 + q = qx^3$, χωρὶς νὰ παρατηρήση ὅτι μεταβαλλομένων τῶν ἐκθετῶν 3 εἰς 2 προκύπτουν ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τριτοβαθμίους.

Αἱ Προκλήσεις τῆς μαθηματικῆς μονομαχίας *

218. Ἡ κατηγορία περὶ κακῆς πίστεως τοῦ Cardano ἔναντι τοῦ Tartaglia, τὴν ὁποίαν διετύπωσεν ὁ δεύτερος κατὰ τοῦ πρώτου, δὲν ἦτο δυνατὸν ν' ἀφήση τὸν Cardano ἀδιάφορον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ κοινωνικὴ καὶ ὑπαλληλικὴ του θέσις δὲν τοῦ ἐπέτρεπε νὰ φιλονικήση κατ' εὐθεῖαν μὲ τὸν Tartaglia, τὴν ὑπεράσπισίν του ἀνέλαβεν ὁ μαθητής του Ludovico Ferrari. Αὐθορμήτως; Αὐτὸ ἐβεβαίωνε κατ' ἐπανάληψιν ὁ Ferrari· ὁ Tartaglia ὅμως οὐδέποτε τὸ ἐπίστευσε καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὰ πολεμικά του κείμενα θεωρεῖ πάντοτε τὸν Ferrari ὡς φερέφωνον τοῦ διδασκάλου του, εἴτε διότι αὐτὴ ἦτο ἡ πεποίθησίς του, εἴτε διότι, μὲ τὸ διαλεκτικὸν αὐτὸ τέχνασμα, ἔφερεν εἰς ἀγανάκτησιν τὸν ἀντίπαλόν του.

Τὴν 10ην Φεβρουαρίου 1547, ὁ Ferrari ἐξαπέλυσεν ἀπὸ τὸ Μιλᾶνον τὴν Πρώτην Πρόκλησιν εἰς μονομαχίαν (I° Cartello di sfida) πρὸς τὸν Tartaglia, εἰς τὴν ὁποίαν ἀφοῦ ὑπογραμμίζει τὴν ἀμοιβαίαν συμπεριφορὰν τῶν δύο ἀντιπάλων, ὡς καὶ τὰ σφάλματα, μὲ τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν γνώμην του βρίθει τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Quesiti et inventioni diverse (Διάφοροι ἔρευναι καὶ ἐφευρέσεις) βιβλίον τοῦ Tartaglia, προέτεινεν εἰς τὸν συγγραφέα «νὰ συζητήση κατ' ἀντιπαράστασιν μὲ αὐτὸν εἰς κατάλληλον τόπον καὶ ἐνώπιον ἁρμοδίων κριτῶν ἐπὶ θεμάτων τῶν κλάδων γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ ὅλων τῶν ἄλλων οἱ ὁποῖοι ὑπάγονται ἢ ἐξαρτῶνται ἀπὸ αὐτούς», δηλῶν συγχρόνως, ὅτι ἦτο ἕτοιμος νὰ καταθέση εἰς ἀσφαλεῖς

* Αἱ πρῶται ἄξιαι προσοχῆς εἰδήσεις ἐπὶ τῶν σημαντικωτάτων αὐτῶν τεκμηρίων ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Fantuzzi (Notizie degli scrittori bolognesi, Bologna, 1781 - 90) εἰς ἕνα παράρτημα τοῦ ἄρθρου τοῦ σχετικοῦ μὲ τὸν dal Ferro. Διεξοδικώτεραι λεπτομέρειαι εὑρίσκονται εἰς τὸ ὑπόμνημα τοῦ S. Gherardi : Di alcuni materiali per la storia della Facoltà matematica nell' antica Università di Bologna, (Annali delle Sc. nat. Ser. II, t. V., 1846). Ἐπηκολούθησεν ἡ πλήρης δημοσίευσις τῶν Προκλήσεων, τὴν ὁποίαν ἀναφέρομεν εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ Κεφαλαίου τούτου.

χεῖρας 200 σκοῦδα, προωρισμένα διὰ τὸν νικητήν. Ἡ ἀπάντησις ἔπρεπε νὰ δοθῇ ἐντὸς προθεσμίας τριάκοντα ἡμερῶν.

Ἡ ἀπάντησις δὲν ἐχρειάσθη μακρὰν ἀναμονήν. Φέρει χρονολογίαν 19 Φεβρουαρίου 1547, ἐστάλη ἐκ Βενετίας καὶ εἶναι συντεταγμένη εἰς ὕφος ὄχι ὀλιγώτερον δριμὺ καὶ βίαιον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον εἶχεν υἱοθετήσει ὁ Ferrari. Ὁ Tartaglia ἠρνήθη νὰ διαγωνισθῇ μὲ τὸν Ferrari, ὡς μὴ ἔχων μετ' αὐτοῦ ἀντιδικίαν, ἀλλ' ἐδήλωσεν ὅτι ἦτο διατεθειμένος νὰ τὸ κάμῃ, ἐὰν τὰ σχετικὰ πρακτικὰ προσυπεγράφοντο καὶ ἀπὸ τὸν Cardano. Ἀκολουθοῦν ἄλλαι λεπτομέρειαι ἐπὶ τῆς διεξαγωγῆς τοῦ ἀγῶνος. Μεταξὺ τούτων περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν τὴν ἀπαίτησιν, ὅπως τὰ προβλήματα καὶ αἱ λύσεις των ἐκτεθοῦν ὄχι προφορικῶς ἀλλὰ διὰ τοῦ τύπου, ἀκόμη δὲ τὴν δήλωσιν τοῦ Tartaglia, ὅτι ἦτο ἕτοιμος νὰ καταθέσῃ εἰς χεῖρας ἀξιοπίστου προσώπου ἕνα ποσὸν καθοριστέον ἀπὸ κοινοῦ.

Ἡ Δευτέρα Πρόκλησις (II° Cartello) τοῦ Ferrari εἶναι κατὰ πολὺ μακροτέρα καὶ ἔχει γραφῆ εἰς τὴν Λατινικήν, μὲ τὴν πονηρὰν ἀσφαλῶς πρόθεσιν νὰ θέσῃ εἰς ἀμηχανίαν τὸν ἀντίπαλον, ὁ ὁποῖος, ὅπως ἦτο εὐρύτατα γνωστόν, εἶχεν ἐλλιπῆ φιλολογικὴν κατάρτισιν. Ἡ Πρόκλησις πάντοτε ἐκ Μιλάνου, φέρει χρονολογίαν καλενδῶν τοῦ Ἀπριλίου 1547, μεταξὺ δὲ ὑβριστικῶν καὶ ἐριστικῶν λόγων, περιλαμβάνει καὶ μίαν πληροφορίαν, ἡ ὁποία ἐνῷ ἐδόθη πρὸς ταπείνωσιν τοῦ Tartaglia, παρουσιάζει ἀπὸ ἱστορικῆς ἀπόψεως μέγιστον ἐνδιαφέρον: ὅτι δηλαδὴ ὁ Cardano, κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς ταξιδίου μὲ τὸν Ferrari ἀπὸ Μιλάνου εἰς Φλωρεντίαν, ἔκαμε μίαν στάσιν κατὰ τὸ 1542 εἰς Βολωνίαν, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ὁ Annibale della Nave ἀνεκοίνωσε τὸ μικρὸν ἔργον τοῦ Scipione dal Ferro, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται κατὰ τρόπον κομψὸν καὶ πλήρη ἡ λύσις τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Τοιουτοτρόπως ἐτίθετο ἐν ἀμφιβόλῳ ἡ προτεραιότης τοῦ Tartaglia, ἀλλ' ἀπεκαλύπτετο μία οὐσιώδης λεπτομέρεια, τὴν ὁποίαν ὁ Cardano εἶχε ζηλοτύπως ἀποκρύψει διὰ λόγους προφανεῖς. Μικροτέρας σημασίας ἀλλ' ἐπίσης ἄξιον ἐξάρσεως εἶναι τὸ γεγονός, ποὺ ἀφηγεῖται ἐπίσης ὁ Ferrari, ὅτι οὗτος παρίστατο εἰς τὴν συνομιλίαν, ἡ ὁποία ὡς εἴδομεν ἔλαβε χώραν εἰς Μιλᾶνον (§ 216) μεταξὺ Cardano καὶ Tartaglia.

Ἡ ἀπάντησις, ἂν καὶ μακροτάτη, ἐδόθη ταχύτατα διὰ τοῦ τύπου τὴν 21 Ἀπριλίου 1547. Ἀποκαλύπτονται δὲ εἰς αὐτὴν μερικαὶ λεπτομέρειαι ἐκ τῶν ὁποίων ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ Cardano ἐνδιεφέρετο προσωπικῶς διὰ τὴν διένεξιν, τῆς ὁποίας πράγματι οὗτος ἐμφανίζεται ὡς ὁ ἀπόκρυφος συντελεστὴς καὶ γίνεται εὐρὺς λόγος ἐπὶ τῶν ὅρων, βάσει τῶν ὁποίων ἐπρόκειτο ν' ἀπαγγελθῇ ἡ κρίσις. Σημειοῦμεν μόνον ὅτι ὁ Tartaglia ἐπιμένει

ἐπὶ τῆς προτάσεως νὰ εἶναι κριταί του ὄχι μόνον ὁ Cardano καὶ ὁ Ferrari, ἀλλὰ καὶ οἱ μαθηματικοὶ ὅλου τοῦ κόσμου. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὴν τὴν ἀπάντησιν προσλαμβάνει μεγίστην σπουδαιότητα ἀπὸ ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως εἶναι ὅτι ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia τερματίζει τὸ κείμενόν του προτείνων εἰς τοὺς ἀντιπάλους του 31 προβλήματα, τῶν ὁποίων θὰ δώσωμεν τὰ χαρακτηριστικά, ἀφοῦ κάμωμεν τὴν παρατήρησιν ὅτι δὲν ὑπερβαίνουν τὴν στάθμην ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο ἡ ἐπιστήμη κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Luca Pacioli. Δεκαεπτὰ ἐξ αὐτῶν ἀναφέρονται εἰς κατασκευὰς μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, θέμα καλλιεργηθὲν ὅπως εἴδομεν ἤδη ὑπὸ τῶν Ἀράβων (Τόμος I, § 146), τοῦ A. Dürer, ἴσως δὲ ἀκόμη (§ 207) καὶ τοῦ Scipione dal Ferro. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπογραμμίσωμεν ἐδῶ μίαν διαφορὰν μεταξὺ τῶν ἀραβικῶν λύσεων καὶ ἐκείνων ποὺ ὀφείλονται εἰς μαθηματικούς, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ παρὸν Κεφάλαιον. Ἡ ἐν λόγῳ διαφορὰ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι οἱ Ἄραβες ἐχρησιμοποίουν εἰς ἕκαστον πρόβλημα ἄνοιγμα διαβήτου ὄχι αὐθαίρετον, ἀλλὰ ὑπαγορευόμενον ἀπὸ τὰς ἰδιαιτέρας συνθήκας ἑκάστης περιπτώσεως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συχνὰ διηυκόλυνε τὴν κατασκευήν. Τοὐναντίον οἱ ἰταλοὶ γεωμέτραι ἐστηρίζοντο ἐπὶ τῆς προϋποθέσεως, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ διαβήτου ἔπρεπε νὰ εἶναι πάντοτε ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ ἐξεταζόμενα προβλήματα, ἐμπνεόμενοι προφανῶς ἀπὸ σκέψεις καθαρῶς θεωρητικάς.

Ὁ Tartaglia προτείνει ἰδιαιτέρως νὰ λυθοῦν (προβλήματα 1 - 10) μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν αἱ προτάσεις, αἱ ὁποῖαι εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου φέρουν τὰς ἀκολούθους ἐνδείξεις : III, 17· VI, 25, 28, 29· X, 31, 32, 33· XII, 18. Προτείνει κατόπιν νὰ λυθοῦν ὁμοίως (11 - 13) μερικὰ προβλήματα μὲ τὰ ὁποῖα ἠσχολήθη ὁ Πτολεμαῖος καὶ τέλος (15 - 17) νὰ κατασκευασθοῦν κατὰ τρόπον ἀνάλογον αἱ ἐφαπτόμεναι κωνικῶν τομῶν εἰς περιπτώσεις ἐξετασθείσας ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. Ἡ Γεωγραφία τοῦ Πτολεμαίου δίδει τὴν ὕλην εἰς τὰ προβλήματα 18 ἕως 20, τὰ ὁποῖα ἀκολουθεῖ ἄλλο ἀποβλέπον εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἡμικανονικοῦ στερεοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ περιγραφὴ ἐδίδετο εἰς τὸ ἔργον Divina Proportione τοῦ πατρὸς Luca. Τὰ ὑπόλοιπα προβλήματα εἶναι καθαρῶς πρακτικά, ἔχοντα ὡς σκοπὸν τὴν ἐξαγωγὴν ριζῶν ἀριθμῶν ἢ πολυωνύμων ἐχόντων τὴν μορφὴν ριζικῶν διαφόρων εἰδῶν.

219. Ὁ σεβασμὸς πρὸς τοὺς ἀναγνώστας μας ἀπαγορεύει νὰ μεταφέρωμεν ἐδῶ τὰς χυδαίας ὕβρεις, ἐκ τῶν ὁποίων βρίθει τὸ νέον δημοσίευμα τοῦ Ferrari ὑπὸ χρονολογίαν 24 Μαΐου 1547. Θὰ τονίσωμεν μόνον τὴν ἐπανάληψιν τῶν προγενεστέρων προτάσεων ἐν σχέσει πρὸς τὴν διαδικασίαν τοῦ διαγωνισμοῦ, τὴν ἀπουσίαν λύσεων εἰς τὰ ὑπὸ τοῦ Tartaglia προταθέντα

προβλήματα, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν παρουσίαν ἰσαρίθμων νέων προβλημάτων προσφερομένων εἰς τὸν ἀντίπαλον. Τά προβλήματα αὐτὰ εἶναι ὑψηλοτέρου ἐπιπέδου συγκρινόμενα πρὸς τὰ προταθέντα ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Brescia. Ἕνα μάλιστα ἐξ αὐτῶν εἶναι τόσον ὑψηλῆς στάθμης, ὥστε κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ὑπερέβαινε τὰς δυνάμεις τοῦ προτείνοντος. Ἐν τῷ συνόλῳ, τὰ προβλήματα αὐτὰ προδίδουν τὰς μεγάλας προσπαθείας ποὺ κατέβαλεν ὁ Ferrari διὰ νὰ φθάσῃ τὸν ἀριθμὸν 31, εἰς τὸν ὁποῖον εἶχε σταματήσει ὁ ἀντίπαλος. Ἂς ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις τῶν σημαντικωτέρων ἐξ αὐτῶν. Τὸ δεύτερον ἐκ τῶν προτεινομένων προβλημάτων ζητεῖ ν' ἀποδειχθῇ στοιχειωδῶς, τουτέστι μὲ τὰ μέσα ποὺ περιέχονται εἰς τὸν Εὐκλείδην, οὐχὶ δὲ εἰς τὸν Ἀρχιμήδην καὶ τὸν Ἀπολλώνιον, ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων ὁ κύκλος ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν. Εἰς τὸ 18ον ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ «ἐκτενῶς»* ἡ ἰσότης τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τυχόντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου (Σ τ ο ι χ ε ῖ α, Βιβλ. Ι, 6). Εἰς τὸ 22ον ζητεῖται ἀπὸ τὸν Tartaglia νὰ κατασκευάσῃ τὸ σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἕνα χωρίον ἀπὸ τὸν Τ ί μ α ι ο ν τοῦ Πλάτωνος, ἐνῷ εἰς τὸ 30ον ζητεῖται ἡ ὁριστικὴ ἄρσις τῆς ἀμφιβολίας κατὰ πόσον ἡ μονὰς εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἀριθμός. Παρατρέχομεν τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἀντικείμενον τὴν κατασκευὴν σχημάτων ἀνταποκρινομένων εἰς χωρία τοῦ Βιτρουβίου (10ον καὶ 28ον) καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους (31ον) ἢ τὴν ἐξήγησιν τῆς λειτουργίας τῶν ἀστρολάβων (13ον, 20όν, 25ον). Ἀντ' αὐτῶν θεωροῦμεν σκοπιμώτερον νὰ ἐξάρωμεν τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται εἰς ἐξισώσεις τρίτου βαθμοῦ (1ον, 3ον, 15ον, 23ον, 24ον) ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ (27ον), καθόσον εἶναι ἀσυγκρίτως σημαντικώτερα ἄλλων ἀναγομένων εἰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις (12ον, 14ον). Ἄξια μνείας εἶναι ἐκεῖνα τὰ προβλήματα (6ον, 29ον), τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ πενταγώνου εἰς τρίγωνον ἰσόπλευρον. Ζωηροτέραν ὅμως ἐντύπωσιν προκαλεῖ ἡ ἀνάγνωσις τοῦ ὑπ' ἀριθμὸν 17 προβλήματος, διὰ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενόν των ἐπὶ τὴν διαφοράν των νὰ προκύπτῃ μέγιστον**.

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὴν III Π ρ ό κ λ η σ ι ν δὲν ἐχρειάσθη πολὺν χρόνον διὰ νὰ δοθῇ. Φέρει χρονολογίαν 23 Ἰουνίου 1547, ἡ δὲ ἐκτύπωσίς της ἐπερατώθη τὴν 9ην τοῦ ἑπομένου μηνὸς Ἰουλίου. Θ' ἀπαλλάξωμεν τὸν ἀναγνώστην ἀπὸ τὸ πολεμικὸν μέρος τῆς Προκλήσεως, τὸ ὁποῖον θὰ εἶχε μᾶλλον θέσιν εἰς μίαν ἀνθολογίαν δικηγορικῶν σοφιστικῶν ἢ ὑβριστικῶν φρά-

---

* Εἰς ἕνα χωρίον τῆς Προκλήσεως V, ὁ Ferrari ἐδήλωνεν ὅτι μὲ τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν ἤθελε νὰ τονίσῃ ὅτι δὲν ἔπρεπε νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

** Ἀσφαλῶς δὲν θὰ διαφύγῃ τῆς προσοχῆς τοῦ ἀναγνώστου ἡ ἀναλογία τοῦ προβλήματος τούτου πρὸς ἄλλα ποῦ συνηντήσαμεν εἰς τὸν Cardano (§ 212).

σεων, παρὰ εἰς ἕνα ἔργον προωρισμένον νὰ δώσῃ πληροφορίας ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῶν μαθηματικῶν ἰδεῶν. Ἂς σταματήσωμεν μᾶλλον εἰς τὸ μέρος ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ὀνομασθῇ πράγματι θεωρητικόν, διότι περιλαμβάνει ἀπαντήσεις εἰς τὰ 26 τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰ 31 προταθέντα προβλήματα, μὴ ἐξαιρουμένων τῶν προβλημάτων φιλοσοφικοῦ χαρακτῆρος. Τὸ λυπηρὸν εἶναι ὅτι ὁ Tartaglia παρέλειψε τὰ προβλήματα ἀκριβῶς ἐκεῖνα, ποὺ ἀνάγονται εἰς τριτοβαθμίους ἐξισώσεις καὶ οὕτω μᾶς ἐστέρησε μεταγενεστέρας διαφωτίσεως ἐπὶ τοῦ σπουδαίου αὐτοῦ θέματος. Ὁ Tartaglia ἐπισημαίνει ἐπίσης μὲ ζωηρότητα, ὄχι ἀδικαιολόγητον, τὸ γεγονὸς ὅτι μερικαὶ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων τοῦ Ferrari παρουσιάζουν ἀτελείας, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζει ὡς ἐπιμέμπτους παγίδας καὶ τὰς καταδικάζει ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀριστοτελικοῦ ἀξιώματος «qui litigatorie interrogat prave disputat» (ὁ παραπειστικῶς ἐρωτῶν πονηρῶς διαλογίζεται).

Τὸ τρίτον ἐκ τῶν προταθέντων προβλημάτων ἀνάγει ὁ Tartaglia εἰς τὸ Δήλιον πρόβλημα, διὰ ν' ἀποδείξῃ δὲ «ἐκτενῶς» τὴν πρότασιν 6 τοῦ Βιβλίου I τοῦ Εὐκλείδου, περιγράφει ἕνα κύκλον εἰς τὸ δοθὲν ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Τότε ἡ ἰσότης τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως ἀπορρέει ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν δύο τόξων κύκλου, τὰ ὁποῖα ὑποτείνουν ἴσαι χορδαί. Ὁ ἀντίπαλος ὅμως δὲν ἔμεινε ἱκανοποιημένος, ἐπειδὴ ὁ Tartaglia ἐστηρίχθη εἰς προτάσεις, τὰς ὁποίας ὁ Εὐκλείδης ἀποδεικνύει μετὰ τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα. Εἰς τὴν ἰδίαν III Πρόκλησιν περιλαμβάνεται ἀκόμη τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, νὰ χωρισθῇ ἑκατέρα οὕτως, ὥστε τὰ μέρη τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἡ πρώτη καὶ ἡ τετάρτη, τὰ δὲ μέρη τῆς δευτέρας νὰ εἶναι ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη τεσσάρων συνεχῶν ἀναλόγων». Τὸ πρόβλημα λύεται εὐκόλως· τοῦτο ὅμως διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ Tartaglia, ὁ ὁποῖος ἀπέκρυψε τὴν ἄγνοιάν του μὲ μίαν μακρὰν φλυαρίαν, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι ἐθεώρει τὸ ζήτημα τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Δήλιον πρόβλημα, ἀποφαινόμενος κατ' ἀκολουθίαν ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ λυθῇ μηχανικῶς. Ἐπ' αὐτοῦ ἐπανῆλθεν ὁ Tartaglia εἰς τὸ III Βιβλίον τοῦ συγγράμματός του General trattato (Γενικὴ πραγματεία), δίδων βεβαίως καὶ τὴν ἀκριβῆ λύσιν, χωρὶς ὅμως νὰ ὁμολογῇ τὴν προηγηθεῖσαν ἀστοχίαν του.

Ἐπειδὴ ὁ χῶρος δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάμωμεν πλήρη ἀνάλυσιν τῆς ἀπαντήσεως τοῦ Tartaglia, περιοριζόμεθα μόνον νὰ σημειώσωμεν τὴν λύσιν, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν εἰς τὸ ἀριθμητικὸν πρόβλημα ἀναζητήσεως μεγίστου, τοῦ ὁποίου προβλήματος τὴν ἐκφώνησιν κατεχωρήσαμεν ἀνωτέρω. Ὁ Tartaglia βεβαιώνει μὲ πλήρες δίκαιον, ὅτι τὰ δύο ζητούμενα μέρη τοῦ 8 εἶναι,

$$4+\sqrt{\frac{16}{3}}, \quad 4-\sqrt{\frac{16}{3}}.$$

Τὸ λυπηρὸν εἶναι ὅτι τὸ ἐξαγόμενον δὲν συνοδεύεται εἰς τὴν ἀπάντησιν

μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀκριβείας του εἰς τρόπον, ὥστε ἐδόθη εἰς τὸν Ferrari ἡ εὐχέρεια νὰ ἰσχυρισθῇ ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν ἐλύθη. Ἡ ἀπόδειξις ἐδόθη μετέπειτα ἀπὸ τὸν Tartaglia εἰς τὴν Γενικὴν Πραγματείαν (Μέρος V, σελὶς 88, Βενετία 1560) καὶ ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ οὐσιαστικὴ ταυτότης τοῦ χρησιμοποιηθέντος συλλογισμοῦ μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἐφήρμοσεν ὁ Ἀρχιμήδης, διὰ ν' ἀποδείξῃ, εἰς τὸ ἔργον του Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (Βιβλίον II, πρότασις IX), ὅτι τὸ ἡμισφαίριον εἶναι τὸ μέγιστον ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσας ἐπιφανείας. Ὅτι ὁ Tartaglia ἐκυριεύθη ἀπὸ ὑπερηφάνειαν διὰ τὸ εὕρημά του προδίδεται ἀπὸ τὰς λέξεις μὲ τὰς ὁποίας τερματίζει τὸ κείμενόν του: «ἐὰν κανεὶς ἀμφιβάλλῃ ἂς κάμῃ τὴν ἐπαλήθευσιν».

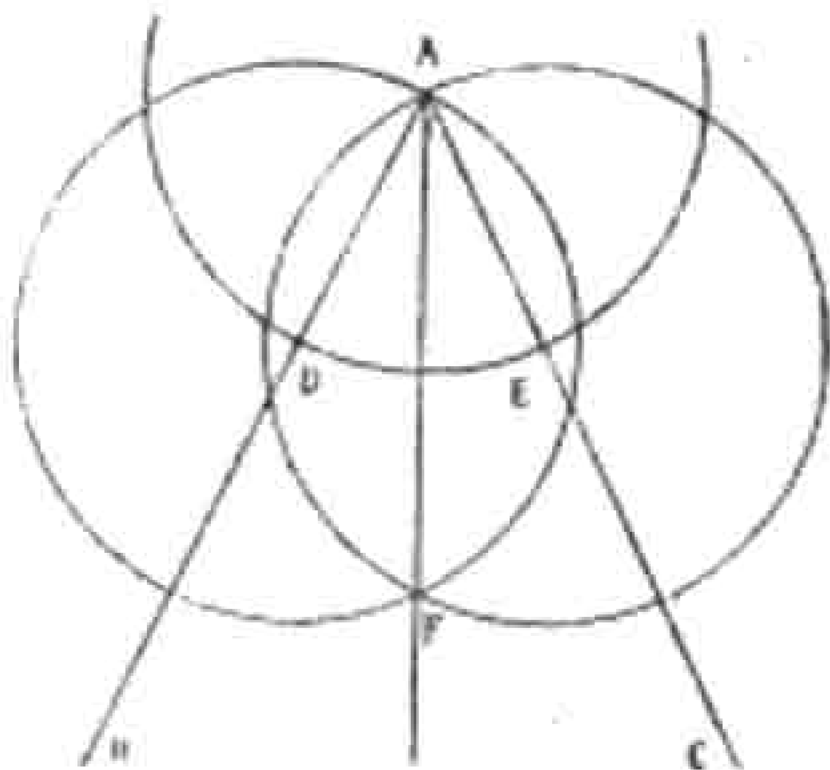
220. Δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὴν IV Πρόκλησιν ποὺ ἐδημοσίευσεν ὁ Ferrari τὴν 10ην Αὐγούστου 1574, οὔτε εἰς τὴν ἀπάντησιν τὴν δοθεῖσαν ἀπὸ τὸν Tartaglia τὴν 30ὴν τοῦ ἰδίου μηνός, διότι δὲν περιέχουν παρὰ φιλονικίας καὶ ὕβρεις. Περιοριζόμεθα μόνον νὰ τονίσωμεν, ὅτι ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia, ἀποτεινόμενος πάντοτε πρὸς τὸν Cardano, ἐκθέτει τὰς λύσεις μερικῶν προβλημάτων ποὺ εἶχον παραμείνει προηγουμένως ἐν ἐκκρεμότητι προσθέτων τὰ ἀκόλουθα : «σᾶς πληροφορῶ ἀκόμη, ὅτι εἰς τὰς πρώτας μου λύσεις εἶχον παρεμβάλει μίαν, ἡ ὁποία καίτοι ἀληθοφανὴς δὲν εἶναι ἀληθὴς οὔτε καλῶς λελυμένη, ἔπραξα δὲ τοῦτο διὰ δύο λόγους : πρῶτον διὰ νὰ βεβαιωθῶ κατὰ πόσον τὸ σχετικὸν πρόβλημα εἶχε πράγματι διατυπωθῇ ἢ ἠγνοεῖτο ὑφ' ὑμῶν, καὶ δεύτερον διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὸν εἰς ὅλους, ὅτι εἰς τὸν μεταξύ μας ἀντίλογον δὲν ἐχρειάζοντο ἄλλοι κριταὶ πλὴν ἡμῶν τῶν ἰδίων».

Ἡ V Πρόκλησις, τὴν ὁποίαν ἐδημοσίευσεν ὁ Ferrari τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1547, περιλαμβάνει τρία μέρη. Ἕνα χαρακτῆρος ἐριστικοῦ εἰς τόνον ἀκόμη περισσότερον ἀγενῆ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν πρόκειται νὰ ἐνδιατρίψωμεν. Ἕνα ἄλλο περιλαμβάνον κριτικὴν τῶν λύσεων τοῦ Tartaglia, ὅπου, μὲ εὔλογον ἔξαρσιν, ἀναφέρονται παρατηρήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποδεικνύουν προδήλως ὅτι εἰς τὸ διώνυμον Cardano-Ferrari ἡ βιαιότης τοῦ πάθους διετάρασσε τὴν ψυχραιμίαν τῆς κρίσεως. Τέλος εἰς τὸ τρίτον μέρος, τὸ μόνον παρουσιάζον ἀδιαφιλονίκητον ἐπιστημονικὴν ἀξίαν, λύονται τὰ προβλήματα τὰ προταθέντα ὑπὸ τοῦ Tartaglia. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ὁ Ferrari ἐχρειάσθη ἕξ μῆνας διὰ νὰ φέρῃ εἰς πέρας τὸ ἔργον τοῦτο, ἀλλ' ἡ ἐπιτυχία του, τόσον ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν μορφήν, ὑπῆρξε τοιαύτη ὥστε νὰ προκαλῇ λύπην τὸ γεγονός, ὅτι δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν ἄλλο κείμενον τοῦ συγγραφέως ἐκείνου.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰ προβλήματα, ποὺ ἐπροτείνοντο νὰ λυθοῦν μὲ σταθερὸν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, δικαίως παρατηρεῖ ὅτι ἐπρόκειτο περὶ θεμάτων μὲ

τὰ ὁποῖα ἠσχολοῦντο ἀπὸ πεντήκοντα περίπου ἐτῶν (ὅπως ἴδωμεν μάλιστα πολὺ περισσοτέρων) πολλὰ διακεκριμένα πνεύματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων προέχει ὁ ἐκ Πολωνίας Scipione dal Ferro. Ἀντὶ ὅμως νὰ περιορισθῇ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Tartaglia, αὐτὸς ἐπρότεινε νὰ ἐκτεθῇ ὁλόκληρος ὁ Εὐκλείδης μὲ βάσιν τὴν προαναφερθεῖσαν συνθήκην, καὶ δὴ τόσον τὰ θεωρήματα ὅσον καὶ τὰ προβλήματα *.

Φυσικὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ περιγράψωμεν ἐδῶ εἰς τοὺς ἀναγνώστας τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἐγερθεῖσαν δομήν, ὡς δεῖγμα τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἐπινοηθεισῶν κατασκευῶν· περιοριζόμεθα μόνον ν' ἀναφέρωμεν ἐκείνην, ἡ ὁποία ἀφορᾷ τὴν διχοτόμησιν δοθείσης γωνίας BAC (σχ. 1).



Σχ. 1

Μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον A καὶ προσδιορίζονται αἱ τομαὶ D και E μὲ τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας. Κατόπιν μὲ κέντρου D καὶ E γράφομεν δύο ἄλλας περιφερείας μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Ἐὰν τώρα F εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν, ἡ εὐθεῖα AF θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος. Περιττὸν νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ Ferrari κατέγινεν ἐπίσης μὲ τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ποὺ τοῦ ἐπρότεινεν ὁ ἀντίπαλος, χωρὶς νὰ παραλείψῃ τὴν κακόβουλον παρατήρησιν, ὅτι τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα εἶχον ὡς πηγὴν τῆς ἐμπνεύσεώς των τὰς ἐργασίας τοῦ Stiefel, γερμανοῦ μαθηματικοῦ, τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν εἰς τὸ προσεχὲς Κεφάλαιον.

221. Ἀρκετὸν χῶρον ἀφιερώσαμεν εἰς τὴν φιλονικίαν τῶν ἀντιμαχομένων μαθηματικῶν. Ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ὁ Tartaglia, ἀπαντῶν εἰς τὴν Πέμπτην Πρόκλησιν, προβαίνει ἀπροσδοκήτως εἰς τὴν δήλωσιν, ὅτι εἶναι διατεθειμένος νὰ μεταβῇ εἰς Μιλᾶνον, διὰ νὰ λάβῃ μέρος εἰς ἀληθῆ μαθηματικὴν μονομαχίαν μὲ τοὺς ἀντιπάλους του, ἐπωφελούμενος τῆς γειτνιάσεως τῆς πρωτευούσης τῆς Λομβαρδίας μὲ τὴν Brescia, ὅπου εὑρίσκετο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην δι' ἐπαγγελματικοὺς λόγους. Μία τοιαύτη δήλωσις θὰ ἔπρεπε λογικῶς νὰ καταπραΰνῃ τὰ πνεύματα τῶν δύο ἑταίρων, οἱ ὁποῖοι ἔβλεπον, τέλος, νὰ γίνεται δεκτὴ ἡ ἀρχική των πρότασις. Ἀντιθέτως ὅμως ἡ VI Π ρ ό κ λ η σ ι ς, τὴν ὁποίαν ἐξαπέλυσεν ὁ Ferrari τὴν 14ην Ἰουλίου 1548, δὲν ὑστερεῖ τῶν προηγουμένων εἰς ὀνειδισμοὺς καὶ κακολογίας.

* Ὅτι τὸ μέρος τοῦτο τοῦ κειμένου ἐγράφη μὲ τὴν συνεργασίαν τοῦ Ferrari καὶ τοῦ διδασκάλου του, ὡμολόγησεν ὁ Cardano εἰς τὸ ἔργον του De subtilitate.

Ἂς σημειώσωμεν μόνον ὅτι ὁ Ferrari χαρακτηρίζει ὡς μεγάλην γενναιοφροσύνην ἐκ μέρους τοῦ Cardano τὸ γεγονός, ὅτι ὁ τελευταῖος ἀναφέρει τὸν Tartaglia εἰς τὴν Ars magna, ἀφοῦ ἡ λύσις τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων εἶχεν ἤδη ἐπιτευχθῆ προηγουμένως ἀπὸ τὸν Scipione dal Ferro καὶ ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν A. M. Fior. Εἰς τὴν δήλωσιν τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Brescia ἐδόθη ἀπάντησις, περιλαμβάνουσα ἀκριβεῖς ὅρους ἀποσκοποῦντας εἰς τὴν ἀποσόβησιν ἀπάτης, τὴν ὁποίαν ὁ Ferrari ἐφοβεῖτο κρυπτομένην εἰς τὴν δήλωσιν τοῦ Tartaglia. Τὴν 24ην Ἰουλίου οἱ φιλονικοῦντες εὑρέθησαν τελικῶς σύμφωνοι ἐπὶ τῶν λεπτομερειῶν τῆς μονομαχίας.

Πῶς ἄραγε διεξήχθη; Τὰ πάντα δίδουν ἀφορμὴν νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ μονομαχία μετριώτατον ἐνδιαφέρον διήγειρεν εἰς τὴν κοινωνίαν τοῦ Μιλάνου, ἀφοῦ εἰς τὰ χρονικὰ τῆς ἐποχῆς, τὰ ὁποῖα ἠρευνήθησαν, δὲν ἀνευρέθη ἡ παραμικρὰ μνεία. Ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν πάντως πόσον βασανιστικὴ καὶ τεταραγμένη ὑπῆρξεν ἡ ἐποχή, περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλοῦμεν. Ὁ Cardano καὶ ὁ Ferrari δὲν ἔγραψαν τίποτε σχετικῶς, τὰ δὲ μοναδικὰ δοκουμέντα, τὰ ὁποῖα ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν, εἶναι δύο ἀφηγήσεις τὰς ὁποίας ἄφησεν ὁ Tartaglia, μίαν εἰς τὸν τρίτον ἀπὸ τοὺς συλλογισμούς του ἐπὶ τῆς Travagliata inventione (Ἐπίπονος ἐφεύρεσις), ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἔργου του General trattato, περὶ τοῦ ὁποίου θ' ἀσχοληθῶμεν ἀμέσως κατωτέρω. Ἀναφέρομεν τὴν πρώτην, ἡ ὁποία εἶναι βραχυτέρα: «... λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον μοῦ ἐφάνη κατάλληλος ἡ εὐκαιρία νὰ τρέξω εἰς τὸ Μιλᾶνον, διὰ νὰ τακτοποιήσω τὴν ἐριστικὴν διαφοράν, ἡ ὁποία συνεχίζετο ἄνευ ἀποτελέσματος μὲ δημοσίας Προκλήσεις μεταξὺ ἐμοῦ καὶ τῶν Hieronimo Cardano καὶ Ludovico Ferrari. Ὡμίλησα δὲ περὶ αὐτοῦ εἰς τὸν ἐξοχώτατον Jacomo Chizola καὶ εἰς τὸν κύριον Jacomo Aleno, οἱ ὁποῖοι μὲ ἀπέτρεψαν λέγοντες, ὅτι ἡ πρᾶξις μου ἦτο ἐπικίνδυνος διὰ διαφόρους λόγους. Ἐγὼ ὅμως δὲν ἠθέλησα ν' ἀλλάξω τακτικὴν καὶ τελικῶς ἀπεφάσισα νὰ μεταβῶ εἰς Μιλᾶνον πρὸς τακτοποίησιν τῆς διαφορᾶς. Ἐκεῖ πράγματι διὰ νὰ συντομεύσω τὴν διαδικασίαν, ἐκάλεσα μὲ δημοσίαν πρόσκλησιν τὸν Cardano καὶ τὸν Ferrari εἰς ἕνα ναὸν ποὺ λέγεται κῆπος τῶν σανδαλοφορούντων μοναχῶν, διὰ νὰ συζητήσωμεν τὰς αἰτιάσεις των ἐπὶ τῶν λύσεων, ποὺ ἔδωσαν μετὰ ἑπτάμηνον εἰς τὰ 31 προβλήματα, ποὺ ἐπρότεινα εἰς αὐτούς. Ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω κύριος Hieronimo δὲν κατεδέχθη νὰ ἔλθῃ, ἀλλ' ἀντιθέτως ἔφυγεν ἀπὸ τὸ Μιλᾶνον. Ἀληθὲς εἶναι ὅτι προσῆλθεν ὁ κύριος Ludovico μὲ μεγάλην ἀκολουθίαν. Ἐρχόμενος κατόπιν εἰς τὰ ἐπίμαχα σημεῖα, τοῦ ἔδωσα νὰ ἐννοήσῃ καὶ νὰ ὁμολογήσῃ ὅτι δὲν περιέπεσεν εἰς μικρὸν σφάλμα εἰς τὴν λύσιν τὴν ὁποίαν ἔδωσεν εἰς τὴν προταθεῖσαν τότε πρώτην πρότασιν τῆς γεωγραφίας τοῦ Πτολεμαίου. Ἐνῷ δὲ ἠθέλησα νὰ προχωρήσω εἰς τὰς ἄλλας λύσεις του, ὅλοι οἱ παριστάμενοι ὁμοφώνως καὶ ἀκαίρως δὲν ἠθέλησαν νὰ προχωρήσω περισσότερον, ἀλλ' ἀντιθέτως ἐζήτησαν νὰ τὸν ἀφήσω νὰ ὁμιλήσῃ

ἐκεῖνος, διὰ νὰ παραμείνῃ τὸ πρᾶγμα συγκεχυμένον. Ἤρχισε λοιπὸν νὰ ὁμιλῇ διὰ τὸ πρόβλημα τοῦ Vitruvio, τὸ ὁποῖον δὲν εἶχον λύσει, καθὼς ἐπίσης διὰ τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ὀρθογωνίου κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ δημιουργηθῇ χῶρος διὰ παράθεσιν γεύματος. Τότε τοῦ εἶπον ὅτι ἔπρεπε νὰ μοῦ δώσῃ τὰς λύσεις αὐτὰς γραπτῶς. Καὶ μὲ αὐτὴν τὴν πρότασιν ἐτέθη τέρμα εἰς τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἐπέστρεψα εἰς τὴν Brescia» (Ἦτο ἡ 19η Αὐγούστου 1548).

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι «ὤδυνεν ὄρος καὶ ἔτεκε μῦν», καὶ τοῦτο ὄχι μόνον ἀπὸ ἀπόψεως ἀνθρωπίνης*, ἀλλ' ἐπίσης ἀπὸ ἀπόψεως ὑψίστου ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος. Διότι ὅπως δύναται ν' ἀντιληφθῇ ὁ ὀξυδερκὴς ἀναγνώστης, μοναδικὸς καρπὸς τῆς ζωηρᾶς αὐτῆς ἀντιδικίας ὑπῆρξε μία μικρὰ βελτίωσις τῆς γεωμετρίας τοῦ διαβήτου σταθεροῦ ἀνοίγματος, θέμα τὸ ὁποῖον δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἁπλῆς περιεργείας. Οὐδεμία ὅμως πρόοδος ἐσημειώθη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων, ἡ ὁποία εὑρίσκετο ἀκριβῶς τότε εἰς τὴν πρωτοπορίαν τῶν φλεγόντων ζητημάτων τῆς ἐπιστήμης. Ἐπὶ τοῦ μοναδικοῦ καὶ πολὺ ἀξιολόγου ζητήματος, τὸ ὁποῖον ἐπροτάθη καὶ ἐλύθη κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μακρᾶς αὐτῆς φιλονικίας (ἐννοοῦμεν τὴν ἀναζήτησιν ἑνὸς μεγίστου) ἐπικρατεῖ πλῆρες σκότος, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὁδὸν ποὺ ἠκολούθησε τότε ὁ Tartaglia διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν λύσιν. Παρῆλθε τοιουτοτρόπως ἀπαρατήρητος καὶ συντομώτατα ἐλησμονήθη, συμμερισθεῖσα τὴν μοῖραν ὅλων ἐκείνων τῶν ἀνακαλύψεων, αἱ ὁποῖαι προηγοῦνται ἢ εἶναι ἀνώτεραι τῆς ἐποχῆς των.

Παρὰ ταῦτα ἡ σπουδαιότης τῶν Προκλήσεων εἶναι μεγίστη καὶ ἀναμφισβήτητος, διὰ τὸ φῶς τὸ ὁποῖον ρίπτουν ἐπὶ τῆς πορείας, ἡ ὁποία ὡδήγησε τελικῶς εἰς τὴν λύσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ ἡ ὁποία θὰ ἠδύνατο νὰ περιγραφῇ ὡς ἑξῆς:

Τὸ ἔτος 1515 ὁ Scipione dal Ferro, μὴ συμμεριζόμενος τὴν γνώμην τοῦ πρώην συναδέλφου του Luca Pacioli (καθηγητοῦ εἰς Βολωνίαν 1501-1502), ἐπεχείρησε καὶ κατώρθωσε νὰ δώσῃ λύσιν εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $x^3+px=q$, ἀλλ' ἐκράτησε ζηλοτύπως τὸ μυστικόν, περιοριζόμενος νὰ καταγράψῃ τὴν μέθοδόν του. Τὸ πολύτιμον χειρόγραφον περιῆλθεν εἰς χεῖρας τοῦ γαμβροῦ του Annibale della Nave. Φαίνεται ὅμως ὅτι, τοὐλάχιστον εἰς τοὺς κύκλους τῆς Βολωνίας, διέρρευσε τὸ μυστικὸν τῆς ἀνακαλύψεως. Τοιουτοτρόπως ἐξηγοῦνται τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐπρότειναν εἰς τὸν Tartaglia οἱ Zuanne da Coi καὶ Antonio Maria Fior. Εἰς τοὺς δύο αὐτοὺς μετρίους διδασκάλους ὀφείλεται ἡ μεγάλη τιμή, ὅτι ὤθησαν τὸν μαθηματικὸν τῆς Brescia εἰς νέας προσπαθείας, ἐνθαρρυνόμενον ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι παρόμοιαι

* Ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως εἶχεν ὡς συνέπειαν νὰ χάσῃ ὁ Tartaglia τὴν ἕδραν, τὴν ὁποίαν κατεῖχεν εἰς τὴν Brescia, ἐνῷ εἰς τὸν Ferrari προσεφέρθησαν ἕδραι εἰς τὴν Ρώμην, τὴν Βενετίαν, τὴν Μάντοβα κλπ.

προσπάθειαι ἐκ μέρους ἄλλων δὲν παρέμειναν ἄκαρποι. Τὸ ἐπιτευχθὲν ἀποτέλεσμα συνώψισεν ὁ Tartaglia εἰς ἕνα στιχούργημα, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη (§ 216), καὶ τὸ ὁποῖον ἐκοινοποίησεν εἰς τὸν Cardano ὑπὸ τὸν ὅρον τῆς ἐχεμυθείας, ὑποβάλλων αὐτὸν εἰς τὴν ὑποχρέωσιν νὰ ὁρκισθῇ εἰς τὸ ὄνομα τοῦ Θεοῦ ὅτι δὲν θὰ τὸ κοινωλογήσῃ, μέχρις ὅτου ὁ ἴδιος καταστήσῃ γνωστὴν τὴν ἐπινόησίν του εἰς εἰδικὸν ἀλγεβρικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον συνέγραφε (πρόκειται προφανῶς περὶ τοῦ ἔργου του General trattato, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω). Τοιουτοτρόπως ὁ Tartaglia συνεμορφώθη πρὸς τὰς συνηθείας τῆς ἐποχῆς, προβλέπων ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον πράγματι καὶ συνέβη, ὅτι δηλαδὴ ὁ τύπος τὸν ὁποῖον αὐτὸς ἀνεκάλυψε θὰ κατέληγεν εἰς τὸ νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα τοῦ Cardano*. Ὁ τελευταῖος μὴ δυνάμενος νὰ φωτισθῇ ἐπαρκῶς ἐπὶ τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία ἐκρύπτετο ὑπὸ τὸ αἴνιγμα τῶν παραδόξων στίχων τοῦ Tartaglia, ἐζήτησε καὶ ἔλαβεν εἰς ἐπικουρίαν τοὺς συλλογισμοὺς καὶ τοὺς ὑπολογισμούς, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκοντο καταχωρημένοι εἰς τὸ πολύτιμον τετράδιον, ποὺ εὑρίσκετο εἰς χεῖρας τοῦ Annibale della Nave. Τοιουτοτρόπως συνεπλήρωσε τὴν ὕλην, ἡ ὁποία προωρίζετο νὰ καταχωρηθῇ εἰς τὸ ἔργον του Ars Magna. Αἱ ὀλίγαι ὅμως γραμμαὶ ἱστορικοῦ χαρακτῆρος, τὰς ὁποίας προσέθεσε (§ 210), ἐσχεδιάσθησαν προφανῶς μὲ τὴν τολμηρὰν πρόθεσιν ν' ἀφήσουν εἰς πλῆρες σκότος τὴν ἀποφασιστικὴν συμβολὴν τόσον τοῦ Tartaglia, ὅσον καὶ τοῦ dal Ferro εἰς τὴν λύσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων. Θ' ἀποφύγωμεν νὰ διατυπώσωμεν οἱανδήποτε κριτικὴν ἐπὶ τῆς διαγωγῆς τῶν πρωταγωνιστῶν τοῦ ἀξιομνημονεύτου τούτου δράματος ** (ἀφοῦ πρόκειται μᾶλλον περὶ ζητήματος ἠθικῆς τάξεως, παρὰ ἱστορικῆς ἐξακριβώσεως, μὲ μόνην δικαίωσιν τὴν ἐποχὴν καθ' ἣν συνέβησαν τὰ γεγονότα). Θὰ τονίσωμεν μόνον, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Cardano, Ars Magna, γραφὲν εἰς μίαν γλῶσσαν κατανοητὴν εἰς τοὺς μορφωμένους τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ὑπῆρξεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον διέδωσεν ἀνὰ τὸν κόσμον τὴν εὐχάριστον ἀγγελίαν τῆς σπουδαιοτάτης προόδου, τὴν ὁποίαν ἐπραγματοποίησεν ἡ ἄλγεβρα κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ 16ου αἰῶνος μὲ τὴν συμβολὴν ἰταλῶν διανοουμένων.

---

* Εἰς ἕνα κλασσικὸν ἔργον τοῦ Serret ὑπὸ τὴν τίτλον Cours d' algebre supérieure γίνεται συχνὰ λόγος περὶ τῶν τύπων Cardano καὶ δὲν εἶναι βεβαίως ὁ μοναδικὸς συγγραφεὺς ὁ υἱοθετήσας τὴν ἀντιϊστορικὴν αὐτὴν τακτικήν.

** Θὰ προσθέσωμεν μόνον, ὅτι οὔτε ἡ στάσις τοῦ Tartaglia ὑπῆρξε πάντοτε ἄμεμπτος. Εἰς τὸ βιβλίον του, πράγματι, Quesiti et inventioni diverse ἐπωφελήθη τοῦ συγγράμματος Ars Magna τοῦ Cardano, ἀπέκρυψεν ὅμως τὸ γεγονὸς τοῦτο, συγχωνεύων ὑπὸ ἑνιαίαν χρονολογίαν τὰς ἐκφωνήσεις καὶ τὰς λύσεις τῶν ἐξεταζομένων προβλημάτων.

Ἡ «Γενικὴ Πραγματεία» τοῦ N. Tartaglia

222. Ἡ συγγραφὴ τοῦ ἔργου, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Tartaglia ἐσχεδίαζε νὰ δώσῃ εὐρεῖαν ἀνάλυσιν τῶν ἐρευνῶν του ἐπὶ τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀπερρόφησε τὸ σημαντικώτερον μέρος τῆς δραστηριότητός του, κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν τελευταίων ἐτῶν τῆς ζωῆς του. Ἡ μοῖρα ὅμως δὲν τοῦ ἐπέτρεψε νὰ ὁλοκληρώσῃ τὸ ἔργον του, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται σήμερον ἐλλιπὲς κατὰ τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πλέον πρωτότυπον καὶ σημαντικὸν καὶ διὰ τοῦτο περισσότερον ἐνδιαφέρον. Πρόκειται περὶ μιᾶς τεραστίας μαθηματικῆς ἐγκυκλοπαιδείας (τοῦ τύπου τῆς Summa τοῦ Pacioli), τῆς ὁποίας τὸ περιεχόμενον παρουσιάζει κάποιαν ἀκαταστασίαν ἴσως, διότι ἀντικατοπτρίζει τὴν ὕλην μαθημάτων ποὺ εἶχε κάμει εἰς διαφόρους τόπους καὶ χρόνους. Ὅτι ἐγράφη ἀπὸ πρόσωπον ποὺ ἐγνώριζε καλῶς ὅσα εἶχον γράψει οἱ ἄλλοι κατὰ τὴν ἐποχήν του, προκύπτει ἀπὸ τὰ ἔργα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται, τοῦ Βοηθίου, Campano, Oronzio Fineo, Stiefel, Sacrobosco, Pacioli, Cardano, ἀκόμη δὲ τοῦ Cardinale di Cusa, καὶ ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὰς κριτικὰς παρατηρήσεις, τὰς ὁποίας ἐκθέτει μὲ ἄκραν γλωσσικὴν ἐλευθερίαν καὶ συχνὰ μὲ ἀμφισβητήσιμον εὐγένειαν. Ἐπὶ πλέον πολυάριθμα εἶναι τὰ χωρία, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀναδίδεται ἡ ἠχὼ τῶν ἐντυπωσιακῶν ἀναμετρήσεων, εἰς τὰς ὁποίας παρεσύρθη ἀπὸ τὸν εὐέξαπτον χαρακτῆρα του. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον φέρει τὸν τίτλον General trattato di numeri et misure (Γενικὴ πραγματεία περὶ ἀριθμῶν καὶ μεγεθῶν), ὁ ὁποῖος συνεπληροῦτο κατὰ διαφόρους τρόπους διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὸ περιεχόμενον ἑνὸς ἑκάστου ἐκ τῶν ἕξ μερῶν τοῦ ὅλου ἔργου. Τὸ σύνολον περιλαμβάνει 711 σελίδας μεγάλου σχήματος, πυκνοτυπωμένας μὲ χαρακτῆρας τόσον μικρούς, ὥστε ἀναπαραγόμενον μὲ τὰ συνήθη σήμερον τυπογραφικὰ στοιχεῖα θὰ ἔπρεπε νὰ καταλάβῃ χῶρον, ὅσον περίπου 4000 σελίδες. Τὰ δύο πρῶτα Μέρη φέρουν χρονολογίαν 1556, ἐνῷ τὰ τρία ἑπόμενα 1560, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὰ τελευταῖα εἶναι μεταγενέστερα τοῦ θανάτου τοῦ συγγραφέως. Τὸ ἔτος 1560 εἶδε τὸ φῶς τὸ VI Μέρος, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἐγράφη ἀπὸ τὸν Tartaglia, ἀλλ' ἀπὸ κάποιον «λόγιον μαθηματικὸν» (ποῖον ;), ὁ ὁποῖος περιέλαβεν εἰς τὸ Μέρος αὐτὸ τὴν ὕλην ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ὑπὸ μορφὴν ἀποσπασμάτων, κατέλιπεν ἀδημοσίευτον ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia.

223. Τὸ I Μέρος ἀποτελεῖ ἐκτεταμένην πραγματείαν πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, ὅπου ἐκτίθεται διὰ μακρῶν ἡ ἐκτέλεσις τῶν τεσσάρων πράξεων, συνοδευομένη ἀπὸ ἐφαρμογὰς εἰς προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ τῶν ἐμπορικῶν συναλλαγῶν. Τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα λαμβάνονται προφανῶς εἰς τὴν τύχην, δὲν γίνεται δὲ καμμία διάκρισις μεταξὺ προβλημάτων ὡρισμένων ἢ ἀπροσδιορίστων.

Ὑψηλοτέρας στάθμης εἶναι τὸ μέρος II, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν θεωρητικὴν ἀριθμητικὴν μὲ βάσιν τὴν εὐκλείδειον τακτικὴν τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν. Περιλαμβάνει δὲ τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι ἕνα πρόβλημα, ποὺ τοῦ ἐπροτάθη εἰς Verona τὴν πρώτην ἡμέραν τῆς Τεσσαρακοστῆς τοῦ 1523, δίδει λαβὴν εἰς τὸν Tartaglia νὰ δώσῃ δείγματα τῆς ἐμπειρίας του εἰς τὴν συνδυαστικήν, συγχρόνως δὲ νὰ προσθέσῃ εἰς τὸν παλαιὸν τύπον προσεγγίσεως :

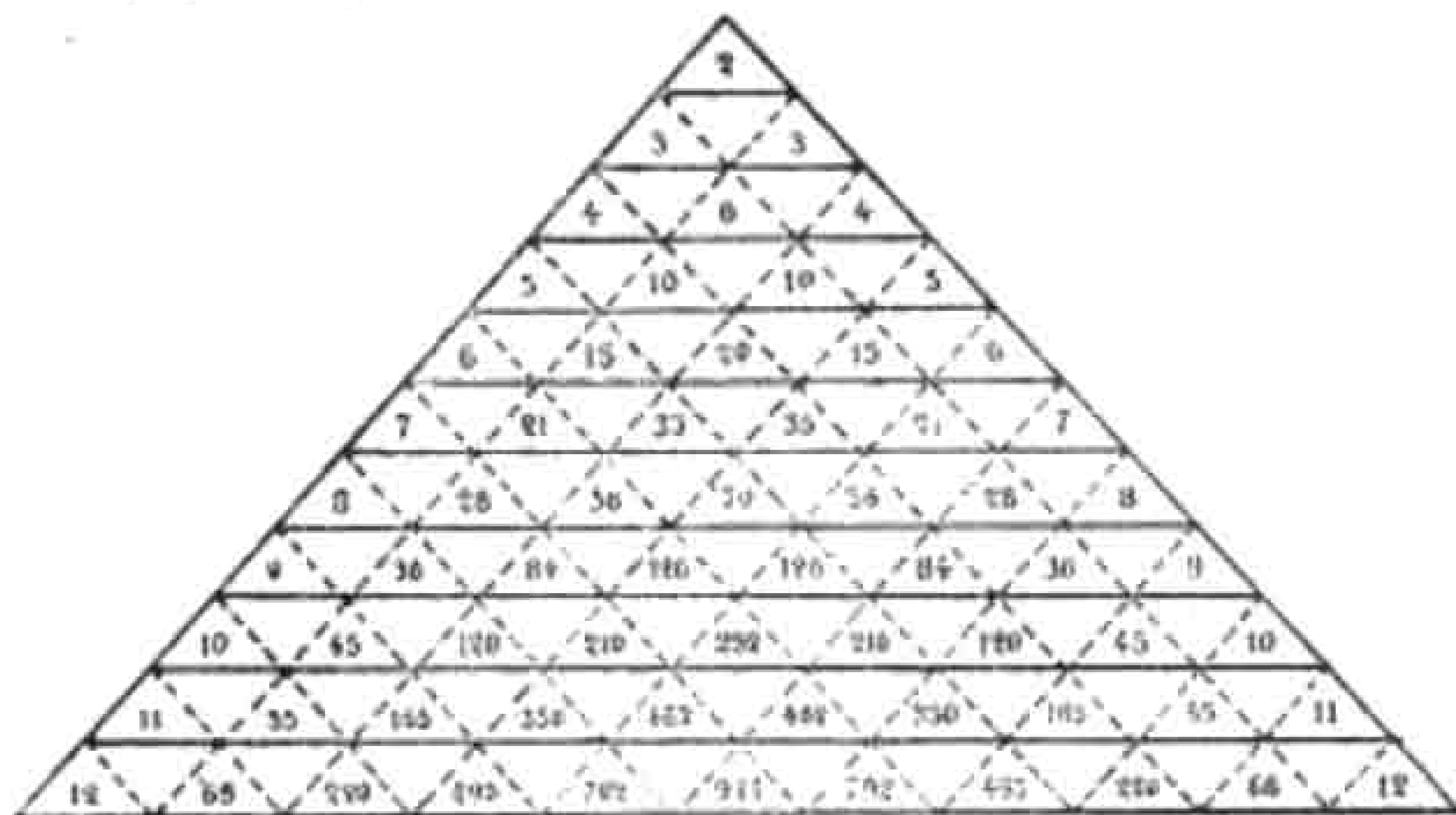
$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} \tag{1}$$

τὸν ἀνάλογον :

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a\,(a + 1)}. \tag{2}$$

Ἀπὸ ἱστορικῆς ἀπόψεως παρουσιάζουν ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα αἱ σελίδες, εἰς τὰς ὁποίας ὁ Tartaglia δίδει μερικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὰς σκέψεις ποὺ τὸν ὡδήγησαν εἰς τὴν λύσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, χωρὶς μάλιστα νὰ παρασιωπᾷ μερικὰς λεπτομερείας τῆς φιλονικίας του μὲ τὸν Cardano.

Ἰδιαιτέρας μνείας ἄξιον εἶναι τὸ μέρος ἐκεῖνο, ὅπου ἐκτίθεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἕνδεκα πρώτων δυνάμεων ἑνὸς διωνύμου. Ἐξ αὐτοῦ ὁδηγεῖται εἰς τὴν μελέτην τῶν συντελεστῶν τοῦ διωνύμου καί, διὰ νὰ ἐκφράσῃ τὸν νόμον τοῦ σχηματισμοῦ των, ἄγεται εἰς τὴν μόρφωσιν τοῦ κατωτέρω ἀριθμητικοῦ τριγώνου (σχ. 2):



Σχ. 2

Ὁ Tartaglia θεωρεῖ τὴν ἀποκάλυψιν αὐτοῦ τοῦ νόμου περὶ σχηματισμοῦ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς διωνύμου ὡς ἰδικήν του ἐπινόησιν, ἡ ἀλήθεια

ὅμως εἶναι ὅτι προηγήθησαν αὐτοῦ δύο γερμανοὶ μαθηματικοὶ (P. Bienenwitz, M. Stiefel), περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ προσεχὲς Κεφάλαιον.

Ὁ ἐγκυκλοπαιδικὸς χαρακτὴρ τοῦ ἔργου, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, ἀπορρέει ἀπὸ τὴν εὐρεῖαν ποικιλίαν τῶν θεμάτων τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸ Μέρος II: Λογισμὸς μὲ ριζικά, θεωρία τῶν ἀναλογιῶν κατ' Εὐκλείδην, ἀριθμοὶ ἰσοδύναμοι κατὰ Fibonacci καὶ Pacioli (μὲ πίνακα περιλαμβάνοντα 43 ἐξ αὐτῶν), ἀσύμμετροι ποσότητες κατὰ τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων, τέλειοι ἀριθμοὶ κατ' Εὐκλείδην.

Ὡς πρὸς τοὺς τελευταίους τούτους, σημειώνομεν ὅτι ὁ Tartaglia παραθέτει ἕνα πίνακα περιέχοντα 9 τελείους ἀριθμούς. Ἀλλ' αἱ δυσκολίαι αἱ ἀπαντώμεναι εἰς τὴν ἀναγνώρισιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρώτου τὸν ὡδήγησαν εἰς διατυπώσεις ἐσφαλμένας εἰς τρόπον, ὥστε ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους χαρακτηρίζει τελείους μόνον οἱ τέσσαρες πρῶτοι δικαιοῦνται αὐτοῦ τοῦ ὀνόματος.

Μεταξὺ τῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων τὴν λύσιν ἐκθέτει ὁ Tartaglia, ἀναφέρομεν τὸ ἀκόλουθον: «Ἕνας ἔχει τέσσαρα σταθμά, μὲ τοιαύτην σειρὰν μεγέθους κατασκευασμένα, ὥστε μὲ αὐτὰ νὰ δύναται νὰ ζυγίζῃ ὅσας λίμπρας δύναται νὰ σηκώσῃ ἀνὰ χεῖρας ἀπὸ μιᾶς ἕως 40. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν σειρὰν μεγέθους εἶχον κατασκευασθῆ τὰ σταθμά». Ἡ λύσις τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ συγγραφεὺς εἶναι ἀκριβὴς καὶ ἀξιόλογος. Τὰ ἀποτελέσματα εἶναι διάφορα, καθ' ὅσον εἰς τὴν ζύγισιν γίνεται χρῆσις ἀμφοτέρων τῶν δίσκων τοῦ ζυγοῦ ἢ τοῦ ἑνὸς μόνον. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὰ σταθμὰ δύνανται νὰ εἶναι μόνον 4, μὲ σειρὰν μεγέθους 1, 3, 9, 27. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἐχρειάζοντο τὰ ἀκόλουθα σταθμά: 1, 2, 4, 8, 9, 16, ἢ ἐπίσης: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Εἶναι πρὸς τιμὴν τοῦ Tartaglia τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπέκτησεν εὐρεῖαν δημοσιότητα, περιληφθὲν εἰς ἕνα διάσημον ἔργον τοῦ Bachet de Méziriac (§ 309). Ὁ τελευταῖος δὲν ὡμολόγησεν ὅτι ἤντλησεν ἀπὸ τὸν Tartaglia, ἀλλ' ἡ ταυτότης ὄχι μόνον τῶν ἐξαγομένων, ἀλλ' ἀκόμη καὶ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων, αἴρει κάθε ἀμφιβολίαν.

224. Τὸ Μέρος III τῆς Γενικῆς Πραγματείας περιλαμβάνει μίαν μετρίαν ἀνάπτυξιν τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἐξυπηρετήσῃ κυρίως τοὺς ἐνδιαφερομένους διὰ μετρολογικὰ ζητήματα. Ἐδῶ ὁ Tartaglia ἐπιμένει νὰ ταυτίζῃ τὸν συγγραφέα τῶν Στοιχείων μὲ τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικὸν καὶ ν' ἀποδίδῃ εἰς αὐτὸν τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς ὡς ἐλαχίστης ἀποστάσεως μεταξὺ δύο σημείων.

Εἰς τὴν θεωρητικὴν γεωμετρίαν ἀφιερώνεται τὸ Μέρος IV τοῦ ἰδίου ἔργου. Ἡ ὕλη προωθεῖται μέχρι μετρήσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐπιπέδων

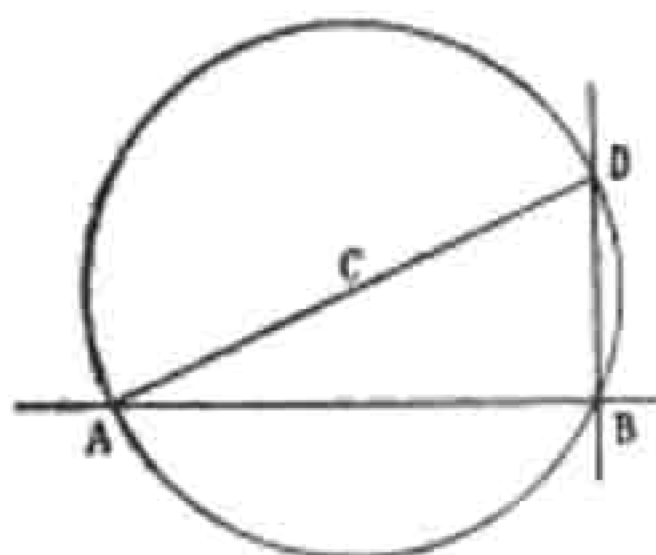
σχημάτων καὶ τῆς καταστρώσεως ἑνὸς πίνακος χορδῶν κατ' ἀπομίμησιν τοῦ Πτολεμαίου.

Ἡ θεωρητικὴ ἔκθεσις συνοδεύεται ἀπὸ κριτικὰς παρατηρήσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν στεροῦνται βάσεως. Οὕτω ὁ Oronzio Fineo κατηγορεῖται διότι θεωρεῖ ὡς δυνατὴν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου τὴν κατασκευὴν ὅλων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ὁ δὲ Cardano διότι ἐδήλωσεν ὅτι εἶναι τοῦτο κατωρθωτὸν διὰ τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον. Ὁ Fineo κακίζεται περαιτέρω, διότι ἐπίστευσεν ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς τῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους (§ 25) ἠδύνατο νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Δὲν λείπουν ἐπίσης δικαιολογημέναι ἐπικρίσεις τῶν C. de Bouvelles καὶ Stiefel ἀναφορικῶς πρὸς τὸ αὐτὸ ζήτημα. Μεταβαίνων εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ χώρου, ὁ Tartaglia ἔφθασε μέχρι τοῦ σημείου νὰ συμπεριλάβῃ τὸ περιεχόμενον τῶν Βιβλίων τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, τὸ ὁποῖον, πρὸς τιμὴν τοῦ Tartaglia, εἰσέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης εἰς τὴν διδασκαλίαν καὶ ἀποτελεῖ ἔκτοτε ἀναπόσπαστον μέρος τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας.

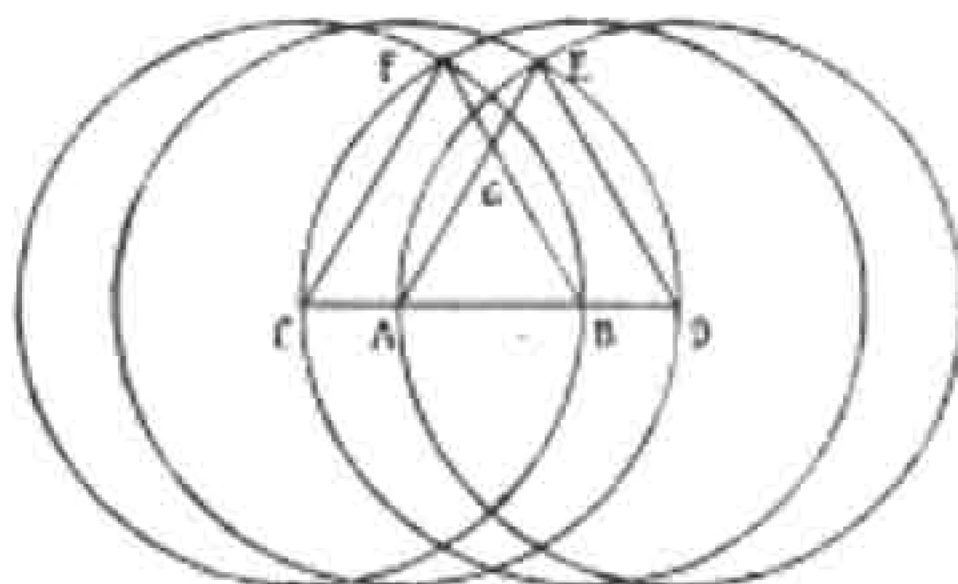
Εἰς τὸ Μέρος V ἡ σπουδὴ τῆς γεωμετρίας γίνεται, ὑπὸ ἔποψιν κατασκευαστικήν, πρῶτα εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ κατόπιν εἰς τὸν χῶρον. Τὰ ἐξεταζόμενα προβλήματα δὲν περιορίζονται μόνον εἰς ἐκεῖνα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ προστίθενται καὶ ἄλλα δυσκολώτερα τόσον, ὥστε νὰ εἶναι ἀπαραίτητος ἡ βοήθεια τοῦ λογισμοῦ. Εἰς τὰς τελευταίας σελίδας, αἱ ὁποῖαι εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν αἱ πλέον πρωτότυποι καὶ ἐνδιαφέρουσαι, ὁ Tartaglia εἰσάγει τὸν περιορισμὸν τῆς κατασκευῆς μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου καὶ ἐκθέτει τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα τοῦ εἶχον προταθῆ ἀπὸ τὸν Ferrari. Τοιουτοτρόπως ἀπέδειξεν ὅτι ἦτο εἰς θέσιν ν' ἀντιμετωπίσῃ ὅλα τὰ προβλήματα ποὺ λύονται κατ' ἄλλον τρόπον ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη (μὴ ἐξαιρουμένης τῆς κατασκευῆς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου) καὶ ὅτι ἐγνώριζεν ὁμοίως νὰ λύῃ προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Διὰ νὰ κατασκευάσῃ τὴν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἕνα σημεῖον της, ὁ μαθηματικὸς τῆς Brescia εἰσηγεῖται μίαν μέθοδον τὴν ὁποίαν χαρακτηρίζει ὡς ἰδικήν του, ἐνῷ εἰς τὴν πραγματικότητα προηγήθη τούτου ὁ Abu' l Wafa. Ἀξίζει πάντως νὰ τὴν μνημονεύσωμεν (Σχ. 3).

Μὲ τὸ δοθὲν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τοῦ δοθέντος σημείου B. Ἔστωσαν C τὸ κέντρον καὶ A ἡ δευτέρα τομὴ τῆς περιφερείας μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ἐὰν D εἶναι τὸ δεύτερον πέρας τῆς διαμέτρου AC τῆς βοηθητικῆς περιφερείας, τότε ἡ εὐθεῖα BD θὰ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος. Διὰ νὰ χαρακτηρίσωμεν ἀκόμη καλύτερα τὸ μέρος τοῦτο τῆς Γενικῆς πραγματείας ἀναφέρομεν τὴν κατα-

σκευὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ δεδομένην πλευράν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος παρέχει τὸ τμῆμα AB (Σχ. 4).



Σχ. 3



Σχ. 4

Μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα γράφομεν τέσσαρας περιφερείας μὲ κέντρα τὰ σημεῖα A, B, C, D καὶ προσδιορίζονται τὰ κοινὰ σημεῖα E, F, ὡς καὶ τὰ σημεῖα συναντήσεως C, D μετὰ τῆς εὐθείας AB. Ἀγομένων τῶν εὐθειῶν AE, DE BF, CF, προκύπτουν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ADE, BCF καὶ ἐὰν G εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν AE, BE, τὸ τρίγωνον ABG θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

225. Εἰς τὸ μέρος IV τῆς Γενικῆς πραγματείας ὁ συγγραφεὺς ἐπιλαμβάνεται τέλος τοῦ ἀλγεβρικοῦ τομέως. Ἀλλ' ἡ ἔκθεσις δὲν προχωρεῖ πέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ β' βαθμοῦ καὶ τῶν ἄλλων, αἱ ὁποῖαι ἀνάγονται εἰς δευτεροβαθμίους. Ἐπὶ πλέον εἶναι μακρὰ καὶ ἐπίπονος, λόγῳ τῆς δεσμεύσεως, τὴν ὁποίαν διατηρεῖ ὁ Tartaglia νὰ εἶναι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ πάντοτε θετικοί. Τὸ θεωρητικὸν μέρος ἀκολουθεῖ μία συλλογὴ προβλημάτων, μερικὰ τῶν ὁποίων ἔχουν ἐμπορικὸν καὶ ἄλλα γεωμετρικὸν χαρακτῆρα, ὅλα ὅμως δύνανται νὰ λυθοῦν μέσῳ πρωτοβαθμίων ἢ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Αἱ ὀλίγαι βραχυγραφίαι ποὺ ἀπαντῶνται δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν ν' ἀποδώσωμεν εἰς τὸ ἔργον ἄλλον χαρακτηρισμὸν πλὴν τῆς συγκεκομμένης ἀλγέβρας.

Ὡς ἔργον δεδοκιμασμένου διδασκάλου, κατέχοντος τελείως τὴν τέχνην τῆς διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν, δὲν δυνάμεθα ν' ἀρνηθῶμεν ὅτι ἡ Γενικὴ πραγματεία κατέχει μίαν ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὸν κατάλογον τῶν κειμένων, ποὺ ἔχουν ὡς σκοπὸν τὴν ἐκπαίδευσιν τῆς νεολαίας *.

* Ὅτι ἡ Γενικὴ πραγματεία ἔτυχεν εὐνοϊκῆς κριτικῆς καὶ ὑποδοχῆς ἀκόμη καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μαρτυρεῖται ἀπὸ τὴν Γαλλικὴν μετάφρασιν τοῦ ἔργου ὑπὸ τοῦ Gosselin, ὁ ὁποῖος, ἔδωσεν εἰς αὐτὴν τὸν ἑξῆς κολακευτικὸν τίτλον: L' arithmétique de Nicola Tartaglia brescian, grand mathématicien et Prince des practiciens (Paris καὶ Anvers, 1578, καὶ Paris, 1615).

Μὲ τὸν τρόπον ποὺ βλέπομεν σήμερον τὰ πράγματα, θὰ ἔπρεπε νὰ λυπούμεθα διότι τόσον πολυάριθμοι σελίδες βιογραφικοῦ, πολεμικοῦ ἢ αὐτοαπολογητικοῦ χαρακτῆρος ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν. Δὲν δύναται ὅμως ν' ἀρνηθῇ κανείς, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης προσλαμβάνει μίαν ποικιλίαν καὶ μίαν ζωηρότητα, ἡ ἔλλειψις τῆς ὁποίας προσδίδει ὄψιν ἀπογοητευτικῆς ξηρότητος εἰς ὑψηλὰ κείμενα, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ ἔχουν ὡς πρότυπον τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ὅταν ὁ ἀναγνώστης φθάσῃ εἰς τὴν τελευταίαν σελίδα, αἰσθάνεται ἔντονον πικρίαν, διότι δὲν ἠδυνήθη ὁ σπουδαῖος ἐκεῖνος ἐπιστήμων νὰ φέρῃ εἰς πέρας τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ὡς ἐπιστημονική του διαθήκη, διὰ τῆς προσθήκης τῶν Κεφαλαίων ἐκείνων τῆς ἀλγέβρας, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ προσωπικότης του θὰ προεβάλλετο εἰς ὅλην αὐτῆς τὴν ἐπιβλητικὴν ἀρτιότητα. Μερικοὶ ἐξεδήλωσαν τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Tartaglia παρῃτήθη τῆς ἰδέας νὰ ἐκθέσῃ τὴν θεωρίαν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀφ' ὅτου προέβη ὁ Cardano εἰς τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἔργου του. Ἡμεῖς, κατόπιν προσεκτικῆς ἐξετάσεως τῆς Γενικῆς πραγματείας, ἔχομεν μορφώσει τὴν γνώμην ὅτι τὸ ἀμείλικτον δρέπανον τοῦ θανάτου ὑπῆρξεν ἐκεῖνο, ποὺ ἠμπόδισε τὸν Tartaglia νὰ ἐκταθῇ πέραν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, ἀκριβῶς τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἦτο ἕτοιμος διὰ τὴν πτῆσιν πρὸς τὰς ὑψηλοτέρας περιοχὰς τῆς ἀλγέβρας.

Raffaele Bombelli

226. Μεταξὺ τῶν ἀλγεβρικῶν ἔργων, ποὺ εἶδον τὸ φῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἐνδόξου XVI αἰῶνος, μεγάλην διάδοσιν ἔλαβε, ὄχι μόνον ὅταν ἠξιώθη τῆς ἐκτυπώσεως, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἀκόμη ἐκυκλοφόρει εἰς χειρόγραφα, ἐκεῖνο ποὺ φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ Raffaele Bombelli. Ὁ Πρόλογος φέρει χρονολογίαν 22 Ἰουνίου 1572. Ὁ Riccardi εἰς τὸ ἔργον του Biblioteca matematica italiana ἀναφέρει δύο ἐκδόσεις: Μίαν τοῦ 1572 καὶ ἄλλην τοῦ 1579. Ἀλλ' ἡ τελευταία δὲν φέρει καμμίαν ἔνδειξιν ὅτι πρόκειται περὶ νέας ἐκδόσεως, ἐνῷ φέρει τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν: «μόλις ἐκδοθὲν πρὸς ὠφέλειαν τῶν σπουδαστῶν τοῦ κλάδου τούτου». Φαίνεται πράγματι παράδοξον ὅτι ἐντὸς μιᾶς μόνον ἑπταετίας κατέστη συνειδητὴ ἡ ἀνάγκη μιᾶς ἀνατυπώσεως. Εἰς τὸ βιβλίον ποὺ φέρει χρονολογίαν 1579 παρεισέφρυσαν ἐξ ἄλλου πολλὰ λάθη, τὰ ὁποῖα σημειώνονται εἰς τὸ τέλος, καὶ τὰ ὁποῖα θὰ ἠδύναντο νὰ διορθωθοῦν ἐὰν ἐπρόκειτο περὶ ἀνατυπώσεως. Ἐκτὸς τούτου, ἐνῷ τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν προβλημάτων ποὺ πραγματεύεται ὁ Bombelli φέρει τὸν ἀριθμὸν CCLXXII, δύο ἐξ αὐτῶν φέρουν τὸν ἀριθμὸν XLIX, ἐνῷ ἐλλείπουν οἱ ἀριθμοὶ CCLVI καὶ CCLVII. Ὅλα αὐτὰ εἶναι ἀβλεψίαι ἀνεξήγητοι εἰς μίαν δευτέραν ἔκδοσιν. Τέλος ἡ ἐξέτασις τοῦ κειμένου σελίδα πρὸς

Μὲ τὸν τρόπον ποὺ βλέπομεν σήμερον τὰ πράγματα, θὰ ἔπρεπε νὰ λυπούμεθα διότι τόσον πολυάριθμοι σελίδες βιογραφικοῦ, πολεμικοῦ ἢ αὐτοαπολογητικοῦ χαρακτῆρος ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν. Δὲν δύναται ὅμως ν' ἀρνηθῇ κανείς, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης προσλαμβάνει μίαν ποικιλίαν καὶ μίαν ζωηρότητα, ἡ ἔλλειψις τῆς ὁποίας προσδίδει ὄψιν ἀπογοητευτικῆς ξηρότητος εἰς ὑψηλὰ κείμενα, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ ἔχουν ὡς πρότυπον τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ὅταν ὁ ἀναγνώστης φθάσῃ εἰς τὴν τελευταίαν σελίδα, αἰσθάνεται ἔντονον πικρίαν, διότι δὲν ἠδυνήθη ὁ σπουδαῖος ἐκεῖνος ἐπιστήμων νὰ φέρῃ εἰς πέρας τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ὡς ἐπιστημονική του διαθήκη, διὰ τῆς προσθήκης τῶν Κεφαλαίων ἐκείνων τῆς ἀλγέβρας, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ προσωπικότης του θὰ προεβάλλετο εἰς ὅλην αὐτῆς τὴν ἐπιβλητικὴν ἀρτιότητα. Μερικοὶ ἐξεδήλωσαν τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Tartaglia παρῃτήθη τῆς ἰδέας νὰ ἐκθέσῃ τὴν θεωρίαν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀφ' ὅτου προέβη ὁ Cardano εἰς τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἔργου του. Ἡμεῖς, κατόπιν προσεκτικῆς ἐξετάσεως τῆς Γενικῆς πραγματείας, ἔχομεν μορφώσει τὴν γνώμην ὅτι τὸ ἀμείλικτον δρέπανον τοῦ θανάτου ὑπῆρξεν ἐκεῖνο, ποὺ ἠμπόδισε τὸν Tartaglia νὰ ἐκταθῇ πέραν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, ἀκριβῶς τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἦτο ἕτοιμος διὰ τὴν πτῆσιν πρὸς τὰς ὑψηλοτέρας περιοχὰς τῆς ἀλγέβρας.

Raffaele Bombelli

226. Μεταξὺ τῶν ἀλγεβρικῶν ἔργων, ποὺ εἶδον τὸ φῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἐνδόξου XVI αἰῶνος, μεγάλην διάδοσιν ἔλαβε, ὄχι μόνον ὅταν ἠξιώθη τῆς ἐκτυπώσεως, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἀκόμη ἐκυκλοφόρει εἰς χειρόγραφα, ἐκεῖνο ποὺ φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ Raffaele Bombelli. Ὁ Πρόλογος φέρει χρονολογίαν 22 Ἰουνίου 1572. Ὁ Riccardi εἰς τὸ ἔργον του Biblioteca matematica italiana ἀναφέρει δύο ἐκδόσεις: Μίαν τοῦ 1572 καὶ ἄλλην τοῦ 1579. Ἀλλ' ἡ τελευταία δὲν φέρει καμμίαν ἔνδειξιν ὅτι πρόκειται περὶ νέας ἐκδόσεως, ἐνῷ φέρει τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν: «μόλις ἐκδοθὲν πρὸς ὠφέλειαν τῶν σπουδαστῶν τοῦ κλάδου τούτου». Φαίνεται πράγματι παράδοξον ὅτι ἐντὸς μιᾶς μόνον ἑπταετίας κατέστη συνειδητὴ ἡ ἀνάγκη μιᾶς ἀνατυπώσεως. Εἰς τὸ βιβλίον ποὺ φέρει χρονολογίαν 1579 παρεισέφρυσαν ἐξ ἄλλου πολλὰ λάθη, τὰ ὁποῖα σημειώνονται εἰς τὸ τέλος, καὶ τὰ ὁποῖα θὰ ἠδύναντο νὰ διορθωθοῦν ἐὰν ἐπρόκειτο περὶ ἀνατυπώσεως. Ἐκτὸς τούτου, ἐνῷ τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν προβλημάτων ποὺ πραγματεύεται ὁ Bombelli φέρει τὸν ἀριθμὸν CCLXXII, δύο ἐξ αὐτῶν φέρουν τὸν ἀριθμὸν XLIX, ἐνῷ ἐλλείπουν οἱ ἀριθμοὶ CCLVI καὶ CCLVII. Ὅλα αὐτὰ εἶναι ἀβλεψίαι ἀνεξήγητοι εἰς μίαν δευτέραν ἔκδοσιν. Τέλος ἡ ἐξέτασις τοῦ κειμένου σελίδα πρὸς

σελίδα ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ μόνη ἐπενεχθεῖσα μεταβολὴ ἦτο ἡ ἀλλαγὴ τῆς πρώτης σελίδος, τῆς φερούσης τοὺς τίτλους τοῦ βιβλίου.

Ὁ συγγραφεὺς αὐτοῦ φέρεται καταγόμενος ἐκ Βολωνίας, ἀλλὰ παραμένουν ἄγνωστοι αἱ χρονολογίαι τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου του, πρᾶγμα δυνάμενον νὰ ἐξηγηθῇ, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ Bombelli, ὡς ἀσκῶν τὸ ἐπάγγελμα τοῦ ὑδραυλικοῦ μηχανικοῦ, εἶναι ἐνδεχόμενον ν' ἀπέθανεν εἰς κάποιαν τοποθεσίαν, εἰς τὴν ὁποίαν τὸν ἔφερεν ἡ ἐργασία του. Τίποτε ἄλλο δὲν γνωρίζομεν περὶ τῆς ζωῆς του, ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ λ ό κ λ η ρ ο ς ὁ Bombelli, ὁ ἐπιστήμων καὶ ὁ ἄνθρωπος, συνοψίζεται μέσα εἰς ἐκεῖνο τὸ βιβλίον, ποὺ τοῦ ἐξησφάλισε τὴν ἀθανασίαν, συμπληρούμενον ἐνδεχομένως μὲ τὴν ἐξέτασιν τῶν χειρογράφων, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία κατεδείχθη ἐκ τῆς ἀνευρέσεως ἑνὸς ὁλοκλήρου γεωμετρικοῦ μέρους, ποὺ δὲν ἔδωσεν ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸν τύπον, ἐπειδὴ εἶχε σκοπὸν νὰ τὸ ἐπεξεργασθῇ ἀκόμη περισσότερον. Τῆς τιμῆς τῆς ἐκτυπώσεως ἔτυχε πάντως ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας.

Διὰ νὰ γράψῃ τὸ βιβλίον του ὁ Bombelli, ἐπωφελήθη προγενεστέρων ἔργων, τὰ ὁποῖα ἀπαριθμεῖ μὲ ἐντιμότητα. Ἕνα ἐξ αὐτῶν ἔχει ὡς συγγραφέα τὸν Mohammed ibn Musa, τὸ ἀναφέρει δὲ διότι παρέχει τὰ ἀπαραίτητα στοιχεῖα πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς ἐτυμολογίας τῆς λέξεως «ἄλγεβρα». Ἀναφέρει κατόπιν τὴν Summa τοῦ Pacioli καὶ τὰ γραπτὰ τῶν Cardano, Tartaglia καὶ L. Ferrari*, ἐνῷ ματαίως θ' ἀνεζήτει κανεὶς τὸ ὄνομα τοῦ συμπατριώτου του S. dal Ferro. Μεταξὺ τῶν γάλλων ἐνθυμεῖται τὸν Fineo καὶ κάποιον Boglione, τοῦ ὁποίου ὁ προσδιορισμὸς εἶναι δύσκολος. Ἀκολουθοῦν οἱ γερμανοί, Stiefel καὶ Schreiber (ἂν πρέπῃ νὰ ἐννοηθῇ οὕτω τὸ ὄνομα Scribellio). Τελευταῖον ἀναφέρει ἕνα ἑλληνικὸν ἔργον «συγγραφὲν ἀπὸ κάποιον Διόφαντον ἀλεξανδρινόν, ἕλληνα συγγραφέα, ζήσαντα τὴν ἐποχὴν τοῦ Antonin Pio». Τὸ ἔργον αὐτὸ ἐγνώρισεν ἀσφαλῶς εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ, μετέφρασε μάλιστα τὰ πέντα πρῶτα βιβλία μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φίλου του, τὸν ὁποῖον ἀναφέρει : «Messer Antonio Pazzi, Reggiano, pubblico lettore delle Mathematiche in Roma» (ἀπὸ 1567 ἕως 1575). Σχετικῶς μὲ τὴν ἐνδιαφέρουσαν αὐτὴν δήλωσιν, πρέπει προπάντων νὰ ὑπενθυμίσωμεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ Φεβρουαρίου 1464 ὁ διάσημος Regiomontano (βλ. Τόμ. I, § 182) εἶχεν ἀνακαλύψει εἰς μίαν βιβλιοθήκην τῆς Βενετίας τὰ 6 σωζόμενα βιβλία τ ῶ ν Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν τοῦ Διοφάντου. Παρῆλθεν ὅμως χρονικὸν διάστημα μεγαλύτερον τοῦ αἰῶνος πρὶν δοθῇ δημοσίως δεῖγμα, ὅτι ἐπεδόθησαν εἰς τὴν μελέτην του. Ἀδιαφιλονί-

* Ὁ Bombelli δὲν ὑπεισέρχεται εἰς τὴν περίφημον διένεξιν τὴν σχετικὴν μὲ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς λύσεως τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων. Λέγει μόνον ὅτι ὁ Tartaglia ἦτο «ἀπὸ χαρακτῆρος τόσον ἐπιρρεπὴς εἰς τὸ νὰ κακολογῇ, ὥστε ὅταν ἤθελε νὰ ἐξάρῃ τὸν ἑαυτόν του ὡς ὑπόδειγμα ἐντιμότητος, ἐκακολόγει τοὺς ἄλλους».

κητος εἶναι λοιπὸν ἡ τιμὴ ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸν Bombelli, διότι πρῶτος* (ὅπως θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον) ἔθεσεν εἰς κυκλοφορίαν ἰδέας καὶ μεθόδους λησμονημένας καὶ παρημελημένας ἐπὶ ὁλοκλήρους αἰῶνας.

Παρατηρητέον τέλος, ὅτι, κατὰ τὸν μηχανικὸν τῆς Βολωνίας, τὸ ἔργον τοῦ Διοφάντου φέρεται ὡς ἀποτελουμένον ἀπὸ ἑ π τ ὰ βιβλία. Ἡ ἔρευνα ὅμως ὅλων τῶν ὑφισταμένων χειρογράφων, ἡ ὁποία ἔλαβε χώραν κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῆς ἐργασίας ἡ ὁποία ὡδήγησε τὸν P. Tannery εἰς τὴν κριτικὴν ἔκδοσιν τοῦ διοφαντικοῦ ἔργου, ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ δήλωσις τοῦ Bombelli δὲν εἶναι παρὰ «lapsus calami» (ὀλίσθημα γραφίδος)· ἀντὶ δηλαδὴ νὰ γράψῃ 6, ἔγραψεν 7. Περισσότερον παράδοξος καὶ ἀκόμη περισσότερον δυσεξήγητος εἶναι μία ἄλλη δήλωσίς του, ὅτι δηλαδὴ ὁ Διόφαντος ἐδιδάχθη τάχα τὴν ἐπιστήμην του ἀπὸ τοὺς Ἰνδούς. Ἀφίνομεν εἰς ἄλλους ν' ἀναζητήσουν τὸν λόγον αὐτῆς τῆς μαθητείας ἢ ν' ἀποδείξουν τὸ ἀβάσιμον ἑνὸς τοιούτου ἰσχυρισμοῦ.

227. Ἀπὸ τὰ τρία Βιβλία, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ Ἄ λ γ ε β ρ α τοῦ Bombelli, τὸ πρῶτον εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ἀφιερωμένον εἰς τὸν λογισμὸν μὲ δυνάμεις καὶ ρίζας. Ρίζαι ἐφαρμοζόμεναι εἰς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι δυνάμεις τῆς ἰδίας τάξεως, καλοῦνται sorde (κωφαὶ) ἢ indiscrete (ἀδιάκριτοι). Γενικῶς τὰς ρίζας παριστᾷ ὁ Bombelli μὲ τὸ γράμμα R, ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὰ γράμματα q ἢ c, πρὸς δήλωσιν τῆς τετραγωνικῆς (quadrata) ἢ κυβικῆς ρίζης (cubica)· Ὁ πολλαπλασιασμὸς δηλοῦται ἄλλοτε μὲ τὴν λέξιν via ἄλλοτε μὲ τὴν λέξιν per. Π.χ. ἡ γραφὴ R.q.49 via R.q.5. κάνει R.q.245 καὶ σημαινει μὲ σημερινὴν γραφήν:

$$\sqrt{49}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{245}.$$

Ὅταν ὁ Bombelli πρόκειται νὰ γράψῃ τὴν ρίζαν πολυωνυμικῆς ἐκφράσεως, ἐγκλείει τὴν τελευταίαν μεταξὺ δύο L, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἀνεστραμμένον, χρησιμευόντων ὡς παρενθετικῶν σημείων.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἐξαγωγῆς τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν, ὁ Bombelli παρατηρεῖ ὀρθῶς ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 2, 3, 7, καὶ 8, ἐνῷ «οἱ κύβοι δύνανται νὰ λήγουν εἰς

* Ὁ Libri (Histoire des Sciences mathénatiques en Italie, t. III, Paris 1840, σ. 182, σημείωσις) εἶπεν ὅτι ὑφίστατο εἰς τὴν Αὐλικὴν Βιβλιοθήκην τῆς Φλωρεντίας μία ἰταλικὴ μετάφρασις τῆς Ἀ λ γ έ β ρ α ς τοῦ Διοφάντου, προγενεστέρα ἐκείνης τοῦ Bombelli. Κατόπιν παρακλήσεώς μου ὁ καθηγητὴς L. Cavazzon ἔκαμεν ἐπ' αὐτοῦ ἔρευναν εἰς τὰς Βιβλιοθήκας τῆς Φλωρεντίας καὶ δὲν ἐχρειάσθη πολὺν χρόνον διὰ νὰ τὴν ἀνεύρῃ, εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην, ὅπου φέρει τὴν ἀκόλουθον ἔνδειξιν: Palatino 625 [432, E. 5, 6, 36]. Σχεδὸν συγχρόνως ὁ A. Agostini ἐμελέτησε τὸ αὐτὸ κείμενον καὶ κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τοῦτο ἀπετελέσθη ἀπὸ τὰς σημειώσεις ποὺ ἐλάμβανεν ὁ Pazzi ἐνῷ ἐμελέτα μαζὺ μὲ τὸν Bombelli τὸ ἔργον τοῦ Διοφάντου. Βλ. καὶ ἄρθρον: Un commento su Diofanto, δημοσιευθὲν εἰς Mas. Palat., 625 (Archeion, t. X1,1929).

ὅλα τὰ ψηφία». Ἡ ἐξαγωγὴ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ἐκτελεῖται μὲ μίαν μέθοδον, ἡ ὁποία κατ' οὐσίαν συμπίπτει μὲ ἐκείνην ποὺ ἐφαρμόζομεν σήμερον, ὅταν θέλωμεν νὰ μετασχηματίσωμεν μίαν ἀσύμμετρον τετραγωνικὴν ρίζαν εἰς συνεχὲς κλάσμα. Ἀποδεικνύει δὲ ὁ συγγραφεὺς περαιτέρω γεωμετρικῶς τὸν κανόνα τῶν σημείων διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν, τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν ποσοτήτων θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν, ἐκθέτει δὲ ἐν συνεχείᾳ μερικὰς ἰδιότητας τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, τῶν ὁποίων τὴν θεωρίαν ἀποκατέστησεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων.

Ἐνῷ μέχρι τοῦ σημείου τούτου ὁ Bombelli ἐβάδισεν ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τῶν προγενεστέρων, εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ I Βιβλίου ἐπιφέρει εἰς τὴν ἄλγεβραν μίαν θαυμασίαν κίνησιν πρὸς τὰ ἐμπρός, αἰρόμενος εἰς τὴν στάθμην δημιουργοῦ τοῦ λογισμοῦ διὰ μιγάδων ἀριθμῶν. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν εἰσήγαγε τὰς ἐνδόξους ἐκφράσεις piu di meno (πλέον τοῦ ἐλάττονος) καὶ meno di meno (ἔλαττον τοῦ ἐλάττονος) διὰ νὰ δηλώσῃ τὰς μονάδας $+i$ καὶ $-i$. Τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς παριστᾷ συντετμημένως pdm καὶ mdm· οὕτω ἡ παράστασις:

Rc ⌊ 2 p d m 2 ⌉

εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἑξῆς σημερινὴν γραφήν:

$$\sqrt[3]{2+2i}.$$

Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν πράξεων μὲ ἀριθμοὺς αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἀποκαθιστᾷ ἕνα σύνολον θεμελιωδῶν κανόνων, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν καμμίαν διαφορὰν ἀπὸ ἐκείνους τοὺς ὁποίους ἐκφράζομεν σήμερον μὲ τοὺς ἀναλόγους τύπους:

$$(\pm 1)\,i = \pm 1,\quad (\pm 1)\,(-i) = \mp i,$$
$$(+i)\,(+i) = -1,\quad (+i)\,(-i) = 1,$$
$$(-i)\,(+i) = 1,\quad (-i)\,(-i) = -1.$$

Τοιουτοτρόπως ἀπέκτησε τὰ μέσα διὰ νὰ ἐξηγήσῃ πῶς, εἰς τὴν ἀνάγωγον περίπτωσιν τῶν κυβικῶν ριζῶν, μία ποσότης πραγματικὴ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μορφὴν φανταστικήν. Π.χ. ὁ συνήθης τύπος ἐπιλύσεως ἐφαρμοζόμενος εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (\alpha)$$

παρέχει:

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}, \qquad (\beta)$$

ἐπειδὴ ὅμως ἔχομεν:

$$2 \pm 11\,i = (2 \pm i)^3, \qquad (\gamma)$$

ἡ ἔκφρασις (β) γίνεται :

$$x = (2+i) + (2-i) = 4, \qquad (\delta)$$

ὅπου δὲν ὑπάρχουν πλέον ἴχνη φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

228. Καταφανὴς εἶναι ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου ἀπὸ τοῦ Βιβλίου II τοῦ ἔργου ποὺ ἐξετάζομεν, Βιβλίου πραγματευομένου τὴν θεωρίαν καὶ τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Ἐκδηλοῦται δὲ ἐμφατικώτερον ἡ ἐπίδρασις αὐτη εἰς τὴν ὀνοματολογίαν, διότι, ἐνῷ ἀπὸ μακροῦ ὁ ἄγνωστος ἐδηλοῦτο (ὄχι μόνον ἐν Ἰταλίᾳ) μὲ τὴν λέξιν cosa (πρᾶγμα), ὁ Bombelli, απομακρυνόμενος τῆς ἀραβικῆς ἐπιδράσεως καὶ ἀκολουθῶν τὴν ἑλληνικὴν παράδοσιν, χρησιμοποιεῖ τὰς λέξεις tanto (τόσον) ἢ quantità (ποσότης). Καὶ ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου ὠνομάζετο πρὸ αὐτοῦ censo, αὐτὸς χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν potenza (δύναμις), τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦν αἱ λέξεις cubo (κύβος), potenza di potenza (δυναμοδύναμις) κλπ. Ἡ ἰδία ἐπίδρασις εἶναι καταφανὴς καὶ εἰς τὸν τρόπον παραστάσεως τοῦ ἀγνώστου καὶ τῶν δυνάμεών του. Ὑπενθυμίζομεν, πράγματι, ὅτι ὁ Διόφαντος διὰ νὰ παραστήσῃ τὸν ἄγνωστον χρησιμοποιεῖ εἰδικὸν σύμβολον, τὸ ὁποῖον οἱ νεώτεροι ἐκδόται ἀπέδωσαν μὲ ἕνα τελικὸν σίγμα, δηλαδὴ μὲ τὸ γράμμα ς. Εἰς τὰ σωζόμενα χειρόγραφα ὁ Bombelli χρησιμοποιεῖ ἐπίσης εἰδικὸν σύμβολον προσομοιάζον πρὸς ἕνα U. Ἀλλὰ εἰς τὸ τυπωθὲν ἔργον του ἐπροτίμησε μίαν μέθοδον ἐντελῶς νέαν, ἐχρησιμοποίησε δηλαδὴ ἕνα ἡμικύκλιον κοῖλον πρὸς τὰ ἄνω, ἐντὸς τοῦ ὁποίου (καὶ τοῦτο ἀποτελεῖ πρωτότυπον καινοτομίαν ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφιστῶμεν τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου) ἐγράφοντο οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, ..., πρὸς δήλωσιν τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων τοῦ ἀγνώστου. Μέγα εἶναι τὸ βῆμα προόδου, ποὺ συνετελέσθη τοιουτοτρόπως, διότι δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης ἤρχισαν νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ἐκθέται συστηματικῶς εἰς τὴν ἄλγεβραν.

Εἰς συμπλήρωσιν τῶν συμβατικῶν τούτων καινοτομιῶν, ὁ Bombelli ἀποκαθιστᾷ τὸν νόμον τῶν ἐκθετῶν, ἤτοι τὴν σχέσιν :

$$x^{\mu} \,.\, x^{\nu} = x^{\mu+\nu},$$

τὴν ὁποίαν ἐκεῖνος γράφει :

$$\underbrace{\mu}\ \text{via}\ \underbrace{\nu} = \underbrace{\mu+\nu}$$

Οἱ τύποι τοῦ Bombelli δὲν ὑστεροῦν πολὺ εἰς ἁπλότητα καὶ βολικότητα, συγκρινόμενοι μὲ τοὺς ἰδικούς μας. Παράδειγμα : τὸ γινόμενον τῆς παραστάσεως :

$$\overset{3}{\bar{1}}\cdot p\cdot \overset{2}{\bar{4}}\cdot m\cdot 3 \qquad \text{ἤτοι} \qquad x^3 + 4x^2 - 3,$$

ἐπὶ τὴν παράστασιν :

$$\overset{1}{\breve{2}}\cdot p\cdot \overset{4}{\breve{8}}\cdot m\cdot 5 \qquad \text{ἤτοι} \qquad 2x + 8x^4 - 5,$$

δίδεται ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν :

$$\overset{7}{\breve{8}}\, p\cdot \overset{6}{\breve{32}}\cdot m\cdot \overset{4}{\breve{22}}\cdot p\cdot \overset{3}{\breve{3}}\cdot m\cdot \overset{2}{\breve{20}}\cdot m\cdot \overset{1}{\breve{6}}\cdot p\cdot 15,$$

ἡ ὁποία ὑπὸ σημερινὴν γραφὴν εἶναι :

$$8\,x^7 + 32\,x^6 - 22x^4 + 3x^3 - 20\,x^2 - 6x + 15.$$

Σημειωτέον ὅτι, ἐπειδὴ τὰ γράμματα p καὶ m, ἐχρησιμοποιήθησαν ὡς σύμβολα τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, δὲν εἶναι πλέον δυνατὴ ἡ χρῆσις γραμμάτων πρὸς γενικὴν παράστασιν δεδομένων μεγεθῶν μὲ τὸ σύστημα Bombelli. Αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον τὰ ὑπ' αὐτοῦ λυόμενα προβλήματα ἔχουν ὅλα τὰ δεδομένα ἐκπεφρασμένα δι' ἀριθμῶν καὶ οὐχὶ γραμμάτων. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἀποφεύγει ἀνάρμοστα ἀποτελέσματα, ἀποκαθιστῶν, μὲ ἔντεχνον ἀνάλυσιν, τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύψαντος ἐκ τῆς λύσεως ἑνὸς προβλήματος καὶ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων αὐτοῦ, καὶ συνάγων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κανόνας ἐφαρμοσίμους εἰς πᾶν ἄλλο σύνολον ἀριθμητικῶν δεδομένων, πρᾶγμα ποὺ — πρέπει νὰ σημειώσωμεν — οὐδέποτε ἔκαμεν ὁ Διόφαντος, οὔτε καὶ ἄλλοι.

Προκύπτει ἐξ ὅλων τούτων ὅτι, ἂν καὶ ἀρκετὰ τελειότερον, τὸ συμβολικὸν σύστημα τοῦ Bombelli παρουσιάζει τὴν ἰδίαν δυσκολίαν μὲ τὸ τοῦ Διοφάντου, νὰ εἶναι δηλαδὴ ἐφαρμόσιμον εἰς ἕνα μόνον ἄγνωστον. Εἰς προβλήματα, ὅπου εἰσέρχονται περισσότεροι ἄγνωστοι, ὁ Bombelli, ὅπως καὶ ὁ Ἕλλην μαθηματικός, ἦτο ἠναγκασμένος νὰ καταφύγῃ εἰς διάφορα τεχνάσματα διὰ νὰ ἐκφράσῃ ὅλους τοὺς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος συναρτήσει ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (ἢ εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἑνὸς βοηθητικοῦ ἀγνώστου). Ἀλλ' ἂς σπεύσωμεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀκριβῶς εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ὁ μαθηματικὸς τῆς Βολωνίας ἔδωσε περιφανῆ δείγματα, ὅτι εἶναι ἄξιος μαθητὴς τοῦ πρίγκηπος τῶν ἑλλήνων ἀριθμητικῶν.

Τὸ συμβολικὸν σύστημα τοῦ Bombelli ἀποδεικνύει πόσον βραδέως ἐκινεῖτο ἡ ἐξέλιξις τῆς ἀλγέβρας, διὰ νὰ περάσῃ ἀπὸ τὴν συγκεκομμένην κατάστασιν εἰς τὴν σημερινήν, εἰς ὅλους μας γνωστήν, μορφήν. Πρὸ πάντων μαρτυρεῖ μίαν τάσιν πρὸς ἐπέκτασιν εἰς τὰ πολυώνυμα, διατεταγμένα κατὰ τὰς δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς, τῶν κανόνων ποὺ ἐδόθησαν προηγουμένως διὰ τὴν ἐκτέλεσιν πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν γραφομένων κατὰ δεκαδικὸν σύστημα. Βεβαιοῦται ὅμως ἡ τάσις αὕτη κατὰ τὸν καλύτερον τρόπον ἀπὸ τὸν χειρισμὸν τῶν ἐξισώσεων (τουτέστι ἀπὸ τὴν πρᾶξιν ποὺ ὁ Bom-

belli ὀνομάζει agguagliare, δηλαδὴ «ὁμάλυνσιν») ὑποτιθεμένων πάντοτε ρητῶν. Ὁ χειρισμὸς αὐτὸς ἀρχίζει μὲ τὴν πρᾶξιν «ἄρσις κλασμάτων» καὶ προχωρεῖ μὲ τὴν σπουδὴν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $ax^{\mu} = bx^{\nu}$. Αἱ ἐξισώσεις αὗται λύονται μὲ μίαν διαίρεσιν, ἐνδεχομένως ἀκολουθουμένην μὲ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης, καὶ εἶναι ἄξιον σημειώσεως ὅτι ὁ Bombelli, ὅπως καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς του, ἀποκλείει πάντοτε τὰς μηδενικὰς ρίζας.

229. Προτοῦ τὸν ἀκολουθήσωμεν εἰς ὅσα λέγει περὶ ἐξισώσεων μὲ ὅρους περισσοτέρους τῶν δύο, παρατηροῦμεν ὅτι ὡς πιστὸς ὀπαδὸς τοῦ Διοφάντου καὶ τῶν ἀράβων μαθηματικῶν, ἐξετάζει ἀποκλειστικῶς ἐξισώσεις μὲ θετικοὺς συντελεστάς, πρᾶγμα ἔχον ὡς συνέπειαν τὴν ἀνάγκην διακρίσεως ἀριθμοῦ περιπτώσεων ταχέως αὐξανομένου μὲ τὸν βαθμὸν τῶν θεωρουμένων ἐξισώσεων. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις, σχεδὸν κατ' ἀνάγκην, εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ ἐξετάσῃ ἐξισώσεις μὲ δεύτερον μέλος ἴσον πρὸς μηδέν, ἀλλά, μὴ γενικεύων αὐτὸ τὸ σύστημα γραφῆς, ἀποδεικνύει ὅτι δὲν ἠδυνήθη νὰ ἐκτιμήσῃ τὴν ἀξίαν ἑνὸς πολυτίμου λίθου πεσόντος τυχαίως πρὸ τῶν ποδῶν του.

Ἐκ τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων θεωρεῖ τὰς τρεῖς κλασσικὰς μορφάς:

$$x^2 + px = q, \quad x^2 = px + q, \quad x^2 + q = px.$$

Ὅπου p, q ἀριθμοὶ θετικοί. Αἱ ἐν λόγῳ ἐξισώσεις λύονται μὲ τὸ σύνηθες τέχνασμα τῆς ἀναγωγῆς των εἰς τὴν μορφήν:

$$(x + a)^2 = b,$$

τὸ ὁποῖον δικαιολογεῖ μὲ γεωμετρικοὺς συλλογισμούς. Γενικῶς, ἑκάστης ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ θεωρεῖ μίαν μόνον ρίζαν. Παρὰ ταῦτα, ἐνώπιον τῆς ἐξισώσεως,

$$x^2 + 12 = 8x,$$

παρατηρεῖ, ὅτι αὕτη πληροῦται τόσον ὑπὸ τῆς τιμῆς $x = 2$, ὅσον καὶ τῆς $x = 6$. Ἀρκεῖται ὅμως εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι «καὶ ὁ ἕνας τρόπος καὶ ὁ ἄλλος εἶναι καλός»· τοιουτοτρόπως ἐπλησίασε τόσον πολὺ μίαν ἀνακάλυψιν, ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἀρκετὴ νὰ τοῦ προσπορίσῃ ὄχι μικρὰν δόξαν. Προχωρεῖ κατόπιν ὁ Bombelli εἰς τὰς διτετραγώνους καὶ δικύβους ἐξισώσεις, διακρίνων ἑκατέρου εἴδους τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀνωτέρω τρεῖς μορφὰς τῶν δευτεβαθμίων.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὁ συγγραφεὺς μεταβαίνει εἰς τὰς ἐξισώσεις τρίτου βαθμοῦ, τῶν ὁποίων διακρίνει τὰς ἀκολούθους ἓξ μορφάς:

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q, \quad x^3 + q = px$$
$$x^3 + px^2 = q, \quad x^3 = px^2 + q, \quad x^3 + q = px^2.$$

Διὰ τὴν λύσιν τῶν τριῶν πρώτων, ἐφαρμόζει τὸ σύνηθες τέχνασμα

τῆς διασπάσεως τοῦ ἀγνώστου εἰς δύο ὅρους, τέχνασμα τὸ ὁποῖον δικαιολογεῖ μέσῳ καταλλήλων γεωμετρικῶν σκέψεων. Τὰς ὑπολοίπους ἀνάγει εἰς τὰς πρώτας διὰ μιᾶς ἀντικαταστάσεως τῆς μορφῆς $\chi = q/z$ Παράδειγμα: ἐκ τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3 + 8 = x^2,$$

μεταβαίνει, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x = 8/z$, εἰς τὴν :

$$z^3 + 64 = 8z,$$

Ἐπὶ περιπτώσεων, κατὰ τὰς ὁποίας αἱ ῥίζαι, ἂν καὶ πραγματικαί, ἐμφανίζονται ὑπὸ φανταστικὴν μορφήν, ὁ Bombelli ἐκθέτει μερικὰς εὐφυεῖς σκέψεις, ἱκανὰς ν' ἀποδείξουν ὅτι οὗτος διέγνωσε καθαρὰ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἀναγώγου περιπτώσεως. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ὑπάγεται ἡ ἐξίσωσις :

$$x^3 = 9x + 9,$$

εἰς τὴν ὁποίαν, παρατηρεῖ ὁ Bombelli, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας.

Ὅταν ἡ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις περιλαμβάνῃ 4 ὅρους, λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν σημείων τῶν συντελεστῶν (ἐξ ὧν ὁ τῆς τρίτης δυνάμεως πάντοτε μονάς), αἱ διάφοροι μορφαὶ ἀνάγονται εἰς ἑπτά, ἑκάστη, τῶν ὁποίων τρέπεται εἰς τριώνυμον μορφὴν δι' ἐφαρμογῆς τεχνασμάτων μὴ διαφερόντων κατ' οὐσίαν ἀπὸ τὰ σήμερον ἐφαρμοζόμενα· ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις :

$$x^3 + 9x^2 + 12x = 56,$$

τὴν ὁποίαν ὁ Bombelli γράφει ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(x + 3)^3 = 15(x + 3) + 38.$$

Θεωρουμένου τοῦ διωνύμου $x + 3$ ὡς νέου ἀγνώστου y, ἡ τελευταία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$y^3 = 15y + 38.$$

Ἐκ τῶν μετασχηματισμῶν τούτων ὡδηγήθη ὁ Bombelli εἰς τὴν διατύπωσιν παρατηρήσεων γενικοῦ χαρακτῆρος ἐπὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων, παρατηρήσεων αἱ ὁποῖαι ἀποδεικνύουν μὲ πόσην ἐμβρίθειαν ἐμελέτησε τὸ ὅλον θέμα.

230. Στρεφόμενος ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὰς ἐξισώσεις τετάρτου βαθμοῦ, ὁ Bombelli διατυπώνει τὴν γνώμην ὅτι ὁ Διόφαντος εἶχε πραγματευθῆ τὴν λύσιν αὐτῶν εἰς τὰ ἀπολεσθέντα Βιβλία τῶν Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν· γνώμη βεβαίως ἀληθοφανὴς δι' ὅσους ἔχουν μελετήσει τὸ ἔργον τοῦ μεγάλου Ἕλληνος ἀριθμητικοῦ, ἀλλὰ μὴ δυναμένη νὰ θεμελιωθῇ ἐπὶ τῇ βάσει ὑπαρχόντων ἱστορικῶν τεκμηρίων. Ἡ τύχη ἠθέλησεν, ὥστε τὸ ὑποτιθέμενον αὐτὸ κενὸν νὰ πληρωθῇ αἰσίως ἀπὸ τὸν L. Ferrari, τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ὁποίου

ὁ Bombelli ἐπεχείρησε ν' ἀναπτύξῃ καὶ πλουτίσῃ διὰ παραδειγμάτων, ἐφαρμόζων τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν τῆς λύσεως εἰς τοὺς διαφόρους τύπους ἐξισώσεων, τοὺς ὁποίους ἀναγκάζεται νὰ διακρίνῃ βάσει τοῦ πλήθους τῶν ὅρων καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων τῶν συντελεστῶν.

Ὡς πρὸς τὰς διαφόρους ἐξεταστέας μορφάς, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

δὲν ἠμπορεῖ νὰ στερῆται σταθεροῦ ὅρου, καθ' ὅσον τότε ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τριτοβάθμιον. Οὔτε δύναται νὰ στερῆται δευτέρου (p) καὶ τετάρτου (r) ὅρου συγχρόνως, καθ' ὅσον ἀνάγεται εἰς διτετράγωνον, ἔτι μᾶλλον δὲν δύναται νὰ στερῆται συγχρόνως τῶν τριῶν ὅρων p, q, r, διότι τότε θὰ κατήντα διώνυμος. Ἔχομεν λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν: τ ρ ι ω ν ύ μ ο υ ς, τ ε τ ρ α ω ν ύ μ ο υ ς καὶ π λ ή ρ ε ι ς ἐξισώσεις τετάρτου βαθμοῦ. Αἱ πρῶται, βάσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων ποὺ περιέχουν, παρουσιάζουν μόνον τοὺς ἑξῆς δύο τύπους:

$$x^4 + px^3 + s = 0,$$
$$x^4 + rx + s = 0.$$

Ἐπειδὴ ὁ Bombelli ἀποκλείει τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ εἶναι θετικοί, διακρίνει τὰς ἀκολούθους τρεῖς μορφάς:

$$x^4 + s = px^3, \quad x^4 + px^3 = s, \quad x^4 = px^3 + s,$$
$$x^4 + s = rx, \quad x^4 + rx = s, \quad x^4 = rx + s.$$

Ὑπάρχουν δὲ εἰς τὸ ἔργον ποὺ ἐξετάζομεν παραδείγματα ὅλων τῶν ἀνωτέρω τύπων. Αἱ τετραώνυμοι ἐξισώσεις, ὡς ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων ποὺ περιέχουν, κατατάσσονται εἰς τρεῖς κατηγορίας, χαρακτηριζομένας διὰ τῶν τύπων:

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0,$$
$$x^4 + px^3 + rx + s = 0,$$
$$x^4 + px^3 + qx^2 + s = 0.$$

Ἂν λάβωμεν κατόπιν ὑπ' ὄψιν τὰ σημεῖα τῶν συντελεστῶν, βλέπομεν ὅτι, ἀποκλειομένης τῆς ὑποθέσεως νὰ εἶναι ὅλοι θετικοί, κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω κατηγορίας δίδει γένεσιν εἰς 7 περιπτώσεις, καὶ αἱ τρεῖς λοιπὸν ὁμοῦ εἰς 21 περιπτώσεις. Ἐὰν τέλος ἡ ἐξίσωσις εἶναι πλήρης, λαμβανομένων πάντοτε ὑπ' ὄψιν τῶν σημείων τῶν συντελεστῶν, φθάνομεν εἰς 17 περιπτώσεις, εἰς 15 ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρονται τὰ πολυάριθμα παραδείγματα ποὺ πραγματεύεται ὁ Bombelli. Εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ παραδείγματα εἶναι ἐφαρμόσιμος ἡ μέθοδος τοῦ Ferrari· παρατηρητέον ἐν τούτοις, ὅτι συχνὰ ὁ Bombelli ἀνάγει προηγουμένως εἰς τετραώνυμον τὴν πλήρη ἐξίσωσιν.

Ὁ σκοπός, τὸν ὁποῖον ἔθεσεν εἰς ἑαυτὸν ὁ μαθηματικὸς τῆς Βολωνίας,

νὰ ἐφαρμόσῃ δηλαδὴ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις τὴν ἀναφερθεῖσαν μέθοδον, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἐπετεύχθη πλήρως. Δὲν ἠμπορεῖ ἐν τούτοις ν' ἀρνηθῇ κανεὶς ὅτι ἡ σταθερὰ χρῆσις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς πληθώραν ἐξισώσεων, διαφερουσῶν μεταξὺ των μόνον κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων καὶ τὰ σημεῖα τῶν συντελεστῶν, καθιστᾷ ἀνιαρὰν τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ μέρους τούτου τοῦ ἔργου ποὺ ἐξετάζομεν. Καὶ προκαλεῖ λύπην τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Bombelli, ὁ ὁποῖος ἔδωσεν ἀπτὰ δείγματα θαυμαστῆς τόλμης εἰς τὸν χειρισμὸν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, ἐδείχθη τόσον ἄτολμος ἐνώπιον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἐάν, ἀντὶ τῶν ἀραβικῶν κειμένων, εἶχε λάβει γνῶσιν τῶν ἰνδικῶν, θὰ εἶχε, χωρὶς ἀμφιβολίαν, ἀναμετρήσει τὴν μεγάλην χρησιμότητα τῆς παραδοχῆς ὅτι οἱ συντελεσταὶ μιᾶς ἐξισώσεως δύνανται καὶ αὐτοὶ νὰ λάβουν ἀρνητικὰς τιμάς, καὶ θὰ εἶχεν οὕτω ἐπιφέρει εἰς τὴν ἄλγεβραν μίαν τελειοποίησιν, τῆς ὁποίας περιττὸν εἶναι νὰ ἐξάρωμεν τὴν σπουδαιότητα.

231. Ἐνῷ εἰς τὸ II ἐκ τῶν Βιβλίων του ὁ Bombelli ἐξέθεσε τὰς μεθόδους χειρισμοῦ ἐξισώσεων ἐπιδεκτικῶν ἀλγεβρικῆς λύσεως, εἰς τὸ III θέτει ὡς σκοπὸν νὰ ἐφαρμόσῃ τὰς μεθόδους αὐτὰς εἰς ὄχι ὀλιγώτερα τῶν 273 ζητημάτων. Εἰς μίαν πρώτην μορφὴν τοῦ ἔργου του (χειρόγραφον μέχρι σήμερον), συμμορφούμενος πρὸς τὰς συνηθείας τῆς ἐποχῆς του, ὁ Bombelli ἐξέλεξε προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς συναλλαγὰς μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων, ἤτοι εἰς ἀγοράς, πωλήσεις, μετατροπάς, ἀνταλλαγάς, τόκους, ὑφαιρέσεις, κραματισμοὺς μετάλλων, σταθμά, ἑταιρικὰς μερίδας, κέρδη καὶ ζημίας, καὶ ἀναρίθμητα ἄλλα παρόμοια. Διατελῶν ὅμως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Διοφάντου (εἰς τὰ Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὰ τοῦ ὁποίου ἕνα μόνον πρόβλημα ἐκφωνεῖται ὑπὸ συγκεκριμένην μορφήν: Τόμος I, § 91), ἀπεφάσισε νὰ θέσῃ ὡς γενικὴν προϋπόθεσιν, ὅπως τὰ δεδομένα εἶναι πάντοτε ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι, αἱ δὲ συνθῆκαι νὰ ἔχουν χαρακτῆρα καθαρῶς θεωρητικόν· καινοτομία εἰς τὴν ὁποίαν ὡδηγήθη ἀσφαλῶς καὶ ἐκ τῶν δυσκολιῶν, τὰς ὁποίας θὰ συνήντησεν εἰς τὴν ἐπινόησιν κοινωνικῶν φαινομένων, δυναμένων νὰ διατυπωθοῦν μὲ ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ, ὅπως ἐφιλοδόξει νὰ κάμῃ.

Ἀλλ' ἡ ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ κορυφαῖος ἕλλην ἀριθμητικὸς ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Βολωνίας δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Τοὐναντίον εἶναι τόσον βαθεῖα, ὥστε, ὑπὸ μίαν ἔννοιαν, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ λεχθῇ ὅτι τὸ Βιβλίον III τῆς Ἀ λ γ έ β ρ ο ς τοῦ Bombelli δὲν εἶναι παρὰ μία ἀναμόρφωσις τῶν σωζομένων Βιβλίων τοῦ ἀρχαίου ἔργου (ὄχι ὀλιγώτερα τῶν 143 προβλημάτων ἔχουν ἀντιγραφῆ ἀπὸ τὸν Διόφαντον) καὶ μία προσπάθεια ἀνασυντάξεως κατὰ διαίσθησιν τῶν ἀποτελεσμάτων. Γίνεται μάλιστα ἡ προσήλωσίς του πρὸς τὸν Διόφαντον

φανερὰ ἀκόμη καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, ὅπου θὰ ἦτο ἐπιθυμητὴ μία μεγαλυτέρα ἀνεξαρτησία τοῦ Bombelli. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἡ σκέψις μας στρέφεται εἰδικῶς εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι καὶ οἱ δύο προαναφερθέντες συγγραφεῖς παραγνωρίζουν τὴν ἀνάγκην τῆς διακρίσεως τῶν προβλημάτων εἰς ὡρισμένα καὶ ἀόριστα καὶ διὰ τοῦτο εἰς ἀμφοτέρους αἱ δύο κατηγορίαι προβλημάτων παρουσιάζονται ἀναμὶξ καὶ θεωρεῖται νόμιμος ἡ συμπλήρωσις τῶν δεδομένων διὰ τῆς προσθήκης, αὐθαιρέτως, νέων συνθηκῶν, δυναμένων νὰ διευκολύνουν τὴν ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ·

Ἐπὶ πλέον: τὸ πρόβλημα τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως συνίσταται, κατὰ τὸν Bombelli ὅπως καὶ τὸν Διόφαντον, εἰς τὴν ἀναζήτησιν μιᾶς ρητῆς θετικῆς λύσεως τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν αἱ σχετικαὶ μέθοδοι καὶ οἱ σχετικοὶ ὑπολογισμοὶ μικρὰν προσφέρουν ὠφέλειαν εἰς τοὺς συγχρόνους ἐργάτας τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, διότι σήμερον ὁ ἐπιδιωκόμενος σκοπὸς τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως εἶναι ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν ἀκεραίων λύσεων δοθέντος προβλήματος. Προσθέτομεν ὅτι εἰς μερικὰς περιπτώσεις ὁ μαθηματικός μας ἀρκεῖται εἰς κλασματικὰς λύσεις, ἐνῷ ὑφίστανται ἀκέραιαι. Οὕτω εἰς τὸ πρόβλημα CLXXXII, τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς τὸ σύστημα:

$$x-z=3(y-z),$$
$$y+z=5(x-z),$$

προτιμᾷ μίαν κλασματικὴν λύσιν, ἀντὶ μιᾶς τῶν ἀκολούθων ἀκεραίων λύσεων:

	x	y	z
(α)	10	8	7
(β)	20	16	14

232. Εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου τὰ προβλήματα διαδέχονται τὸ ἕνα τ' ἄλλο κατὰ τρόπον, τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῇ θεωρητικὸν θεμέλιον, τὴν δὲ φαινομένην ἀταξίαν ἐξηγοῦν μερικοὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται τὰ χειρόγραφα. Τὸ βολικὸν αὐτὸ ἐπιχείρημα δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἐξήγησιν τοῦ αὐτοῦ φαινομένου εἰς τὴν Ἄλγεβραν τοῦ Bombelli. Ἐδῶ τὸ φαινόμενον παρουσιάζεται ὑπὸ τόσον ὀξεῖαν μορφήν, ὥστε ἐὰν κανεὶς ἐπεχείρει νὰ δώσῃ μὲ λογικὴν διάταξιν ἕνα πίνακα περιεχομένων τοῦ III Βιβλίου, θὰ ἦτο ὑποχρεωμένος νὰ ἐγκαταλείψῃ σχεδὸν τελείως τὴν διαδοχικὴν σειρὰν ποὺ ἐτήρησεν ὁ μηχανικὸς τῆς Βολωνίας. Λέγομεν σχεδόν, διότι εἰς τινας περιπτώσεις ἕνα πρόβλημα ἀκολουθεῖ ἕνα ἄλλο, ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ἐφαρμόζεται ἡ λύσις ἐκείνου.

Πολλὰ προβλήματα ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν ἔργον μεταφράζονται εἰς συστήματα ὡρισμένα γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀνή-

κουν εἰς τύπους ἀπαντωμένους εἰς τὰ ἑλληνικὰ Ἀριθμητικὰ ἢ ἄλλους προκύπτοντας ἐξ αὐτῶν μὲ ἁπλῆν αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ ἀναφορικῶς πρὸς συστήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἐπιδεκτικῶν ὅμως ἐπιλύσεως μέσῳ ἐξισώσεων τῶν δύο πρώτων βαθμῶν. Ὁ χῶρος δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατρίψωμεν εἰς προβλήματα ποὺ ὁδηγοῦν εἰς δευτεροβαθμίους καὶ τριτοβαθμίους ἐξισώσεις, θὰ περιορισθῶμεν λοιπὸν εἰς τὸ νὰ ἐπισημάνωμεν τὸ ἀκόλουθον ὑπ' ἀριθμὸν CCLV, τὸ ὁποῖον ἄγει εἰς ἐξίσωσιν 4ου βαθμοῦ: «Εὑρεῖν πέντε ἀριθμοὺς ἐν ἀναλογίᾳ καὶ τοιούτους, ὥστε διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τεσσάρων οἱωνδήποτε διὰ τοῦ πέμπτου καὶ λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε προκυπτόντων πηλίκων, νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ἀριθμὸν 836». Τὸ πρόβλημα εἶναι, ὅπως βλέπομεν, ἀόριστον· ὁ Bombelli τὸ μετατρέπει εἰς ὡρισμένον δεχόμενος ὅτι ὁ μικρότερος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὴν μονάδα. Τοῦτο εἶναι ἀνωφελές· διότι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^4+2x^3+3x^2+4x+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}=836,$$

τὴν ὁποίαν ὁ Bombelli, διὰ νὰ λύσῃ, μετασχηματίζει προηγουμένως ὡς ἑξῆς:

$$x^8+2x^7+3x^6+4x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1=841x^4,$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=29x^2,$$

$$x^4+x^3+2\frac{1}{4}x^2+x+1=30\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2+\frac{1}{2}x+1=5\frac{1}{2}x,$$

$$x^2+1=5x.$$

Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνει ὅτι εἶναι

$$x=\frac{5}{2}+\sqrt{5\frac{1}{4}}.$$

Μὲ μεγαλυτέραν ἁπλότητα μέσων θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχῃ κανεὶς τὸν σκοπόν του!

Δὲν ὑπερβαίνουν τὸν ἀριθμὸν 4 τὰ προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, ποὺ πραγματεύεται ὁ Bombelli, ἐνῷ πολὺ περισσότερα εἶναι τὰ προβλήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ *.

* Ἀναφέρονται εἰς τὸν Τόμον II τοῦ βιβλίου τοῦ Dickson: History of the theory of numbers (Waschington, 1920, σ. 444, 472, 478, 517, 524 καὶ 599).

Κατὰ μέγα μέρος τὰ προβλήματα αὐτὰ ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ τὸν Διόφαντον καὶ λύονται εἰς ἀριθμοὺς ρητούς. Μεταξὺ τούτων ἄξια εἰδικῆς μνείας τυγχάνουν ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὰς «διπλοϊσότητας» (βλ. Τόμον Ι, § 91) τουτέστι εἰς τὸ γενικὸν ζήτημα νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου τοῦ εἰσερχομένου εἰς δύο συναρτήσεις αὐτοῦ πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ τοιαύτη, ὥστε νὰ προκύπτουν δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι. Ὁ Bombelli προχωρεῖ περισσότερον τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ, ἐξετάζων, ἀπὸ ἀναλόγου ἀπόψεως, ἰσότητας ποὺ θὰ ἠδύναντο νὰ ὀνομασθοῦν «τριπλαῖ» καὶ «τετραπλαῖ», καὶ μάλιστα βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου. Ἀναφέρομεν ὡς παράδειγμα τὴν ἔρευναν τριῶν ἀριθμῶν x, y, z τοιούτων ὥστε νὰ καθιστοῦν κύβους τὰς τρεῖς ἐκφράσεις :

$$(x+y+z)^3+x,$$
$$(x+y+z)^3+y,$$
$$(x+y+z)^3+z.$$

233. Μὲ τὸ Βιβλίον ΙΙΙ κλείει τὸ καθαρῶς ἀλγεβρικὸν μέρος τοῦ ἔργου τοῦ Bombelli, τὸ μοναδικὸν κριθὲν ὑπὸ τοῦ ἰδίου ὡς ἱκανοποιητικόν, ὑπὸ ἔποψιν τελειότητος, διὰ νὰ δοθῇ εἰς τὸν τύπον. Τὸ ὑπόλοιπον διαιρεῖται εἰς δύο Βιβλία καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μέγαν ἀριθμὸν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Πολλὰ ἀναφέρονται εἰς τὴν κοινὴν γεωμετρίαν καὶ λύονται κατὰ τρόπον διάφορον, ἐνίοτε μάλιστα καλύτερον τοῦ εὐκλειδείου. Προκειμένου νὰ ἐπιχειρήσωμεν οἱανδήποτε σύγκρισιν μεταξὺ τῶν δύο συγγραφέων, πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ μαθηματικὸς τῆς Βολωνίας δὲν ἦτο δεσμευμένος, ὅπως ὁ Εὐκλείδης, νὰ ἐφαρμόζῃ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἀποκλειστικῶς θεωρήματα ἀποδειχθέντα προηγουμένως. Πολὺ κομψὴ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ Bombelli ὑποδεικνυομένη κατασκευὴ τῆς διαιρέσεως εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη. Πολυάριθμα εἶναι τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα σήμερον θὰ κατετάσσοντο εἰς τὸν γραφικὸν λογισμὸν καὶ τὰ ὁποῖα ὁ συγγραφεὺς θεωρεῖ ὡς ἀνήκοντα εἰς τὴν «γραμμικὴν ἄλγεβραν». Ὁ Bombelli λύει τὰ προβλήματα αὐτὰ εἰσάγων ἕνα μοναδιαῖον μῆκος (ὅπως εἶχεν ἤδη κάμει προηγουμένως ὁ Leonardo da Vinci καὶ μετὰ ἕνα σχεδὸν αἰῶνα ὁ Descartes) καὶ μὴ περιοριζόμενος εἰς προβλήματα 2ου μόνον βαθμοῦ, ἀλλ' ἐπεκτεινόμενος καὶ εἰς προβλήματα 3ου βαθμοῦ, δίδων τοιουτοτρόπως σπουδαῖα συμπληρώματα εἰς ὅσα ἀναγράφει εἰς τὰ τρία προηγούμενα Βιβλία τοῦ ἔργου του. Ἐπειδὴ ὁ χῶρος δὲν μᾶς ἐπιτρέπει ν' ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων ποὺ πραγματεύεται, περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν ἐγγραφὴν ἑνὸς κανονικοῦ ἐννεαγώνου εἰς κύκλον, τὴν ὁποίαν ἀνάγει εἰς τὴν λύσιν μιᾶς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως, ποιούμενος μνείαν τῶν προβλημάτων τῶν σχετικῶν πρὸς τὰ κανονικὰ καὶ ἡμικανονικὰ πολύγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα καὶ πε-

ρατοῦται τὸ ἔργον, διὰ νὰ σημειώσῃ τὴν εὐρεῖαν χρῆσιν τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν, ἡ ὁποία ὡς εἶναι γνωστὸν ἐπέπρωτο ἀρκετὰ ἀργότερα νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν δικαιοδοσίαν τῆς παραστατικῆς γεωμετρίας.

Ἡ ἐξέτασις τῶν χειρογράφων, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται τὰ Βιβλία IV καὶ V τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Bombelli, ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ θάνατος αὐτοῦ, ἐπελθὼν ὀλίγον μετὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἔργου του, τὸν ἠμπόδισε νὰ ἐπιφέρῃ μίαν τελευταίαν ἀναθεώρησιν εἰς τὰ χειρόγραφα αὐτὰ καὶ νὰ τὰ δώσῃ πρὸς ἐκτύπωσιν. Ἐκ τῆς διαδόσεως τούτων ὄχι μόνον ἡ φήμη του θὰ ηὐξάνετο, ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπιστήμη βεβαίως θὰ ὠφελεῖτο*.

Giovanni Batista Benedetti

234. Ἂν ρίψωμεν τώρα ἕνα βλέμμα εἰς τὸ σύνολον τῶν ἔργων, τὰ ὁποῖα ἐξετάζομεν εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον, δὲν θὰ βραδύνωμεν ν' ἀναγνωρίσωμεν ἑνότητα σκοποῦ καὶ κατευθύνσεως : τὸν σκοπὸν τῆς προωθήσεως πέραν τῶν συνόρων ἐκείνων, ποὺ διετηροῦντο ἀμετάθετα ἀπὸ μιᾶς χιλιετηρίδος· τὴν κατεύθυνσιν τῆς βελτιώσεως τῆς ἐφαρμοζομένης τεχνικῆς, ὥστε νὰ καταστῇ περισσότερον ἀποτελεσματικὴ καὶ εὔχρηστος. Περὶ τὸ τέλος τοῦ XVI αἰῶνος ὑψώθη μία ἐρημικὴ φωνή, διὰ νὰ ὑποστηρίξῃ τὴν ἐπιστροφὴν εἰς τὰς γεωμετρικὰς μεθόδους, ποὺ ἐφήρμοζεν ὁ Εὐκλείδης εἰς ἀριθμητικὰ ζητήματα, φωνὴ ὑπενθυμίζουσα ἐκείνην τοῦ Δομνίνου τοῦ Λαρισαίου (Τόμος I, § 88). Ἐνῷ ὅμως ἐκεῖνος ὑπεστήριζε τὴν ἁγίαν ὑπόθεσιν τῆς ἐπιστροφῆς εἰς τὴν αὐστηρότητα, ἡ ὁποία ἐχαρακτήριζε τὴν χρυσῆν περίοδον τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ὁ νέος μαθηματικός, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, ἔτρεφε τὴν μωρὰν ἀξίωσιν ν' ἀντιταχθῇ ὁ ἐπιστημονικὸς κόσμος εἰς τὴν μοιραίαν πορείαν τῆς ἐπιστήμης πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐπιστρέφων εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων (Τόμος I, § 36).

Εἶναι ἕνας βενετὸς πατρίκιος, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Tartaglia εἶχε διδάξει τὰ 4 πρῶτα Βιβλία τοῦ Εὐκλείδου, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ πλῆρες ὄνομα εἶναι Giovanni Batista, καὶ συντομώτερα Giambatista, Benedetti. Ἐγεννήθη εἰς Βενετίαν, τὴν 14 Αὐγούστου 1530. Κατὰ τὴν περίοδον 1558 - 1566 ἔζησεν εἰς τὴν αὐλὴν τῆς Πάρμας, κληθεὶς ἐκεῖ ἀπὸ τὸν Δοῦκα Ὀκτάβιον Φαρνέζε, ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ λέκτορος (lettore) τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς

---

* Σύγχρονος τοῦ Bombelli ὑπῆρξεν ὁ Paolo Bonasoni καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βολωνίας ἀπὸ τοῦ ἔτους 1587 - 88 μέχρι τοῦ 1592 - 93. Τούτου σώζεται χειρόγραφος συλλογὴ προβλημάτων ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς προβλήματα 1ου καὶ 2ου βαθμοῦ. Εἰς προβλήματα 3ου βαθμοῦ δὲν ἐτόλμησε νὰ εἰσέλθῃ.

ρατοῦται τὸ ἔργον, διὰ νὰ σημειώσῃ τὴν εὐρεῖαν χρῆσιν τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν, ἡ ὁποία ὡς εἶναι γνωστὸν ἐπέπρωτο ἀρκετὰ ἀργότερα νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν δικαιοδοσίαν τῆς παραστατικῆς γεωμετρίας.

Ἡ ἐξέτασις τῶν χειρογράφων, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται τὰ Βιβλία IV καὶ V τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Bombelli, ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ θάνατος αὐτοῦ, ἐπελθὼν ὀλίγον μετὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἔργου του, τὸν ἠμπόδισε νὰ ἐπιφέρῃ μίαν τελευταίαν ἀναθεώρησιν εἰς τὰ χειρόγραφα αὐτὰ καὶ νὰ τὰ δώσῃ πρὸς ἐκτύπωσιν. Ἐκ τῆς διαδόσεως τούτων ὄχι μόνον ἡ φήμη του θὰ ηὐξάνετο, ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπιστήμη βεβαίως θὰ ὠφελεῖτο *.

Giovanni Batista Benedetti

234. Ἂν ρίψωμεν τώρα ἕνα βλέμμα εἰς τὸ σύνολον τῶν ἔργων, τὰ ὁποῖα ἐξετάζομεν εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον, δὲν θὰ βραδύνωμεν ν' ἀναγνωρίσωμεν ἑνότητα σκοποῦ καὶ κατευθύνσεως : τὸν σκοπὸν τῆς προωθήσεως πέραν τῶν συνόρων ἐκείνων, ποὺ διετηροῦντο ἀμετάθετα ἀπὸ μιᾶς χιλιετηρίδος· τὴν κατεύθυνσιν τῆς βελτιώσεως τῆς ἐφαρμοζομένης τεχνικῆς, ὥστε νὰ καταστῇ περισσότερον ἀποτελεσματικὴ καὶ εὔχρηστος. Περὶ τὸ τέλος τοῦ XVI αἰῶνος ὑψώθη μία ἐρημικὴ φωνή, διὰ νὰ ὑποστηρίξῃ τὴν ἐπιστροφὴν εἰς τὰς γεωμετρικὰς μεθόδους, ποὺ ἐφήρμοζεν ὁ Εὐκλείδης εἰς ἀριθμητικὰ ζητήματα, φωνὴ ὑπενθυμίζουσα ἐκείνην τοῦ Δομνίνου τοῦ Λαρισαίου (Τόμος I, § 88). Ἐνῷ ὅμως ἐκεῖνος ὑπεστήριζε τὴν ἁγίαν ὑπόθεσιν τῆς ἐπιστροφῆς εἰς τὴν αὐστηρότητα, ἡ ὁποία ἐχαρακτήριζε τὴν χρυσῆν περίοδον τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ὁ νέος μαθηματικός, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, ἔτρεφε τὴν μωρὰν ἀξίωσιν ν' ἀντιταχθῇ ὁ ἐπιστημονικὸς κόσμος εἰς τὴν μοιραίαν πορείαν τῆς ἐπιστήμης πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐπιστρέφων εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων (Τόμος I, § 36).

Εἶναι ἕνας βενετὸς πατρίκιος, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Tartaglia εἶχε διδάξει τὰ 4 πρῶτα Βιβλία τοῦ Εὐκλείδου, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ πλῆρες ὄνομα εἶναι Giovanni Batista, καὶ συντομώτερα Giambatista, Benedetti. Ἐγεννήθη εἰς Βενετίαν, τὴν 14 Αὐγούστου 1530. Κατὰ τὴν περίοδον 1558 - 1566 ἔζησεν εἰς τὴν αὐλὴν τῆς Πάρμας, κληθεὶς ἐκεῖ ἀπὸ τὸν Δοῦκα Ὀκτάβιον Φαρνέζε, ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ λέκτορος (lettore) τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς

* Σύγχρονος τοῦ Bombelli ὑπῆρξεν ὁ Paolo Bonasoni καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βολωνίας ἀπὸ τοῦ ἔτους 1587 - 88 μέχρι τοῦ 1592 - 93. Τούτου σώζεται χειρόγραφος συλλογὴ προβλημάτων ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς προβλήματα 1ου καὶ 2ου βαθμοῦ. Εἰς προβλήματα 3ου βαθμοῦ δὲν ἐτόλμησε νὰ εἰσέλθῃ.

φιλοσοφίας. Περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 1567 μετέβη εἰς τὸ Τουρῖνον, ὅπου εἶχε προσκληθῆ ἀπὸ τὸν Emanuele Filiberto, ὁ ὁποῖος μαζὺ μὲ τὸ ὅραμα τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ Κράτους του, ἔτρεφε τὴν φιλοδοξίαν ν' ἀνυψώσῃ τὸ πνευματικὸν ἐπίπεδον τοῦ λαοῦ καὶ διὰ τοῦτο ἐκάλει περὶ ἑαυτόν, ἐξ ἄλλων περιοχῶν τῆς χερσονήσου, ἀνθρώπους καθαρᾶς φήμης. Εἰς τὸ Piemonte ὁ Benedetti ἔκαμε τόσον καλὴν ἐντύπωσιν, ὥστε ἔτυχεν ἐκ μέρους τοῦ ἡγεμόνος ἑνὸς τίτλου εὐγενείας, εἰς ἔνδειξιν ὑψηλῆς ἐκτιμήσεως. Ἀπέθανεν εἰς τὸ Τουρῖνον τὴν 20 Ἰανουαρίου 1590.

Ἡ ὑψηλὴ αὐτὴ διάκρισις δικαιολογεῖται σιωπηρῶς ἀπὸ ἕνα μακρὸν σύγγραμμα ὑπὸ τὸν τίτλον: Theoremata arithmetica, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει τὰς πρώτας 118 σελίδας τοῦ ἐκτεταμένου ἔργου, ποὺ ἐδημοσίευσεν ὁ Benedetti εἰς τὸ Τουρῖνον τὸ 1585 ὑπὸ τὸν τίτλον Diversarum speculationum Liber (Διαφόρων στοχασμῶν Βίβλος).

Τὸ ὅτι ὁ συγγραφεὺς κατέφυγεν εἰς γεωμετρικὰς παραστάσεις διὰ νὰ ἀποδείξῃ μερικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν σήμερον ὀργανικὸν μέρος τῆς θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς εἶναι μέχρις ἑνὸς σημείου εὐεξήγητον· ἀλλ' ἡ ἐμπιστοσύνη, τὴν ὁποίαν ἔτρεφεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι δύναται ν' ἀποδείξῃ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τεχνάσματος ἐκείνου ἔναντι τῆς ἀλγέβρας, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων ποὺ ἐπραγματεύθησαν οἱ Cardano καὶ Tartaglia, δὲν ἀποδεικνύει τίποτε ἄλλο παρὰ τὴν ἀδυναμίαν του ν' ἀντιληφθῇ τὸ φῶς τὸ πηγάζον ἀπὸ τὰ γραπτὰ ἐκεῖνα ποὺ προσδιώρισαν τὴν ἐνδοξοτέραν περίοδον τῆς ἰταλικῆς ἀλγέβρας.

Κρίνοντες ἀκόμη ἀπὸ τὴν μέθοδον ποὺ ἐχρησιμοποίησε, θὰ σημειώσωμεν ὅτι τὰ προβλήματά του, ἕνεκα τοῦ στοιχειώδους χαρακτῆρος των καὶ τῆς ἐλλείψεως πρωτοτυπίας, παρουσιάζουν περιωρισμένον ἐνδιαφέρον. Εἰς ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρωμεν ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα εἶναι τὸ γνωστότατον ἐκεῖνο ποὺ ἀφορᾷ τὸν δόλον τοῦ χρυσοχόου καὶ τὴν ἀνακάλυψίν του ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Δὲν πρόκειται λοιπὸν νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον εἰς ἕνα ἔργον τόσον μετρίας ἀξίας. Καὶ κλείομεν ἐδῶ τὸ Κεφάλαιον τοῦτο μὲ τὴν δήλωσιν, ὅτι θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω (§ 261 - 2) τὸν συγγραφέα εἰς ἀξιολογώτερα ἐπιτεύγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

Η ΣΥΓΚΕΚΟΜΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΕΙΣ ΤΟ ΑΠΟΓΕΙΟΝ ΤΗΣ

ΜΕΡΟΣ II: ΠΕΡΑΝ ΤΩΝ ΑΛΠΕΩΝ

Ἡ ἀριθμητικὴ φιλολογία κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος

235. Ἡ βραδεῖα ἀλλὰ σταθερὰ ἀνύψωσις τοῦ πνευματικοῦ ἐπιπέδου τῶν λαϊκῶν μαζῶν, ἀκόμη δὲ περισσότερον ἡ ἐξάπλωσις καὶ δραστηριοποίησις τῶν ἐμπορικῶν συναλλαγῶν, κατέστησαν εἰς ὅλας τὰς εὐρωπαϊκὰς χώρας ὁλοὲν ἰσχυροτέραν τὴν ἀνάγκην τῆς γνώσεως τῶν βασικῶν κανόνων τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς. Διὰ τοῦτο καὶ τὰ ἔργα τ' ἀποβλέποντα εἰς τὴν διάδοσιν καὶ διδασκαλίαν τῶν κανόνων τούτων ηὐξήθησαν συντόμως κατὰ τὸ πλῆθος εἰς τοιοῦτον βαθμόν, ὥστε νὰ καθίσταται ματαία κάθε προσπάθεια ἀπαριθμήσεως. Ὁ ἱστορικὸς λοιπὸν πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ νὰ μνημονεύσῃ τὰ καλύτερα, χωρὶς νὰ παραλείψῃ βεβαίως ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα χάρις εἰς τὰς πολυαρίθμους ἐκδόσεις των ἤσκησαν εὐρυτέραν καὶ διαρκεστέραν ἐπίδρασιν.

Εἰς μίαν τοιαύτην προνομιοῦχον θέσιν εὑρίσκεται ἡ Margarita Philosophica, μία μεγάλη ἐγκυκλοπαίδεια, τῆς ὁποίας ἐγένοντο κατὰ τὸν XVI αἰῶνα περὶ τὰς 20 ἐκδόσεις καὶ μεταφράσεις. Συγγραφεὺς αὐτῆς εἶναι ὁ Gregor Reisch, γεννηθεὶς εἰς Baligen (Würtenberg) καὶ ἀποθανὼν τὸ 1523 εἰς Freiburg περιβεβλημένος ἀνώτατον ἐκκλησιαστικὸν ἀξίωμα. Ὑπὸ μορφὴν διαλόγου μεταξὺ διδασκάλου καὶ μαθητοῦ (πότε ἐρωτᾷ ὁ ἕνας καὶ πότε ὁ ἄλλος) ἐκτίθενται τὰ στοιχεῖα τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας, ὄχι πάντοτε χωρὶς σφάλματα, διότι ὁ κανὼν ποὺ δίδεται π.χ. διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς πολυγώνου, βάσει τῆς ἐκφράσεως ἑνὸς πολυγωνικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἐσφαλμένος.

Ἀκόμη περισσότερον δημοφιλὴς ὑπῆρξεν ὁ Adam Riese, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα κατέστη παροιμιῶδες εἰς ὅλας τὰς χώρας, ὅπου ὡμιλεῖτο ἡ γερμανική.

Ὁ Adam Riese ἐγεννήθη τὸ 1492 εἰς Staffelstein πλησίον τοῦ Ramberg (Franconia). Ἐξεπαιδεύθη πιθανῶς εἰς Erfurt, ὅπου τὸ 1522 κατεῖχε θέσιν λογιστοῦ (Rechenmeister). Ἀναλόγους θέσεις κατέλαβε κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη εἰς ἄλλας γερμανικὰς πόλεις. Ἀπὸ τοῦ 1532 ὅμως ἤνοιξεν εἰς Annaberg μίαν ἰδιωτικὴν σχολὴν ἀριθμητικῆς, ἡ ὁποία συντομώτατα ἀπέκτησε μεγίστην φήμην. Ἐκτὸς μιᾶς συλλογῆς ἀριθμητικῶν πινάκων, εἶναι γνωστοὶ τρεῖς Τόμοι ἀριθμητικῆς ὑπὸ τὸ ὄνομά του, δημοσιευθέντες τὰ ἔτη 1518, 1522 καὶ 1550 *, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ αὐτὴ ὕλη ἐκτίθεται ὑπὸ μορφὴν πάντοτε τελειοτέραν, χωρὶς ὅμως ἀξιόλογον πρωτοτυπίαν. Παρατηρητέον μόνον ὅτι αἱ θεωρίαι γύρω ἀπὸ τὰ μαγικὰ τετράγωνα, αἱ περιεχόμεναι εἰς τὸν δεύτερον Τόμον τοποθετοῦν τὸν Riese εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν γερμανῶν συναδέλφων του, τῶν ἀπασχοληθέντων μὲ τὸ ἴδιον θέμα.

Ὁ ἐπιλογικὸς χαρακτὴρ τῶν ἔργων τούτων ἀπαντᾶται ἐπίσης εἰς ἕνα ἄλλο κείμενον τοῦ ἰδίου συγγραφέως ἐπὶ τῆς ἀλγέβρας (Die Coss), γραφὲν κατὰ τὴν πασχαλινὴν περίοδον τοῦ 1524, ἀλλὰ οὐδέποτε δοθὲν πρὸς ἐκτύπωσιν, ἴσως διότι ἐν τῷ μεταξὺ ἡ γερμανικὴ μαθηματικὴ βιβλιογραφία ἐπλουτίσθη μὲ καλύτερα βιβλία τοῦ εἴδους τούτου. Τὸ ἀνωτέρω χειρόγραφον φυλάσσεται ὡς πολύτιμον κειμήλιον εἰς τὰ χρηματοκιβώτια τοῦ Ταμιευτηρίου τοῦ Marienburg τῆς Σαξωνίας **.

Ὁ Riese ἀπέθανε τὴν 30 Μαρτίου 1559 εἰς Annaberg.

Τελείως διάφορον χαρακτῆρα παρουσιάζει ἕνα κείμενον φέρον τὸν τίτλον: De numero atomorum totius universi contra usurarios (Συνασπισμὸς τῶν ἀτόμων ὅλου τοῦ κόσμου κατὰ τῶν τοκογλύφων, Ρώμη, 1518). Σκοπὸς τούτου εἶναι νὰ ἑδραιώσῃ εἰς τὰς μάζας τὴν πεποίθησιν ὅτι ἔχουν συμφέρον νὰ τοποθετοῦν τὰ χρήματά των εἰς τὰ Ταμιευτήρια. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἀποδεικνύει εἰς ποῖον κολοσσιαῖον ὕψος δύνανται νὰ φθάσουν τὰ ποσά, ἀκόμη καὶ τὰ μικρά, ὅταν κατατεθοῦν εἰς Ταμιευτήριον μὲ ἀνατοκισμόν, φθάνει δὲ ὁ συγγραφεὺς μέχρι τοῦ σημείου, ὥστε νὰ θεωρῇ ἀριθμοὺς μὲ 69 ψηφία, προκειμένου νὰ καταδείξῃ τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσχυρισμῶν του.

Συγγραφεὺς εἶναι κάποιος Paolo, γεννηθεὶς εἰς Middelburg (Ὀλλανδίας) τὸ 1445 καὶ ἀποθανὼν τὸ 1533 ὡς ἐπίσκοπος τοῦ Fossombrone. Εἶναι πρόσωπον σχεδὸν λησμονημένον σήμερον, τὸ ὁποῖον ὅμως κατέχει

---

* Ἡ προμετωπὶς τοῦ ἔργου τούτου, εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ 1550, φέρουσα προσωπογραφίαν τοῦ συγγραφέως εἰς τὸ 58ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, ἔχει ἀναπαραχθῆ εἰς τὴν σελίδα 251 τοῦ ἔργου Rara Arithmetica (Boston, 1908), ὀφειλομένου εἰς τὸν D. E. Smith.

** Εἰς τὸ μικροσκοπικὸν ἔργον τοῦ M. Sommer, τὸ φέρον τίτλον Die Coss von Adam Riese (Schwarzenberg, 1929) δίδονται φωτοτυπημέναι μερικαὶ σελίδες.

ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς μεταρρυθμίσεως τοῦ Ἡμερολογίου. Διὰ νὰ σταθμίσωμεν τὴν ἀξίαν του ὡς μαθηματικοῦ ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν δύο πράγματα : ὅτι ἐδέχετο τιμὴν τοῦ π τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁρίων $\left(3\frac{1}{7} \text{ καὶ } 3\frac{10}{71}\right)$ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὅτι κατεπολέμησε τὴν τόσον διαδεδομένην ἀντίληψιν (Τόμος I, § 172) περὶ δυνατότητος πληρώσεως τοῦ διαστήματος μὲ κανονικὰ πολύεδρα διάφορα τοῦ κύβου.

236. Ἡ εὐρεῖα διάδοσις τὴν ὁποίαν εἶχον εἰς τὴν Γερμανίαν τὰ βιβλία τοῦ Riese ὀφείλεται ἐν μέρει εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐγράφησαν εἰς τὴν γερμανικήν. Ἡ δικαιοσύνη παρὰ ταῦτα ἐπιβάλλει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δὲν ἦτο ὁ πρῶτος ἐγκαταλείψας τὴν γλῶσσαν τῶν σοφῶν, χάριν τῆς καθομιλουμένης. Τὰ πρωτεῖα ἀνήκουν εἰς τὸν Heinrich Schreiber (ὑπὸ λατινικὸν ἔνδυμα Grammateus), ὁ ὁποῖος, γεννηθεὶς περίπου τὸ 1446, ἐσπούδασεν εἰς Βιέννην κατὰ τὴν περίοδον 1507 - 1512, ἐδημοσίευσεν ἐκεῖ (1514) ἕνα ἔργον του Algorismus proportionum, τὸ δὲ 1518 ἔγραψε τὴν πρώτην ἀριθμητικὴν εἰς γερμανικήν, ἡ ὁποία ἐν τούτοις δὲν ἐτυπώθη παρὰ τὸ 1525 καὶ ἀνετυπώθη εἰς Φρανκφούρτην τὰ ἔτη 1535, 1544 καὶ 1572 *. Ἀπέθανε εἰς Βιέννην τὸ 1525.

Ἡ ἐν λόγῳ Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ εἶναι ἔργον προερχόμενον ἀποκλειστικῶς ἀπὸ ἐρανισμούς, φέρον σαφεῖς ἐνδείξεις ἐπιδράσεως τοῦ Pacioli, ἀφοῦ ἐγκαταλείπει τὸ ἀρχαῖον σύστημα τῆς θεωρήσεως τῶν πράξεων «διπλασιασμὸς» καὶ «διχοτόμησις» ὡς ἰδίων πράξεων, ἀντὶ μερικῶν περιπτώσεων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Διὰ τὰς διαφόρους δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου χρησιμοποιεῖ εἰδικὰ σύμβολα, τὰ ὁποῖα ὑπὸ τὸ ὄνομα «σημεῖα Coss» — δηλαδὴ ἀλγεβρικὰ — ἀπαντῶνται ὄχι μόνον εἰς τὴν Γερμανίαν κατὰ τὸν αἰῶνα, περὶ οὗ ὁ λόγος, ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἀλλαχοῦ καὶ ἀργότερα **.

Δὲν διαφέρει πολὺ ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Schreiber, ὡς πρὸς τὴν γλῶσσαν καὶ τὸ περιεχόμενον, ἕνα ἄλλο βιβλίον ἀριθμητικῆς ποὺ ἐξεδόθη εἰς Ingolstadt τὸ 1527 ἀπὸ τὸν Peter Bienenitz (ἢ μὲ τὸ ἐκλατινισθὲν ὄνομα Peter Apianus). Ὁ συγγραφεύς, γεννηθεὶς εἰς Σαξωνίαν τὸ 1495 καὶ ἀποθανὼν τὸ 1552, φαίνεται ὅτι κατέκτησε μεγάλην φήμην, ἀφοῦ ἐξελέγη διδάσκαλος τοῦ πρίγκηπος, τοῦ μετέπειτα αὐτοκράτορος Καρόλου V. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι εἰς τὴν προμετωπίδα τοῦ βιβλίου *** εἰκονίζεται τὸ ἀρι-

---

* Ὁ μακρὸς τίτλος τοῦ ἔργου ἀναφέρεται εἰς τὸ μνημονευθὲν ἔργον τοῦ Smith (σελ. 124).

** Oeuvres de Descartes (Ἔκδοσις Adam et Tannery, Paris, 1908), t. X, σελ. 294.

*** Βλ. σχετικὸν ἔργον τοῦ Smith (σ. 156), περὶ οὗ ἀνωτέρω.

θμητικὸν τρίγωνον ὑπὸ τὴν ἰδίαν μορφὴν ποὺ τὸ εἴδομεν εἰς ἀρχαῖον κινεζικὸν ἔργον (§ 127).

Ὑψηλοτέρας στάθμης εἶναι τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἔργου φέροντος τίτλον De numeris libri II (Κολωνία, 1539). Τὸ βιβλίον ἐγράφη ἀπὸ τὸν Johannes Bronchorst, γεννηθέντα εἰς Nimega (τῆς Ὁλλανδίας) παρὰ τὰ πρωσσικὰ σύνορα. Ἐκ τοῦ λατινικοῦ ὀνόματος τῆς πόλεως ἕλκει τὴν προέλευσίν του τὸ ἐπώνυμον Noviomago, μὲ τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται συχνὰ ὁ μαθηματικὸς περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν. Ἐδίδαξε μαθηματικὰ ἀρχικῶς εἰς Rostock, κατόπιν εἰς Κολωνίαν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1570.

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον τοῦ Noviomago ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἕνα σχετικὸν μὲ τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν. Ματαία εἶναι ἡ ἀναζήτησις νεωτερισμῶν εἰς τὰς μεθόδους καὶ τὰς ἐννοίας. Πρόκειται περὶ ἔργου διδακτικοῦ χαρακτῆρος, γραφέντος μὲ θαυμαστὴν διαύγειαν ἀπὸ πρόσωπον ποὺ ἐγνώριζεν ἄριστα τὴν ἐπιστήμην τῆς ἐποχῆς του.

Εἰς τὸ Μέρος I ἐκτίθενται τὰ διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως, ὄχι μόνον τὰ ἐν χρήσει ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων καὶ τῶν Λατίνων, ἀλλ' ἐπίσης ἕνα ἄλλο ἀρκετὰ περίεργον, ληφθὲν ἐκ τῆς χαλδαϊκῆς ἀστρονομίας, ἀλλ' ἀπὸ ἀμνημονεύτων χρόνων ἐκλιπὸν καὶ λησμονηθέν. Ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει ἐν λεπτομερείᾳ τὰς μεθόδους τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ, χωρὶς νὰ παραλείπῃ ἀκόμη καὶ τὰ φυσικὰ βοηθητικὰ μέσα («διάλεκτος τῶν δακτύλων» τοῦ αἰδεσίμου Beda, τόμος I, § 109) καὶ τὰ τεχνικὰ (ἄβακες). Ἡ ἔλλειψις ἀποδείξεων, εὐεξήγητος εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἔργου, δὲν δικαιολογεῖται εἰς τὸ Μέρος II, ὅπου ὁ συγγραφεὺς ἠκολούθησε τὰ ἴχνη τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ἐνῷ θὰ εἶχεν ἐξυπηρετήσει πολὺ καλύτερα τὰ συμφέροντα τῶν ἀναγνωστῶν του, ἐὰν εἶχε λάβει ὡς ὁδηγόν του τὸν Εὐκλείδη. Καίτοι, πρὸς δικαιολογίαν του, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἠκολούθησε μίαν τακτικὴν γενικῶς παραδεκτὴν εἰς τὴν ἐποχήν του, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ διατυπώσωμεν τὴν λύπην μας, διότι ἄνθρωπος τῆς ἰδικῆς του αὐθεντίας δὲν ἠθέλησε νὰ ἐπιβάλῃ θεωρητικώτερον σύστημα ἐκθέσεως.

237. Διαβαίνοντες τὸν Ρῆνον, ἀπαντῶμεν ἕνα πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀπέκτησε μεγάλην διασημότητα εἰς ὅλην τὴν Εὐρώπην : τὸν Oronzio Fineo. Ἐγεννήθη τὸ 1494 εἰς Briançon (εἰς τὸ Δελφινᾶτον) καὶ ἐσπούδασεν εἰς Παρισίους καὶ δὴ εἰς τὸ Κολλέγιον τῆς Ναβάρρας. Διὰ λόγους πολιτικοὺς ὑπέστη μακροχρόνιον φυλάκισιν (1518 - 1524), κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ἐπεμελήθη (1523) μιᾶς νέας ἐκδόσεως τῆς Margarita philosophica. Ἀποφυλακισθεὶς ἐδίδαξεν εἰς ἰδιωτικὸν Κολλέγιον τῆς πρωτευούσης μέχρι τοῦ 1532, ὅτε ἐγένετο καθηγητὴς εἰς τὸ Γαλλικὸν Κολλέγιον. Παρὰ ταῦτα, ἀπέθανεν εἰς ἀθλίαν κατάστασιν τὴν 6 Ὀκτωβρίου 1555.

Καρπὸς καὶ ἴσως σύνοψις τῆς ἰδιωτικῆς του διδασκαλίας (χάρις εἰς τὴν ὁποίαν, κατὰ διαβεβαίωσίν του, ἔδωσεν ὁ Fineo νέαν ζωὴν εἰς τὰ μαθηματικὰ ποὺ ἦσαν θαμμένα εἰς τὴν Γαλλίαν) εἶναι ἕνα ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Protomathesis (Παρίσιοι, 1532), εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθενται διαδοχικῶς τὰ στοιχεῖα τῆς ἀριθμητικῆς, τῆς γεωμετρίας, τῆς κοσμογραφίας, ἔτι δὲ τῆς κατασκευῆς ὡρολογίων. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν δυνάμεθα νὰ ἐξάρωμεν ἕνα πίνακα τῶν ἀνὰ δύο γινομένων τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . 60, γεγραμμένον ὑπὸ μορφήν, οἵαν θὰ ἐλαμβάνομεν ἐὰν ἐξελέγετο τὸ 60 ὡς θεμελιώδης ἀριθμὸς ἑνὸς συστήματος ἀριθμήσεως. Τὸ γεωμετρικὸν μέρος ἔχει τὴν μετρίαν φιλοδοξίαν νὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τοῦ Εὐκλείδου. Πρόκειται λοιπὸν περὶ μιᾶς ἐκ τῶν πολυαρίθμων ἐγκυκλοπαιδειῶν, εἰς τὴν σύνταξιν τῶν ὁποίων πολὺ ἠρέσκοντο οἱ μαθηματικοὶ τοῦ Μεσαίωνος.

Ἐὰν ὁ Fineo περιωρίζετο νὰ δημοσιεύῃ ἔργα περιέχοντα σχόλια ἢ ἄλλα κείμενα ἐξ ἐπιλογῆς, ὅπως εἶναι αὐτὰ ποὺ ἐμνημονεύσαμεν καὶ ἄλλα ποὺ δὲν συντρέχει λόγος νὰ μᾶς ἀπασχολήσουν*, δὲν θὰ εἶχεν ἀσφαλῶς φθάσει εἰς τὰ ὕψη τῆς φήμης, ἀλλὰ τοὐλάχιστον θὰ κατήρχετο εἰς τὸν τάφον χωρὶς τὴν ἀνυποληψίαν ἡ ὁποία συνοδεύει τοὺς γράφοντας παραλογισμούς. Ἀτυχῶς ἀφέθη νὰ παρασυρθῇ ἀπὸ τὸ γοητευτικὸν ὄνειρον νὰ δώσῃ λύσιν εἰς τὸ διασημότερον πρόβλημα τῆς γεωμετρίας ποὺ μᾶς ἄφησαν κληρονομίαν αἱ ἀρχαῖοι. Τὸ ἀτυχὲς ἔργον του De quadratura circuli (Περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, Παρίσιοι, 1554), ἔγινε ἀντικείμενον, δικαίως, ζωηρᾶς κριτικῆς. Ἀλλ' ὁ Fineo, μὲ τὸ ἀνυποχώρητον πεῖσμα ποὺ χαρακτηρίζει τοὺς δῆθεν τετραγωνιστάς, δὲν ἠθέλησε νὰ συμβιβασθῇ μὲ τὴν διαύγειαν τῆς λογικῆς. Αὐτὸ τοὐλάχιστον ἀποδεικνύει τὸ ἔργον του De rebus mathematicis hactenus desideratis (Περὶ μαθηματικῶν ζητημάτων, τῶν ὁποίων ἐπιθυμεῖται μέχρι σήμερον ἡ λύσις, Παρίσιοι, 1556) τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη μετὰ τὸν θάνατόν του, κατόπιν εἰδικῆς ἐντολῆς του, ὑπὸ ἑνὸς φίλου του, μὲ ἀφιέρωσιν πρὸς τὸν Ἐρρῖκον ΙΙΙ, βασιλέα τότε τῆς Γαλλίας. Ὅπως λέγει ὁ τίτλος, τὸ ἔργον περιέχει ζητήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι πράγματι τρομερὰ ἐπιθυμητή· ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις: α) Παρεμβολὴ δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων, β) Προσδιορισμὸς τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· ὁ συγγραφεὺς εὑρίσκει $\pi = 245/78$, τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀρχιμηδείου 22/7, γ) Διαίρεσις σφαίρας εἰς δύο μέρη τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον (πρόβλημα Ἀρχιμήδους, Τόμος Ι § 41). Ὡς πρὸς τὰς παρεχομένας λύσεις, θὰ σημειώσωμεν μόνον μίαν λεπτομέρειαν ὕφους, ἡ ὁποία προδίδει ἰταλικὴν ἐπίδρασιν. Ἡ διαίρεσις εἰς μέσον

* Ἐννοοῦμεν τὸ ἔργον: In sex priores Libros geometricorum elementorum Euclidis demonstrationes, ἐκδοθὲν εἰς Παρισίους, 1536.

καὶ ἄκρον λόγον καλεῖται «divina proporzione» (θεία ἀναλογία), ὄνομα ληφθὲν προφανῶς ἀπὸ τὴν Summa τοῦ Pacioli.

Ἡ μεγάλη φήμη τοῦ Fineo, ὡς διδάσκοντος εἰς μίαν ἀπὸ τὰς διασημοτέρας σχολὰς τοῦ κόσμου, συνετέλεσεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀναγνωστῶν, ἄρα καὶ τῶν κριτικῶν του, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς καταλλήλους θέσεις.

238. Δὲν πρέπει νὰ νομίσῃ κανεὶς ὅτι ἡ σημειωθεῖσα ὑπερπαραγωγὴ εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς περιωρίσθη μόνον εἰς τὴν κεντρικὴν Εὐρώπην· ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν, ὅπως εἶναι καθῆκον μας, τρία ἔργα τοῦ εἴδους τούτου ἐμφανισθέντα εἰς ἄλλους γεωγραφικοὺς χώρους.

Τὸ ἕνα, φέρον τίτλον Cursus mathematicarum artium (Alcalà, 1516), ἐγκαινιάζει τὴν πτωχὴν μαθηματικὴν γραμματείαν τῆς Ἱσπανίας. Συγγραφεὺς εἶναι ὁ Pedros Santos Ciruelo, γεννηθεὶς εἰς Daroca τὸ 1470, καθηγητὴς πρῶτα εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Alcalà ἔπειτα δὲ πρωθιερεὺς τοῦ καθεδρικοῦ ναοῦ τῆς Salamanca. Πρόκειται περὶ μιᾶς ἄλλης μαθηματικῆς ἐγκυκλοπαιδείας, ὑποδεεστέρας τῆς Summa τοῦ Pacioli, τὴν ὁποίαν ἀσφαλῶς ἠγνόει ὁ συγγραφεύς. Ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἰς τὴν ἐγκυκλοπαιδείαν αὐτὴν ἀπαντᾶται μία ὀρθὴ κριτικὴ τῆς τιμῆς $\pi = \sqrt{10}$, (τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν ἰνδικὴν γραμματείαν Τόμος Ι, § 136), καὶ τὴν ὁποίαν ὁ Ciruelo εὗρεν εἰς ἕνα ἔργον τοῦ C. de Bouvelles, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον.

Εἰς τὴν ἀγγλικὴν γραμματείαν ἀνήκει τὸ δεύτερον, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι : De arte supputandi libri quattuor, τουτέστι : «Ὁδηγὸς τοῦ λογίζεσθαι εἰς 4 βιβλία» (Λονδῖνον, 1522). Συγγραφεύς του εἶναι ὁ Guthbert Tonstall (γεννηθεὶς εἰς Yorkshire, τὸ 1474 καὶ ἀποθανὼν τὸ 1559). Ἐσπούδασε διαδοχικῶς εἰς Oxford, Cambridge καὶ Padova. Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν πόλιν ἔλαβε γνῶσιν τῶν συγγραμμάτων τοῦ Regiomontano καὶ τοῦ Pacioli. Τὸ ἔργον αὐτό, κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ συγγραφέως του, ἀποτελεῖ «ἀποχαιρετισμὸν πρὸς τὰ μαθηματικά», τὰ ὁποῖα ὁ συγγραφεὺς ἠναγκάσθη νὰ ἐγκαταλείψῃ μὲ τὴν ἀνάληψιν τῶν καθηκόντων του ὡς ἐπισκόπου τοῦ Λονδίνου. Ὁ Tonstall, ὁ ὁποῖος ἀπέθανεν ὡς ἐπίσκοπος τοῦ Durham, ὑπῆρξε μία ἀπὸ τὰς ἐξοχωτέρας προσωπικότητας τῆς ἐποχῆς του εἰς τὴν Ἀγγλίαν. Ἡ Ἐθνικὴ Βιογραφία (National Biography) περιέχει ἐκτενῆ ἀφήγησιν τῶν περιστάσεων τῆς ζωῆς του καὶ πλήρη ἔκθεσιν τῶν ἔργων του, μερικὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἀκόμη ἀνέκδοτα. Τὸ βιβλίον του De arte (Περὶ τέχνης) εἶναι ἔργον στοιχειῶδες, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία συνίσταται ὄχι εἰς τὴν οὐσίαν, ἀλλ' εἰς τὸν στοιχειώδη τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἔχει γραφῆ. Αἱ ἐκδόσεις ποὺ ἔγιναν τῶν ἔργων του εἰς Παρισίους καὶ

εἰς Στρασβοῦργον ἀποδεικνύουν ὅτι ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην ἀνεγνωρίζετο ἡ ἰδιάζουσα διδακτικὴ ἀξία των.

Τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ ἔργα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω ἀπαντῶμεν εἰς τὰ σύνορα Εὐρώπης καὶ Ἀσίας, τουτέστι εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὴν προέλευσίν του, εἶναι σκόπιμον νὰ θέσωμεν ὑπ' ὄψιν τοῦ ἀναγνώστου, ὅτι ἡ κατάληψις τῆς πόλεως αὐτῆς ἀπὸ τοὺς Τούρκους (1453) ἔθεσε τέρμα εἰς τὴν κατάστασιν τῆς δουλείας, ἐκ τῆς ὁποίας ἐστέναζον οἱ Ἑβραῖοι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ρωμαϊκῆς αὐτοκρατορίας εἰς τὴν Ἀνατολήν. Τοιουτοτρόπως εὗρον ἐκεῖ ἄσυλον ὅλοι οἱ πρόσφυγες τῆς Ἰσπανίας (1492) καὶ Πορτογαλίας (1496), ὅταν οἱ ὀπαδοὶ τοῦ Μωϋσέως ἐξωρίσθησαν ἐκ τῆς ἰβηρικῆς χερσονήσου.

Οἱ Τοῦρκοι, οἱ ὁποῖοι ἔτρεφον μεγαλυτέραν ἐμπιστοσύνην εἰς τοὺς Ἑβραίους παρὰ εἰς τοὺς Χριστιανούς, προσέτρεχον εἰς αὐτοὺς διὰ νὰ λάβουν πολλὰς ἀπὸ τὰς γνώσεις, τῶν ὁποίων ᾐσθάνοντο τὴν ἀνάγκην. Εἰδικῶς ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀριθμητικήν, ἐπωφελοῦντο πολὺ τῆς ἐπιστήμης τοῦ Ἠλία Misrachi, ἀρχιραββίνου τῆς Κωνσταντινουπόλεως κατὰ τὴν περίοδον 1495 - 1526. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἕνα ἔργον ἀριθμητικῆς, τυπωθὲν μετὰ τὸν θάνατον τοῦ συγγραφέως, τὸ ὁποῖον, χάρις εἰς μίαν ἐλευθέραν πρόσφατον μετάφρασιν εἰς γερμανικὴν γλῶσσαν, εἶχεν ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας ἀξιόλογον διάδοσιν.

Διὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου του ὁ Misrachi ἐπωφελήθη ὄχι μόνον ὅσων εἶχε γράψει ὁ ὁμόθρησκος Abraham ben Esdra (Τόμος I, § 113), ἀλλ' ἐπίσης τῶν συγγραμμάτων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Νικομάχου. Παρατηρητέον ὅτι, ὅπως εἶχε κάμει καὶ ὁ Pacioli (ἀλλ' ἀνεξαρτήτως αὐτοῦ πιθανῶς), τοιουτοτρόπως καὶ ὁ Misrachi ἀπέκλεισε τὸν διπλασιασμὸν καὶ τὴν ἡμιάθροισιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν θεμελιωδῶν πράξεων. Εἰς τὸ Μέρος I τοῦ ἔργου του ἀφιέρωσε, πράγματι, ἀνὰ ἕνα Κεφάλαιον εἰς τὰς συνήθεις ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐφαρμοζομένας διαδοχικῶς εἰς ἀκεραίους, κλασματικοὺς καὶ μικτοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὸ Μέρος II ἐξετάζει διαδοχικῶς τὰ ἀστρονομικὰ κλάσματα, τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς ρίζας καὶ τὰς ἀναλογίας. Τὸ ὑπόλοιπον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν καλὴν συλλογὴν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀρκετὰ εἶναι ἐφαρμογαὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν γεωμετρίαν. Τί ἄλλο δυνάμεθα νὰ κάμωμεν πλὴν τοῦ νὰ ἐπαινέσωμεν μίαν τοιαύτην διάταξιν τῆς ὕλης εἰς ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς;

C. Rudolff καὶ M. Stiefel

239. Ἂς ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν Γερμανίαν, ὅπου μᾶς καλοῦν δύο μαθηματικοί, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ δὲν δύνανται νὰ συγκριθοῦν πρὸς τοὺς με-

εἰς Στρασβοῦργον ἀποδεικνύουν ὅτι ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην ἀνεγνωρίζετο ἡ ἰδιάζουσα διδακτικὴ ἀξία των.

Τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ ἔργα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω ἀπαντῶμεν εἰς τὰ σύνορα Εὐρώπης καὶ Ἀσίας, τουτέστι εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὴν προέλευσίν του, εἶναι σκόπιμον νὰ θέσωμεν ὑπ' ὄψιν τοῦ ἀναγνώστου, ὅτι ἡ κατάληψις τῆς πόλεως αὐτῆς ἀπὸ τοὺς Τούρκους (1453) ἔθεσε τέρμα εἰς τὴν κατάστασιν τῆς δουλείας, ἐκ τῆς ὁποίας ἐστέναζον οἱ Ἑβραῖοι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ρωμαϊκῆς αὐτοκρατορίας εἰς τὴν Ἀνατολήν. Τοιουτοτρόπως εὗρον ἐκεῖ ἄσυλον ὅλοι οἱ πρόσφυγες τῆς Ἱσπανίας (1492) καὶ Πορτογαλίας (1496), ὅταν οἱ ὀπαδοὶ τοῦ Μωϋσέως ἐξωρίσθησαν ἐκ τῆς ἰβηρικῆς χερσονήσου.

Οἱ Τοῦρκοι, οἱ ὁποῖοι ἔτρεφον μεγαλυτέραν ἐμπιστοσύνην εἰς τοὺς Ἑβραίους παρὰ εἰς τοὺς Χριστιανούς, προσέτρεχον εἰς αὐτοὺς διὰ νὰ λάβουν πολλὰς ἀπὸ τὰς γνώσεις, τῶν ὁποίων ἠσθάνοντο τὴν ἀνάγκην. Εἰδικῶς ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀριθμητικήν, ἐπωφελοῦντο πολὺ τῆς ἐπιστήμης τοῦ Ἠλία Misrachi, ἀρχιραββίνου τῆς Κωνσταντινουπόλεως κατὰ τὴν περίοδον 1495 - 1526. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἕνα ἔργον ἀριθμητικῆς, τυπωθὲν μετὰ τὸν θάνατον τοῦ συγγραφέως, τὸ ὁποῖον, χάρις εἰς μίαν ἐλευθέραν πρόσφατον μετάφρασιν εἰς γερμανικὴν γλῶσσαν, εἶχεν ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας ἀξιόλογον διάδοσιν.

Διὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου του ὁ Misrachi ἐπωφελήθη ὄχι μόνον ὅσων εἶχε γράψει ὁ ὁμόθρησκος Abraham ben Esdra (Τόμος I, § 113), ἀλλ' ἐπίσης τῶν συγγραμμάτων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Νικομάχου. Παρατηρητέον ὅτι, ὅπως εἶχε κάμει καὶ ὁ Pacioli (ἀλλ' ἀνεξαρτήτως αὐτοῦ πιθανῶς), τοιουτοτρόπως καὶ ὁ Misrachi ἀπέκλεισε τὸν διπλασιασμὸν καὶ τὴν ἡμιάθροισιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν θεμελιωδῶν πράξεων. Εἰς τὸ Μέρος I τοῦ ἔργου του ἀφιέρωσε, πράγματι, ἀνὰ ἕνα Κεφάλαιον εἰς τὰς συνήθεις ἀριθμητικὰς πράξεις, ἐφαρμοζομένας διαδοχικῶς εἰς ἀκεραίους, κλασματικοὺς καὶ μικτοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὸ Μέρος II ἐξετάζει διαδοχικῶς τὰ ἀστρονομικὰ κλάσματα, τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς ρίζας καὶ τὰς ἀναλογίας. Τὸ ὑπόλοιπον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν καλὴν συλλογὴν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀρκετὰ εἶναι ἐφαρμογαὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν γεωμετρίαν. Τί ἄλλο δυνάμεθα νὰ κάμωμεν πλὴν τοῦ νὰ ἐπαινέσωμεν μίαν τοιαύτην διάταξιν τῆς ὕλης εἰς ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς;

C. Rudolff καὶ M. Stiefel

239. Ἂς ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν Γερμανίαν, ὅπου μᾶς καλοῦν δύο μαθηματικοί, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ δὲν δύνανται νὰ συγκριθοῦν πρὸς τοὺς με-

γάλους τοῦ προηγουμένου Κεφαλαίου, διεκδικοῦν εὐλόγως ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀλγέβρας.

Τοῦ ἑνός, Christoff Rudolff, εἶναι γνωστὴ ἡ πατρὶς Jauer (Πρωσσία), ἄγνωστα ὅμως τὰ ὅρια τῆς ζωῆς του. Δύναται μόνον νὰ θεωρηθῇ τὸ 1552 ὡς πιθανὸν ἔτος τοῦ θανάτου του, διότι κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ ἐξηντλήθη ἕνα ἀπὸ τὰ ἔργα του, τὸ ὁποῖον ἡ μοῖρα τὸν ἠμπόδισε νὰ ἐπανεκδώσῃ, παρὰ τὴν ἔντονον ζήτησιν τοῦ βιβλίου.

Ἕνα ἀπὸ τὰ περιφημότερα ἔργα του φέρει ἔτος 1525 καὶ τίτλον Die Coss (Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς) προφανῶς προερχόμενον ἐκ τοῦ τεχνικοῦ ὅρου «arte della cosa»—τέχνη τοῦ πράγματος—μὲ τὸν ὁποῖον ἐκαλεῖτο ἡ ἄλγεβρα εἰς τὴν Ἰταλίαν κατὰ τὸ λυκαυγὲς τῶν νεωτέρων χρόνων. Τοιουτοτρόπως ἀναγνωρίζεται σιωπηρῶς ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ἡ ὕπαρξις ἑνὸς ἰταλικοῦ σήματος εἰς τὴν ἐκκολαπτομένην ὑψηλοτέραν περιοχὴν τῆς ἐπιστήμης τοῦ ἀριθμοῦ. Εἰς τὸ σχῆμα 5 εἰκονίζονται, κατὰ πιστὴν ἀναπαράστασιν, τὰ ἀλγεβρικὰ σύμβολα segni cossici (κοσικὰ σημεῖα), τῶν ὁποίων κάμνει χρῆσιν ὁ συγγραφεύς.

φ dragma oder numerus
ꝛ radix
ʒ zensus
ϲ cubus
ʒʒ zensdezens
ß sursolidum
ʒϲ zensicubus
bß bissursolidum
ʒʒʒ zenszensdezens
ϲϲ cubus de cubo

Σχ. 5

Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἐπίσης μία συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων (1530) καὶ ἕνα ἐγχειρίδιον λογισμοῦ δημοσιευθὲν διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1526 καὶ ἐκδοθὲν ἔπειτα κατ' ἐπανάληψιν. Εἰς τὴν συλλογὴν τῶν προβλημάτων διδάσκεται ὁ κανὼν τῆς διαιρέσεως διὰ 10, 100 κλπ. διὰ τοποθετήσεως ἑνὸς κόμματος εἰς ἁρμόζουσαν ἑκάστοτε θέσιν. Μὲ τὴν παρατήρησίν του αὐτὴν ὁ Rudolff συγκαταλέγεται μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐπρολείαναν τὸν δρόμον πρὸς τὸ σημερινὸν σύστημα τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι πρὸς δήλωσιν τῶν κυβικῶν ἢ ἀνωτέρων ριζῶν καταφεύγει εἰς ἕνα τέχνασμα στερούμενον λογικῆς συνεπείας: ἐπαναλαμβάνει δηλαδὴ τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, γράφων π.χ. $\sqrt{\ }\sqrt{\ }$, $\sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ }$, . . .

Εἶναι γενικῶς παραδεκτόν, ὅτι κατὰ τὴν συγγραφὴν τῶν ἔργων του ὁ Rudolff ἤντλησεν ἀφθόνως ἀπὸ ἕνα ἔργον τιτλοφορούμενον «Regulae Cosae vel Algebra», ἀναγόμενον εἰς τὸν XVI αἰῶνα καὶ εὑρισκόμενον σήμερον ὑπὸ μορφὴν χειρογράφων εἰς δημοσίας βιβλιοθήκας τῆς Βιέννης καὶ τοῦ Μονάχου. Εἰς τὸ ἔργον αὐτό, ὑπὸ τὸ γενικὸν ὄνομα «πρόνοιαι» (cautele), ἀπαριθμοῦνται αἱ πράξεις αἱ δυνάμεναι νὰ ἐκτελεσθοῦν ἐπὶ ἐξισώσεων χωρὶς καμμίαν ἀλλοίωσιν τῶν τελευταίων. Βάσει τῶν πράξεων τούτων λύονται μερικαὶ ἰδιάζουσαι ἐξισώσεις τρίτου βαθμοῦ, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν χρῆσιν τεχνασμάτων τόσον περιπλόκων, ὥστε ἀκόμη καὶ εἰς τὸν πλέον καλοπροαίρετον ἀναγνώστην νὰ γεννᾶται ἡ πεποίθησις, ὅτι ὁ

λύτης ἐγνώριζεν ἐκ τῶν προτέρων τοὐλάχιστον μίαν ἐκ τῶν ριζῶν τῶν ἐξεταζομένων ἐξισώσεων.

Μεταξὺ τῶν περιεχομένων εἰς τὴν συλλογὴν προβλημάτων, θ' ἀναφέρωμεν μερικά, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐπιτυγχάνεται κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος «Tayen» τῶν κινέζων μαθηματικῶν (Τόμος I, § 199), καὶ ἄλλα τὰ ὁποῖα, κατ' οὐσίαν, δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὸ «πρόβλημα τῶν 100 πτηνῶν», ποὺ συνηντήσαμεν κατ' ἐπανάληψιν. Εἰς τὸ ἐν λόγῳ χειρόγραφον προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου παρουσιάζονται ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν: «ἕνας ὅμιλος ἀποτελούμενος ἀπὸ δεδομένον ἀριθμὸν ἀνδρῶν, γυναικῶν καὶ κορασίδων ὑποχρεοῦται νὰ πληρώσῃ κάποιον λογαριασμόν. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ποσοστοῦ τοῦ βαρύνοντος ἕκαστον ἄνδρα, ἑκάστην γυναῖκα καὶ ἑκάστην κορασίδα, ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, τῶν γυναικῶν καὶ τῶν κορασίδων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸν ὅμιλον». Ἀπὸ τὸν ὅρον «gemeinsame Zeche» (ὁμαδικὸς λογαριασμὸς), ποὺ χρησιμοποιεῖται ἐδῶ ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, κατάγεται ὁ ὅρος «regula coeci», τὸν ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ὁ L. Euler εἰς τὸ ἔργον του Ἄλγεβρα (βλ. Κεφ. II τοῦ II Μέρους τοῦ αὐτοῦ ἔργου).

240. Πολὺ μεγαλυτέρας φήμης ἄξιος εἶναι ὁ Michele Stiefel, γεννηθεὶς εἰς Essling τὸ 1486 καὶ ἀποθανὼν εἰς Ἰέναν τὸ 1567. Προερχόμενος ἐκ μονῆς Αὐγουστινιανῶν, ὅπως καὶ ὁ Λούθηρος (1483 - 1546), ἐνεκολπώθη τὰς ἰδέας τῆς Μεταρρυθμίσεως καί, ὡς ἦτο ἑπόμενον, ἐγνώρισε βίον πλάνητα καὶ περιπετειώδη. Ἡ φήμη του στηρίζεται κατὰ μέγα μέρος εἰς τὸ ἔργον του Arithmetica integra (Ἀριθμητικὴ πλήρης), ποὺ ἐδημοσιεύθη διὰ πρώτην φορὰν εἰς Νυρεμβέργην τὸ 1544, μὲ πρόλογον τοῦ Μελάγχθονος (1497 - 1560), τοῦ διασήμου «Διδασκάλου τῆς Γερμανίας» (Praeceptor Germaniae). Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ ἔργου του, ὁ συγγραφεὺς ἐχρησιμοποίησε, κατὰ δήλωσιν τοῦ ἰδίου, τὸν Εὐκλείδη (τοῦ Campano) καὶ τοὺς Dürer, Riese καὶ Rudolff.

Ἐκ τῶν τριῶν Βιβλίων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ὅλον, τὸ I πραγματεύεται τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, τὸ II τοὺς ἀσυμμέτρους καὶ τὸ III τὴν ἄλγεβραν. Μία πλήρης ἀνάλυσις τοῦ ἔργου θὰ ἦτο ἀσυμβίβαστος πρὸς τὰ ὅρια ποὺ ἐθέσαμεν εἰς τὴν παροῦσαν ἱστορίαν, διὰ τοῦτο περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μᾶς φαίνονται δι' ὡρισμένους λόγους ἀξιόλογα. Τοιαύτης φύσεως εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν ἐκεῖνο, ὅπου ὁ συγγραφεὺς ἀποκαθιστᾷ ἕνα συσχετισμὸν μεταξὺ δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ μιᾶς γεωμετρικῆς, διότι εἰς τὸν συσχετισμὸν αὐτὸν ὁ σύγχρονος ἀναγνώστης διαβλέπει ἕνα πρόδρομον εἰς τὰς θεωρίας ἐκείνας, ποὺ ὡδήγησαν εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς ἐννοίας τοῦ λογαρίθμου.

Ἄξια σημειώσεως εἶναι ἐπίσης τὰ ὅσα γράφει ὁ Stiefel ἐπὶ τῶν συν-

τελεστῶν τοῦ διωνύμου, διότι ἐκτὸς ἑνὸς πίνακος περιέχοντος τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος μέχρι 17ης τάξεως, δίδεται ἀκόμη καὶ ἡ σπουδαία ἀναδρομικὴ σχέσις, ἡ ὁποία γράφεται σήμερον ὡς ἑξῆς:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὰ οὕτω καλούμενα κριτήρια διαιρετότητος, διότι ἐκεῖνο ποὺ θὰ παρουσίαζε πραγματικὸν ἐνδιαφέρον—τουτέστι τὸ ἀφορῶν τὴν διὰ τοῦ 7 διαιρετότητα—δὲν εἶναι γενικῆς ἰσχύος. Ὁ Stiefel περιέπεσεν εἰς τὸ αὐτὸ λάθος μὲ τὸν Tartaglia (§ 223) κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ εὐκλειδείου κανόνος πρὸς εὕρεσιν τῶν τελείων ἀριθμῶν. Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ πλήθους τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐκπεφρασμένου ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου πρώτων παραγόντων, ὁ Stiefel ἀντέγραψεν αὐτούσιον τὸν κανόνα, ποὺ εἶχεν ἤδη διατυπώσει ὁ Cardano. Πρωτοτυπίαν ὅμως παρουσιάζει ἡ θεωρία τῶν «διαμετρικῶν ἀριθμῶν», εἰς τὴν ὁποίαν καλοῦνται μὲ αὐτὸ τὸ ὄνομα οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς μετρουμένας δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν. Τέλος μόνιμον ἀξίαν ἔχουν οἱ ὑπ' αὐτοῦ δοθέντες κανόνες σχηματισμοῦ τῶν μαγικῶν τετραγώνων, κανόνες τῶν ὁποίων ἡ ἐφαρμογὴ ἐξικνεῖται μέχρι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος 13^2 ἀριθμούς.

Ὅλα αὐτὰ περιέχονται εἰς τὸ Βιβλίον I τῆς Arithmetica Integra. Εἰς τὸ Βιβλίον II ἀπαντῶμεν τὴν χρῆσιν τῶν συμβόλων + καὶ —, ὡς καὶ τὴν εἰσαγωγὴν εἰδικῶν συμβόλων πρὸς ἔνδειξιν τῶν ριζῶν διαφόρων τάξεων, συμβόλων λαμβανομένων διὰ συνδυασμοῦ τοῦ συμβόλου τῆς ρίζης μὲ τὰ ἀλγεβρικὰ σύμβολα (σχ. 5). Ἡ ἄλγεβρα βαθμηδὸν ἐξήρχετο ἀπὸ τὴν «συγκεκομμένην» φάσιν, προμηνύουσα τὴν ἀρχὴν τοῦ «συμβολικοῦ» της σταδίου ἐξελίξεως! Εἰς τὸ αὐτὸ Βιβλίον εὑρίσκονται μερικαὶ θεωρίαι ἐπί τινων σχημάτων τόσον μικροῦ ἐνδιαφέροντος, ὥστε δὲν εἶναι ἀβάσιμος ἡ διατύπωσις τῆς γνώμης, ὅτι εἰς τὸν Stiefel, ὁ γεωμέτρης δὲν εἶναι τοῦ ἰδίου ἀναστήματος μὲ τὸν ὑπολογιστήν.

Εἰς τὸ Βιβλίον III ὁ ἄγνωστος παριστάνεται μὲ ἕνα εἰδικὸν σημεῖον ποὺ φαίνεται ν' ἀποτελῇ παραμόρφωσιν τοῦ γράμματος r, ἀρχικοῦ τῆς λατινικῆς λέξεως res (=πρᾶγμα). Εἰς τὰ προβλήματα μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους, οἱ ἄγνωστοι παριστάνονται μὲ διαφορετικὰ γράμματα. Συμπτωματικῶς, ὅπως εἴδομεν ἤδη καὶ εἰς τὸν Bombelli, γράφει μίαν ἐξίσωσιν μὲ δεύτερον μέλος 0, ἀλλά, ὅπως καὶ ὁ ἀλγεβριστὴς τῆς Βολωνίας, δὲν υἱοθετεῖ συστηματικῶς μίαν τοιαύτην γραφήν. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ θεωροῦνται ὑπὸ τοῦ Stiefel ὡς μικρότεροι τοῦ μηδενὸς καὶ χαρακτηρίζονται μὲ τὸ ἐπίθετον «ἄτοποι». Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔργου εὑρίσκονται μερικὰ

προβλήματα, τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν εἰς ἐξισώσεις 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ, καὶ τὰ ὁποῖα ἐλήφθησαν ἀπὸ τὴν Ars magna. Τοιουτοτρόπως ἀποκαθίσταται μεταξὺ Cardano καὶ Stiefel μία σχέσις, οἵα μεταξὺ διδασκάλου καὶ μαθητοῦ.

Ἀπὸ τὴν ἑπομένην ἀντιπαραβολήν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν εἰς τὸ ἔργον του, συνάγεται ὅτι ὁ Stiefel ἐπέμεινεν ἐπὶ τῆς χρησιμότητος τῆς συγκρίσεως τῶν ἀντιστοίχων ὅρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ ἄλλης γεωμετρικῆς:

ἀριθμός:	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
ἐκθέται:	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Ἡ Arithmetica integra εὗρεν ἕνα λόγιον σχολιαστὴν ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Gemma Frisio (γεννηθέντος εἰς Dokkumin τῆς Frisia τὸ 1508, ἀποθανόντος δὲ καθηγητοῦ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Louvain τὸ 1555). Εἰς τὸ ἔργον του, τὸ ὁποῖον παρέμεινε ἀνέκδοτον, δίδεται μεταξὺ ἄλλων ἔμφασις εἰς τὴν πλάνην, εἰς τὴν ὁποίαν παρεσύρθη ὁ Stiefel, νομίσας ὅτι ἐδιπλασίασε τὸν κύβον καὶ ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σφάλμα προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι ὁ γερμανὸς μαθηματικὸς ἐθεώρησεν ὡς συντρεχούσας τρεῖς εὐθείας, ἐξ αἰτίας ἑνὸς σχήματος μικρᾶς ἀκριβείας.

241. Ἡ Arithmetica integra, γραφεῖσα εἰς λανινικὴν γλῶσσαν, προωρίζετο διὰ τὰς ἀνωτέρας κοινωνικὰς τάξεις. Διὰ νὰ διαδώσῃ λοιπὸν τὴν γνῶσιν τῶν ἀλγεβρικῶν θεωριῶν ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς ἀγνοοῦντας τὴν γλῶσσαν τῶν λογίων, ὁ Stiefel ἐδημοσίευσε (1545) μίαν Deutsche Aritmetica (Γερμανικὴν ἀριθμητικήν), περιέχουσαν τὸν συνήθη λογισμόν, τὴν ἄλγεβραν καὶ τὸ ἐκκλησιαστικὸν πασχάλιον. Περιοριζόμεθα ἐδῶ νὰ σημειώσωμεν τὴν χρῆσιν, ἐκτὸς τῶν σημείων + καὶ −, τῶν γοτθικῶν χαρακτήρων M καὶ D πρὸς δήλωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως· ἄλλο σύμπτωμα τῆς βραδείας μεταμορφώσεως, τὴν ὁποίαν ὑφίστατο ἡ ἄλγεβρα προτοῦ φθάσῃ εἰς τὴν σημερινήν της μορφήν.

Ἡ τελευταία καὶ οὐχὶ μικρὰ προσφορὰ τοῦ Stiefel εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας εἶναι ἡ ὑπ' αὐτοῦ ἐπιμεληθεῖσα νέα ἔκδοσις τοῦ βιβλίου τοῦ Rudolff ὑπὸ τὸν τίτλον Die Coss (ἡ Ἄλγεβρα), εἰς τὸ ὁποῖον ἔκαμεν ἀξιολόγους προσθήκας καὶ βελτιώσεις. Πρὸς τιμὴν τοῦ Stiefel, εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω προσθηκῶν ἀπαντᾶται ἡ δήλωσις, ὅτι ὁ τετραδιάστατος χῶρος, ἂν καὶ ἀπαράδεκτος γεωμετρικῶς, ἀριθμητικῶς εἶναι παραδεκτός. Μεταξὺ τῶν βελτιώσεων σημειοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀτελῶν συμβολισμῶν τοῦ Rudolff διὰ τὰς ρίζας καὶ μεταξὺ τῶν προσθηκῶν τὴν μέθοδον λύσεως τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ παρα-

δείγματα ληφθέντα ἀπὸ τὸ μέγα ἔργον τοῦ Cardano. Ἐντεῦθεν μία νέα ἐπιβεβαίωσις τῆς ἐπιδράσεως τῶν ἰταλῶν ἀλγεβριστῶν ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν τῆς λοιπῆς Εὐρώπης, διαρκοῦντος τοῦ XVI αἰῶνος.

Εἰς τὴν Γαλλίαν πρὸ τοῦ Viète

242. Ἐνῷ ὁ Stiefel προήλαυνεν ὡς θριαμβευτὴς εἰς τὸ βασίλειον τοῦ ἀριθμοῦ, προσέκρουσεν ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον ἐπεχείρησε νὰ λύσῃ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Τὸ ἀπεκάλυψεν ἕνας μοναχός, γεννηθεὶς εἰς Romans (Δελφινᾶτον) τὸ 1492, εἰς ἕνα βιβλίον του Opera geometrica (Lugduni, 1554)· ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Jean Butéon (ἐκλατινισθέντα εἰς Buteus), ὁ ὁποῖος, ἀφοῦ ἐσπούδασεν εἰς Παρισίους, ἐπέστρεψεν εἰς τὴν μονὴν τῶν Αὐγουστίνων, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀφίσει προσωρινῶς χάριν ἐκπαιδεύσεως. Ἐκδιωχθεὶς ὑπὸ τῶν διαμαρτυρομένων, κατέφυγεν εἰς Carrar, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1572. Ὅτι ὁ Butéon ἦτο προικισμένος μὲ ὀξὺ κριτικὸν πνεῦμα καταφαίνεται ἀπὸ τὸ ἔργον του De quadratura circuli (Lugduni, 1559) εἰς δύο βιβλία, ὅπου ἐπιχειρεῖ νὰ ἀναιρέσῃ (ἀλλοίμονον ὅμως! χωρὶς ἐπιτυχίαν· βλ. § 237) τὰ ὑποτιθέμενα εὑρήματα τοῦ O. Fineo ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου.

Ὡς ἐργάτης τῆς ἐπιστήμης τοῦ ἀριθμοῦ ὁ Butéon κατέχει μετρίαν θέσιν, ὄχι ὅμως ἀσήμαντον, χάρις εἰς ἕνα ἔργον του τιτλοφορούμενον Logistica quae arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta (Lugduni, 1559) (Λογιστική, ἡ κοινῶς λεγομένη ἀριθμητική, εἰς πέντε βιβλία συγκεντρωμένη). Σημειώνομεν δὲ ὅτι εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ὁ συγγραφεὺς ἐγκαταλείπει, κατόπιν κριτικῆς, τὴν συνήθειαν τῆς χρήσεως τῶν λέξεων «res» καὶ «census» κλπ. κλπ. (ποὺ ἐχρησιμοποιοῦντο πρὸς δήλωσιν τῶν ἀγνώστων) καὶ υἱοθετεῖ τὰς λέξεις «γραμμή», «τετράγωνον», «κύβος». Τὴν πρώτην παριστάνει μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα ρ, τὰς ἄλλας μὲ δύο εἰδικὰ σύμβολα εἰκονιζόμενα τὸ μὲν ὡς τετράγωνον μὲ διαγώνιον κατακόρυφον τὸ δὲ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Πρωτότυπος εἶναι ἐπίσης ἡ εἰσαγωγὴ τῶν λατινικῶν ὅρων «continens» καὶ «contentum» πρὸς δήλωσιν τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως κατεστρωμένης οὕτως, ὥστε ὅλοι οἱ συντελεσταί της νὰ εἶναι θετικοί. Ὁ Butéon λύει ἀρκετὸν ἀριθμὸν προβλημάτων· δὲν ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις, διότι δὲν διαφέρουν κατ' οὐσίαν ἀπὸ ἐκείνας ποὺ ἀπαντῶνται εἰς γνωστά μας ἤδη ἔργα τῆς ἰδίας ἐποχῆς.

Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ἕνας διανοούμενος, ὁ ὁποῖος, ἂν καὶ δὲν ἔκαμε καμμίαν αὔξησιν εἰς τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν ποὺ εἶχον ἕως τότε εὑρεθῆ, ἤσκησεν ἐπὶ τῆς γενικῆς πνευματικῆς κινήσεως ἐπιρροὴν οὐχὶ εὐκαταφρόνητον. Εἶναι ὁ Pierre de la Ra-

δείγματα ληφθέντα ἀπὸ τὸ μέγα ἔργον τοῦ Cardano. Ἐντεῦθεν μία νέα ἐπιβεβαίωσις τῆς ἐπιδράσεως τῶν ἰταλῶν ἀλγεβριστῶν ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν τῆς λοιπῆς Εὐρώπης, διαρκοῦντος τοῦ XVI αἰῶνος.

Εἰς τὴν Γαλλίαν πρὸ τοῦ Viète

242. Ἐνῷ ὁ Stiefel προήλαυνεν ὡς θριαμβευτὴς εἰς τὸ βασίλειον τοῦ ἀριθμοῦ, προσέκρουσεν ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον ἐπεχείρησε νὰ λύσῃ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Τὸ ἀπεκάλυψεν ἕνας μοναχός, γεννηθεὶς εἰς Romans (Δελφινᾶτον) τὸ 1492, εἰς ἕνα βιβλίον του Opera geometrica (Lugduni, 1554)· ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Jean Butéon (ἐκλατινισθέντα εἰς Buteus), ὁ ὁποῖος, ἀφοῦ ἐσπούδασεν εἰς Παρισίους, ἐπέστρεψεν εἰς τὴν μονὴν τῶν Αὐγουστίνων, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀφίσει προσωρινῶς χάριν ἐκπαιδεύσεως. Ἐκδιωχθεὶς ὑπὸ τῶν διαμαρτυρομένων, κατέφυγεν εἰς Carrar, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1572. Ὅτι ὁ Butéon ἦτο προικισμένος μὲ ὀξὺ κριτικὸν πνεῦμα καταφαίνεται ἀπὸ τὸ ἔργον του De quadratura circuli (Lugduni, 1559) εἰς δύο βιβλία, ὅπου ἐπιχειρεῖ νὰ ἀναιρέσῃ (ἀλλοίμονον ὅμως! χωρὶς ἐπιτυχίαν· βλ. § 237) τὰ ὑποτιθέμενα εὑρήματα τοῦ O. Fineo ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου.

Ὡς ἐργάτης τῆς ἐπιστήμης τοῦ ἀριθμοῦ ὁ Butéon κατέχει μετρίαν θέσιν, ὄχι ὅμως ἀσήμαντον, χάρις εἰς ἕνα ἔργον του τιτλοφορούμενον Logistica quae arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta (Lugduni, 1559) (Λογιστική, ἡ κοινῶς λεγομένη ἀριθμητική, εἰς πέντε βιβλία συγκεντρωμένη). Σημειώνομεν δὲ ὅτι εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ὁ συγγραφεὺς ἐγκαταλείπει, κατόπιν κριτικῆς, τὴν συνήθειαν τῆς χρήσεως τῶν λέξεων «res» καὶ «census» κλπ. κλπ. (ποὺ ἐχρησιμοποιοῦντο πρὸς δήλωσιν τῶν ἀγνώστων) καὶ υἱοθετεῖ τὰς λέξεις «γραμμή», «τετράγωνον», «κύβος». Τὴν πρώτην παριστάνει μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα ρ, τὰς ἄλλας μὲ δύο εἰδικὰ σύμβολα εἰκονιζόμενα τὸ μὲν ὡς τετράγωνον μὲ διαγώνιον κατακόρυφον τὸ δὲ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Πρωτότυπος εἶναι ἐπίσης ἡ εἰσαγωγὴ τῶν λατινικῶν ὅρων «continens» καὶ «contentum» πρὸς δήλωσιν τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως κατεστρωμένης οὕτως, ὥστε ὅλοι οἱ συντελεσταί της νὰ εἶναι θετικοί. Ὁ Butéon λύει ἀρκετὸν ἀριθμὸν προβλημάτων· δὲν ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις, διότι δὲν διαφέρουν κατ' οὐσίαν ἀπὸ ἐκείνας ποὺ ἀπαντῶνται εἰς γνωστά μας ἤδη ἔργα τῆς ἰδίας ἐποχῆς.

Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ἕνας διανοούμενος, ὁ ὁποῖος, ἂν καὶ δὲν ἔκαμε καμμίαν αὔξησιν εἰς τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν ποὺ εἶχον ἕως τότε εὑρεθῆ, ἤσκησεν ἐπὶ τῆς γενικῆς πνευματικῆς κινήσεως ἐπιρροὴν οὐχὶ εὐκαταφρόνητον. Εἶναι ὁ Pierre de la Ra-

mée ἤ, μὲ τὸ λατινικόν του ὄνομα, Petrus Ramus. Γεννηθεὶς τὸ 1515 εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Soissons, ἐσφάγη κατὰ βάρβαρον τρόπον τὴν 26 Αὐγούστου 1572 ὑπὸ πληρωμένων δολοφόνων, στρατολογηθέντων ἀπὸ τὸν πλέον ἀμείλικτον ἐχθρόν του, ὁ ὁποῖος ἐξεμεταλλεύθη, πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, τὰς ταραχώδεις ἡμέρας τῶν Παρισίων μετὰ τὴν φοβερὰν νύχτα τοῦ Ἁγίου Βαρθολομαίου*. Πνεῦμα ἀνεξάρτητον, διεκήρυξε πολὺ πρὸ τοῦ Descartes τὴν δύναμιν τοῦ λόγου ἔναντι τῆς αὐθεντίας καί, συνεπὴς πρὸς τὰς ἀρχάς του, ἐπανεστάτησεν ἐναντίον τῆς προσωπολατρείας τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Εὐκλείδου. Μολονότι ὁ ἴδιος εἶχεν ἐπιμεληθῆ μιᾶς γαλλικῆς μεταφράσεως τοῦ μεγάλου ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου, ὑπεστήριζεν ὅτι ἦτο ἀναγκαία μία ριζικὴ ἀναδιοργάνωσις τοῦ προγράμματος, βάσει τοῦ ὁποίου ἐδιδάσκετο ἡ γεωμετρία. Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ περιφημότερον ἐκ τῶν ἐπιστημονικῶν βιβλίων του, Scholae mathematicae, ἔκαμε τὴν παρατήρησιν ὅτι θὰ ἦτο ἀπὸ διδακτικῆς ἀπόψεως σκόπιμον νὰ κατανεμηθοῦν τὰ ἀξιώματα καὶ τὰ αἰτήματα εἰς οἰκείας θέσεις τοῦ κειμένου, ἀντὶ νὰ καταγράφωνται ὅλα ὁμοῦ εἰς τὴν ἀρχήν, ὅπως ἔκαμεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ «Στοιχεῖα». Εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται περαιτέρω ἡ πρώτη θεώρησις τῶν σημειοσειρῶν πού γεννῶνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου τεμνομένων ὑπὸ δέσμης εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν τρίτην πλευράν.

Ὡς ἐὰν εἶχε προαίσθησιν τοῦ θανάτου του, διέθεσεν ἕνα σημαντικὸν κεφάλαιον διὰ τὴν καθιέρωσιν μιᾶς νέας ἕδρας εἰς τὸ Γαλλικὸν Κολλέγιον, ἡ ὁποία θὰ ἐξεχωρεῖτο ἀνὰ τρία ἔτη κατόπιν δημοσίου διαγωνισμοῦ. Καὶ πράγματι ἡ «ἕδρα τοῦ Ramus» ἐλειτούργησεν ἐπὶ δύο περίπου αἰῶνας καὶ θὰ ὑφίστατο μέχρι σήμερον, ἐὰν δὲν κατεστρέφετο ὁ θεσμὸς μαζὶ μὲ ὅλα ὅσα κατέρριψε τὸ 1789 ὁ ἀκάθεκτος τυφὼν τῆς ἐπαναστάσεως.

Ἄς σημειώσωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ποὺ κατέλαβε τὴν ἕδραν τοῦ Ramus ἦτο ὁ Maurice Bressieu, ὁ ὁποῖος τὴν ἐκράτησε μέχρι τοῦ θανάτου του (1608) καὶ τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς τριγωνομετρίας δι' ἕνα ἔργον του μὲ τίτλον Metrices astronomicae (Paris, 1581). Ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἐδόξασε τὴν ἕδραν περισσότερον οἱουδήποτε ἄλλου ὑπῆρξεν ὁ Roberval, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν διὰ μακρῶν εἰς ἄλλην θέσιν, καὶ ὁ ὁποῖος τὴν ἐκράτησε περισσότερον ἀπὸ 40 ἔτη (1634 - 1675). Ἄλλος οὐχὶ ἀσήμαντος κάτοχος τῆς ἕδρας αὐτῆς ἦτο ὁ L. Pothénot, ὁ ὁποῖος τὴν ἐκράτησεν ἀπὸ τοῦ 1711 μέχρι τοῦ θανάτου του (1732) καὶ ἐκληροδότησε τὸ ὄνομά του εἰς ἕνα πρόβλημα πρακτικῆς γεωμετρίας (Σ. Μτ: Τριῶν σημείων A, B, C δοθέντων εἰς τὸ ἐπίπεδον, εὑρεῖν σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $\sphericalangle AMB=\varphi$, $\sphericalangle BMC=\omega$). Τοιουτοτρόπως ἡ εὐεργετικὴ ἐπίδρασις τοῦ Ramus διετηρήθη πολὺ πέραν τοῦ θανάτου του.

* Περαιτέρω βιογραφικὰ δεδομένα περιέχονται εἰς τὸ ἄριστον βιβλίον τοῦ C. Waddington : P. de la Ramée· sa vie, ses écris, ses opinions (Paris, 1856).

243. Συναντῶμεν ἀκόμη εἰς τὴν Γαλλίαν τὸν Jeacques Pélétier ἢ Peletarius, ποιητὴν καὶ μαθηματικόν, γεννηθέντα εἰς Mans τὴν 25 Ἰουλίου 1517. Ὠθούμενος ἀπὸ τὴν δίψαν τῆς μαθήσεως διέμεινεν εἰς διαφόρους πόλεις τῆς Γαλλίας καὶ κατόπιν εἰς Ρώμην, ἐνῷ πρὸς ἱκανοποίησιν τοῦ ἀνησύχου πνεύματός του ἐπεδίδετο ἐκ περιτροπῆς εἰς τὰ νομικά, τὴν ἰατρικὴν καὶ τὰ μαθηματικά. Ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὸ 1582. Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς γεωμετρίας ἀναφέρεται τὸ ὄνομά του διὰ μίαν ἔκδοσιν τῶν ἕξ πρώτων Βιβλίων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (Λυών, 1571). Εἰς τὴν ἱστορίαν ἐξ ἄλλου τῆς ἀλγέβρας ἔχει θέσιν μαζὺ μὲ τὸν Butéon, ποὺ ἐγνωρίσαμεν ἤδη, καὶ τὸν Gosselin, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὸ σύνολον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς πρόδρομοι τοῦ Viète. Τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ παρέχει ἕνα ἔργον του, τιμηθὲν μὲ πολλὰς ἐκδόσεις, ἡ τρίτη ἐκ τῶν ὁποίων φέρει χρονολογίαν 1556 καὶ τίτλον L'Arithmétique de Jacques Pélétier du Mans, départie en quatre livres. Ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει μὲ σεβασμὸν μερικοὺς προγενεστέρους ἀλγεβριστάς· ἀγνοῶν ὅμως τὴν γερμανικὴν δὲν ἠδυνήθη νὰ ἐπωφεληθῇ ἀμέσως τῶν συγγραμμάτων τῶν Riese καὶ Rudolff, ἀλλ' οὔτε τῆς Summa τοῦ Pacioli, δι' ἄγνοιαν τῆς ἰταλικῆς γλώσσης. Εἰς ἀντιστάθμισμα, δεικνύει οἰκειότητα πρὸς τοὺς Cardano καὶ Stiefel, οἱ ὁποῖοι ἔγραψαν εἰς τὴν λατινικήν. Ἀπὸ τὸν τελευταῖον ἐδανείσθη τὸ σύστημα τῆς παραστάσεως μὲ γράμματα τῶν διαφόρων ἀγνώστων ἑνὸς προβλήματος. Ἀφ' ἑαυτοῦ δὲ διατυπώνει τὴν παρατήρησιν, εἰς μίαν τοὐλάχιστον περίπτωσιν, ὅτι ἐὰν μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ἔχει τὴν μονάδα ὡς συντελεστὴν τῆς μεγίστης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου καὶ ἀκεραίους ὅλους τοὺς ἄλλους συντελεστάς, τότε πᾶσα ἀκεραία ρίζα τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην διαιρέτης τοῦ γνωστοῦ ὅρου αὐτῆς. Δὲν ἠδυνήθη ὅμως νὰ συλλάβῃ τὴν γενικότητα καὶ τὴν σπουδαιότητα τῆς παρατηρήσεως. Πρὸς παράστασιν τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ ἀγνώστου ἑνὸς προβλήματος, χρησιμοποιεῖ τὰ «κοσικὰ σύμβολα» καὶ διὰ νὰ δηλώσῃ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τὰ γράμματα p· καὶ m·(τὸ καθὲν μὲ μίαν τελείαν), ὅταν τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουν πλέον γενικευθῆ, τοὐλάχιστον εἰς τὴν Γερμανίαν.

Πρὸς τιμήν του, πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δὲν ἀπέφυγε τὴν χρῆσιν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· «βλέπετε», λέγει, «ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ κάτω τοῦ μηδενὸς δὲν εἶναι χωρὶς χρησιμότητα· διότι μὲ αὐτοὺς γίνεται ἡ βάσανος τῶν παραδειγμάτων καὶ ἀποδεικνύεται ἡ ἐπαλήθευσις τῶν κανόνων». Δὲν χρησιμοποιεῖ μεθοδικῶς τὴν ἐξίσωσιν μὲ δεύτερον μέλος μηδέν, δὲν ἀρνεῖται ὅμως εἰς τὸ βιβλίον του μίαν θέσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$216 + 41472\sqrt{x} - 18x - 648\sqrt{x} = 0,$$

τὴν ὁποίαν παρέλαβεν ἀπὸ τὸν Stiefel.

Καθὼς ἡ γενικὴ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἦτο ἐκείνην τὴν ἐποχὴν ἄγνωστος, ἐθεώρησεν ὅτι ἦτο σκόπιμον νὰ ἐκθέσῃ τὰς ἰδιότητας τῆς κατηγορίας τῶν μεγεθῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ἀφιερωμένον τὸ X βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, παρασυρθεὶς μάλιστα εἰς ἀδίκους μομφὰς ἐναντίον τοῦ μαθηματικοῦ, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰ ριζικά, δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ Pélétier ἐδίδαξε τὴν τροπὴν τοῦ παρονομαστοῦ ἑνὸς κλάσματος εἰς ρητόν, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἕνα τριώνυμον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ Pélétier, εἶχεν ἤδη πραγματοποιήσει προηγουμένως ὁ Pacioli.

244. Ἄγνωστα εἶναι τὰ βιογραφικὰ στοιχεῖα τοῦ συγγραφέως ἑνὸς ἔργου, φέροντος τίτλον: Guilelmi Gosselini Cadomensis Bellocasii de arte magna, seu de occulta parte numerorum quae & algebra & almucabala vulgo dicitur Libri quatuor (Parisiis, 1577). Γνωστὸν εἶναι μόνον ὅτι ἐγεννήθη εἰς Caen καὶ ὅτι διέδωσεν εἰς Γαλλίαν ἕνα ἔργον τοῦ Tartaglia (§ 225).

Τὸ ἔργον δὲν ἔχει πρωτοτυπίαν, εἶναι ὅμως ὑπόδειγμα διαυγείας. Αἱ συντομογραφίαι ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Gosselin (τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως) στηρίζονται ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν κεφαλαίων γραμμάτων. Ἐπειδὴ ὅμως χρησιμοποιοῦνται ἄλλοτε πρὸς δήλωσιν τῶν πρώτων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς (D διὰ τὴν πρόσθεσιν, M διὰ τὴν ἀφαίρεσιν) καὶ ἄλλοτε πρὸς δήλωσιν τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ ἀγνώστου (L ἡ πρώτη, Q ἡ δευτέρα), οἱ τύποι ποὺ προκύπτουν μὲ τὴν γραφὴν αὐτὴν προκαλοῦν κάποιαν σύγχυσιν. Παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

12 L M I Q P 48 aequalia 144 M 24 L P 2 Q,

ἡ ὁποία σήμερον θὰ ἐγράφετο:

$$12\,x - x^2 + 48 = 144 - 24\,x + 2\,x^2.$$

Χωρὶς ἀπόδειξιν διδάσκεται ἡ ἔκφρασις τοῦ πολυγωνικοῦ ἀριθμοῦ δοθείσης πλευρᾶς καὶ δοθέντος πλήθους κορυφῶν. Γνωρίζομεν ὅτι ἦτο ἤδη γνωστὴ εἰς τὸν Διόφαντον, ἂν ὄχι καὶ προηγουμένως (βλ. τόμος I, § 92), ὁ συγγραφεὺς ὅμως λέγει, ὅτι τὴν παρέλαβεν ἀπὸ τὸν Maurice Bressieu (§ 242), προκειμένου νὰ δώσῃ μερικὰς ἐφαρμογάς.

Εἶναι περίεργον τὸ ὅτι ἐνῷ ἀναφέρει ἐγκωμιαστικῶς τὴν «Ἄλγεβραν» τοῦ Nunes (§ 246), «in cujus verba juravit», μέμφεται τὸν πορτογάλον μαθηματικὸν διότι ἐξήτασεν ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις ὅλων τῶν βαθμῶν, ἐνῷ, κατ' αὐτόν, ἔπρεπε νὰ σταματήσῃ εἰς τὸν τρίτον. Ἰδέα ἀρκετὰ παράξενη, τὴν ὁποίαν φέρει ὡς προϊὸν τοῦ πνεύματός του, ἐνῷ πιθανώτατα τὴν ἔχει ἐμπνευσθῆ ἀπὸ τὸν Cardano (Ἅπαντα, τόμος IV, σ. 222).

Πρὸς τιμὴν τέλος τοῦ Gosselini, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ὑπῆρξεν ἕνας ἐκ τῶν πρώτων ποὺ κατενόησαν τὴν τεραστίαν ἀξίαν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ποὺ μόλις τότε ἐδόθησαν εἰς τὸν τύπον, καὶ ὅτι εἰς τὴν γραφὴν συστημάτων ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους ἐπροχώρησε μὲ μεγαλυτέραν ἀσφάλειαν ἀπὸ τὸν Butéon.

R. Recorde

245. Διαβαίνοντες τώρα τὴν Μάγχην, θὰ εὕρωμεν ἕνα μαθηματικὸν σημαντικῆς ἀξίας καὶ μεγάλης ἐπιρροῆς, τὸν Robert Recorde. Ἐγεννήθη εἰς Teuby (Galles) τὸ 1510, ἐσπούδασε δὲ διαδοχικῶς εἰς Oxford, Cambridge καὶ Λονδῖνον, ὅπου μάλιστα ὑπηρέτησεν ὡς ἰατρὸς τοῦ βασιλέως Ἐδουάρδου VI καὶ ἐν συνεχείᾳ τῆς βασιλίσσης Μαρίας. Ἐχρημάτισεν ἀκόμη ἐπί τινα χρόνον ἔφορος τῶν ἰρλανδικῶν μεταλλωρυχείων (Comptroller of Mints and Monies). Παρ' ὅλ' αὐτὰ ἡ βασιλικὴ εὔνοια δὲν ἦτο τοιαύτης δυνάμεως, ὥστε νὰ τὸν σώσῃ ἀπὸ τὴν φυλακήν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1558, χωρὶς μέχρι σήμερον νὰ ἔχουν ἐξακριβωθῇ οἱ λόγοι τῆς διώξεώς του.

Ὁ Recorde θεωρεῖται ὡς θεμελιωτὴς τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν εἰς τὴν Ἀγγλίαν, τόσον διὰ τὰ διδακτικά του συγγράμματα ὅσον καὶ διὰ τὸν λόγον, ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος χρησιμοποιήσας εἰς αὐτὰ τὴν μητρικήν του γλῶσσαν. Ἀγγλιστὶ εἶχε πράγματι γραφῆ τὸ ἔργον του The ground of Artes (Ἡ βάσις τῶν τεχνῶν, Λονδῖνον, 1542). Πρόκειται περὶ ἐγχειριδίου ἀριθμητικῆς, ὑπὸ μορφὴν διαλόγου, περιέχοντος ὅσα εἶναι ἀπαραίτητα, διὰ τὸν χειρισμὸν τῶν ἀριθμῶν. Αἱ πολυάριθμοι ἐκδόσεις ποὺ ἐπηκολούθησαν ἀρκοῦν εἰς ἀπόδειξιν τοῦ γεγονότος, ὅτι τὸ βιβλίον ἀνταπεκρίνετο εἰς πραγματικὴν ἀνάγκην.

Ὑψηλότερον εἶναι τὸ ἀντικείμενον ἑνὸς ἄλλου ἔργου τυπωθέντος τὸ 1557 καὶ προοριζομένου, ὅπως τὸ λέγει ὁ τίτλος του, νὰ «ὀξύνῃ τὰ πνεύματα». Ἀρχίζει πράγματι ὁ τίτλος μὲ τὰς λέξεις The whetstone of witte (ἤτοι: τὸ ἀκόνι τοῦ πνεύματος), ἡ δὲ ἀκολουθοῦσα φράσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τέχνη «the cossike practise», μαρτυρεῖ ὅτι οὔτε ὁ Recorde ἠδυνήθη ν' ἀποφύγῃ τὴν ἰταλικὴν ἐπίδρασιν, ἔστω καὶ ἐμμέσως διὰ τῶν γερμανῶν ἀλγεβριστῶν. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἀγγλίαν τὰ σημεῖα + καὶ —, ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὴν παράστασιν τῆς ἰσότητος, ὁ Recorde, «πρὸς ἀποφυγὴν ἀνιαρῶν ἐπαναλήψεων», χρησιμοποιεῖ τὸ σύμβολον =, εἰς ἡμᾶς βεβαίως οἰκειότατον, τότε ὅμως ἐξ ὁλοκλήρου καινοφανές· δικαιολογεῖ δὲ τὴν ἐκλογὴν τοῦ συμβόλου τούτου παρατηρῶν, ὅτι τίποτε δὲν δύναται ν' ἀποδώσῃ καλύτερα τὴν ἰδέαν τῆς ἰσότητος ὅσον δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ παράλληλοι. Τοιουτοτρόπως ἡ ἄλγεβρα ἐπραγματοποίησεν ἕνα ἀκόμη βῆμα πρὸς τὸ στάδιον τῆς συμβολικῆς ἐπι-

Πρὸς τιμὴν τέλος τοῦ Gosselini, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ὑπῆρξεν ἕνας ἐκ τῶν πρώτων ποὺ κατενόησαν τὴν τεραστίαν ἀξίαν τῶν Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν τοῦ Διοφάντου, ποὺ μόλις τότε ἐδόθησαν εἰς τὸν τύπον, καὶ ὅτι εἰς τὴν γραφὴν συστημάτων ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους ἐπροχώρησε μὲ μεγαλυτέραν ἀσφάλειαν ἀπὸ τὸν Butéon.

R. Recorde

245. Διαβαίνοντες τώρα τὴν Μάγχην, θὰ εὕρωμεν ἕνα μαθηματικὸν σημαντικῆς ἀξίας καὶ μεγάλης ἐπιρροῆς, τὸν Robert Recorde. Ἐγεννήθη εἰς Teuby (Galles) τὸ 1510, ἐσπούδασε δὲ διαδοχικῶς εἰς Oxford, Cambridge καὶ Λονδῖνον, ὅπου μάλιστα ὑπηρέτησεν ὡς ἰατρὸς τοῦ βασιλέως Ἐδουάρδου VI καὶ ἐν συνεχείᾳ τῆς βασιλίσσης Μαρίας. Ἐχρημάτισεν ἀκόμη ἐπί τινα χρόνον ἔφορος τῶν ἰρλανδικῶν μεταλλωρυχείων (Comptroller of Mints and Monies). Παρ' ὅλ' αὐτὰ ἡ βασιλικὴ εὔνοια δὲν ἦτο τοιαύτης δυνάμεως, ὥστε νὰ τὸν σώσῃ ἀπὸ τὴν φυλακήν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1558, χωρὶς μέχρι σήμερον νὰ ἔχουν ἐξακριβωθῆ οἱ λόγοι τῆς διώξεώς του.

Ὁ Recorde θεωρεῖται ὡς θεμελιωτὴς τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν εἰς τὴν Ἀγγλίαν, τόσον διὰ τὰ διδακτικά του συγγράμματα ὅσον καὶ διὰ τὸν λόγον, ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος χρησιμοποιήσας εἰς αὐτὰ τὴν μητρικήν του γλῶσσαν. Ἀγγλιστὶ εἶχε πράγματι γραφῆ τὸ ἔργον του The ground of Artes (Ἡ βάσις τῶν τεχνῶν, Λονδῖνον, 1542). Πρόκειται περὶ ἐγχειριδίου ἀριθμητικῆς, ὑπὸ μορφὴν διαλόγου, περιέχοντος ὅσα εἶναι ἀπαραίτητα, διὰ τὸν χειρισμὸν τῶν ἀριθμῶν. Αἱ πολυάριθμοι ἐκδόσεις ποὺ ἐπηκολούθησαν ἀρκοῦν εἰς ἀπόδειξιν τοῦ γεγονότος, ὅτι τὸ βιβλίον ἀνταπεκρίνετο εἰς πραγματικὴν ἀνάγκην.

Ὑψηλότερον εἶναι τὸ ἀντικείμενον ἑνὸς ἄλλου ἔργου τυπωθέντος τὸ 1557 καὶ προοριζομένου, ὅπως τὸ λέγει ὁ τίτλος του, νὰ «ὀξύνῃ τὰ πνεύματα». Ἀρχίζει πράγματι ὁ τίτλος μὲ τὰς λέξεις The whetstone of witte (ἤτοι: τὸ ἀκόνι τοῦ πνεύματος), ἡ δὲ ἀκολουθοῦσα φράσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τέχνη «the cossike practise», μαρτυρεῖ ὅτι οὔτε ὁ Recorde ἠδυνήθη ν' ἀποφύγῃ τὴν ἰταλικὴν ἐπίδρασιν, ἔστω καὶ ἐμμέσως διὰ τῶν γερμανῶν ἀλγεβριστῶν. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἀγγλίαν τὰ σημεῖα + καὶ —, ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὴν παράστασιν τῆς ἰσότητος, ὁ Recorde, «πρὸς ἀποφυγὴν ἀνιαρῶν ἐπαναλήψεων», χρησιμοποιεῖ τὸ σύμβολον =, εἰς ἡμᾶς βεβαίως οἰκειότατον, τότε ὅμως ἐξ ὁλοκλήρου καινοφανές· δικαιολογεῖ δὲ τὴν ἐκλογὴν τοῦ συμβόλου τούτου παρατηρῶν, ὅτι τίποτε δὲν δύναται ν' ἀποδώσῃ καλύτερα τὴν ἰδέαν τῆς ἰσότητος ὅσον δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ παράλληλοι. Τοιουτοτρόπως ἡ ἄλγεβρα ἐπραγματοποίησεν ἕνα ἀκόμη βῆμα πρὸς τὸ στάδιον τῆς συμβολικῆς ἐπι-

στήμης. Καὶ πρέπει ἀσφαλῶς ν' ἀναγνωρισθῇ τοῦτο ὡς ἕνας τίτλος τιμῆς τοῦ Recorde ἀκόμη καὶ ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν γνώμην ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον του, διὰ τὴν στάθμην εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται, φαίνεται μᾶλλον ν' ἀνήκῃ εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ L. Pacioli, παρὰ εἰς τὸν αἰῶνα κατὰ τὸν ὁποῖον ἐδόθη ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ.

Πρέπει ἐπίσης νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω λογικὴ πρότασις τοῦ Recorde δὲν ἔγινε δεκτὴ ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς, παρὰ ἕνα περίπου αἰῶνα μετὰ τὸν θάνατόν του. Οἱ βιογράφοι του ἀναφέρουν, ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλονται καὶ ἄλλα ἔργα ἔχοντα τίτλους: Pathway to knowledge (ὁδὸς πρὸς τὴν γνῶσιν), Principles of geometry (Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας) καὶ Mensuration (Καταμέτρησις) — διὰ νὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς ἐκεῖνα ποὺ συνδέονται πρὸς τὴν ἐπιστήμην μας — χωρὶς ὅμως ν' ἀπαντῶνται εἰς αὐτὰ νεωτερισμοὶ ἄξιοι ἰδιαιτέρας μνείας.

P. Nunes

246. Μεταξὺ τῶν ἀνδρῶν, οἱ ὁποῖοι μὲ τὰ ἔργα των προετοιμάζουν ἀποτελεσματικῶς τὴν ἐμφάνισιν τῆς συμβολικῆς ἀλγέβρας συγκαταλέγεται ἡ μοναδικὴ ἐξέχουσα μαθηματικὴ προσωπικότης, ἡ ὁποία, κατὰ τοὺς παρελθόντας αἰῶνας, εἶδε τὸ φῶς εἰς Πορτογαλίαν: ὁ Pedro Nunes (λατινικά: Nonius ἢ Nonnius καὶ ἱσπανικά: Nuñez). Γεννηθεὶς τὸ 1502 πλησίον τῆς Λισσαβῶνος, εἰς Alcacer do Sal (ἡ Salacia τῶν Ρωμαίων) ἀπὸ ἰσραηλιτικὴν οἰκογένειαν, κατώρθωσε ν' ἀποφύγῃ τοὺς διωγμοὺς τῆς Ἱερᾶς Ἐξετάσεως, χάρις εἰς τὴν προστασίαν, τὴν ὁποίαν τοῦ ἐξησφάλισεν ἡ σοφία του, ἐκ μέρους τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας.

Μόλις ἐπεράτωσε τὰς σπουδάς του εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Λισσαβῶνος, τοῦ ἐδόθη ἐκεῖ μία ἕδρα, ὡς καὶ ἡ θέσις τοῦ «κυβερνητικοῦ κοσμογράφου», μετονομασθέντος βραδύτερον μὲ τὸν τιμητικώτατον τίτλον «μέγας κοσμογράφος». Ἐπεσκέφθη κατόπιν διάφορα κέντρα ἀνωτάτης ἐκπαιδεύσεως, διεσπαρμένα ἀνὰ τὴν ἰβηρικὴν χερσόνησον καὶ ἀπέθανεν εἰς τὴν γενέθλιον γῆν τὴν 11 Αὐγούστου 1578, περιβαλλόμενος μὲ γενικὸν θαυμασμόν.

Ἕνα ἔργον του Tratado de sphera, δημοσιευθὲν τὸ 1537, ἀποτελεῖ διατριβὴν ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ κοσμογραφικοῦ ἔργου τοῦ Sacrobosco. Δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν ἱστορίαν μας τὰ ἔργα του τὰ ἀφορῶντα τὴν ναυσιπλοΐαν. Τὰ ἀναφέρομεν μόνον, διότι εὑρίσκεται ἐκεῖ ἡ ἔννοια τῆς «λοξοδρομίας». Μία ἐλαφρὰ πλάνη τοῦ Nunes διωρθώθη κατόπιν ἀπὸ τὸν Stevin. Εἰς τὰ ἔργα αὐτὰ εὑρίσκεται ἐπίσης ἡ περιγραφὴ ἑνὸς ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ἀδίκως ἐταυτίσθη μὲ ἕνα ἄλλο, ἐφευρεθὲν τὸ 1631 ὑπὸ τοῦ P. Vernier (1580-1637), καὶ τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη «νόνιος».

στήμης.Καὶ πρέπει ἀσφαλῶς ν' ἀναγνωρισθῇ τοῦτο ὡς ἕνας τίτλος τιμῆς τοῦ Recorde ἀκόμη καὶ ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν γνώμην ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον του, διὰ τὴν στάθμην εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται, φαίνεται μᾶλλον ν' ἀνήκῃ εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ L. Pacioli, παρὰ εἰς τὸν αἰῶνα κατὰ τὸν ὁποῖον ἐδόθη ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ.

Πρέπει ἐπίσης νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω λογικὴ πρότασις τοῦ Recorde δὲν ἔγινε δεκτὴ ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς, παρὰ ἕνα περίπου αἰῶνα μετὰ τὸν θάνατόν του. Οἱ βιογράφοι του ἀναφέρουν, ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλονται καὶ ἄλλα ἔργα ἔχοντα τίτλους: Pathway to knowledge (ὁδὸς πρὸς τὴν γνῶσιν), Principles of geometry (Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας) καὶ Mensuration (Καταμέτρησις) — διὰ νὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς ἐκεῖνα ποὺ συνδέονται πρὸς τὴν ἐπιστήμην μας — χωρὶς ὅμως ν' ἀπαντῶνται εἰς αὐτὰ νεωτερισμοὶ ἄξιοι ἰδιαιτέρας μνείας.

P. Nunes

246. Μεταξὺ τῶν ἀνδρῶν, οἱ ὁποῖοι μὲ τὰ ἔργα των προετοιμάζουν ἀποτελεσματικῶς τὴν ἐμφάνισιν τῆς συμβολικῆς ἀλγέβρας συγκαταλέγεται ἡ μοναδικὴ ἐξέχουσα μαθηματικὴ προσωπικότης, ἡ ὁποία, κατὰ τοὺς παρελθόντας αἰῶνας, εἶδε τὸ φῶς εἰς Πορτογαλίαν: ὁ Pedro Nunes (λατινικά: Nonius ἢ Nonnius καὶ ἰσπανικά: Nuñez). Γεννηθεὶς τὸ 1502 πλησίον τῆς Λισσαβῶνος, εἰς Alcacer do Sal (ἡ Salacia τῶν Ρωμαίων) ἀπὸ ἰσραηλιτικὴν οἰκογένειαν, κατώρθωσε ν' ἀποφύγῃ τοὺς διωγμοὺς τῆς Ἱερᾶς Ἐξετάσεως, χάρις εἰς τὴν προστασίαν, τὴν ὁποίαν τοῦ ἐξησφάλισεν ἡ σοφία του, ἐκ μέρους τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας.

Μόλις ἐπεράτωσε τὰς σπουδάς του εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Λισσαβῶνος, τοῦ ἐδόθη ἐκεῖ μία ἕδρα, ὡς καὶ ἡ θέσις τοῦ «κυβερνητικοῦ κοσμογράφου», μετονομασθέντος βραδύτερον μὲ τὸν τιμητικώτατον τίτλον «μέγας κοσμογράφος». Ἐπεσκέφθη κατόπιν διάφορα κέντρα ἀνωτάτης ἐκπαιδεύσεως, διεσπαρμένα ἀνὰ τὴν ἰβηρικὴν χερσόνησον καὶ ἀπέθανεν εἰς τὴν γενέθλιον γῆν τὴν 11 Αὐγούστου 1578, περιβαλλόμενος μὲ γενικὸν θαυμασμόν.

Ἕνα ἔργον του Tratado de sphera, δημοσιευθὲν τὸ 1537, ἀποτελεῖ διατριβὴν ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ κοσμογραφικοῦ ἔργου τοῦ Sacrobosco. Δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν ἱστορίαν μας τὰ ἔργα του τὰ ἀφορῶντα τὴν ναυσιπλοΐαν. Τὰ ἀναφέρομεν μόνον, διότι εὑρίσκεται ἐκεῖ ἡ ἔννοια τῆς «λοξοδρομίας». Μία ἐλαφρὰ πλάνη τοῦ Nunes διωρθώθη κατόπιν ἀπὸ τὸν Stevin. Εἰς τὰ ἔργα αὐτὰ εὑρίσκεται ἐπίσης ἡ περιγραφὴ ἑνὸς ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ἀδίκως ἐταυτίσθη μὲ ἕνα ἄλλο, ἐφευρεθὲν τὸ 1631 ὑπὸ τοῦ P. Vernier (1580-1637), καὶ τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη «νόνιος».

Εἰς τὴν καθαρὰν ἐπιστήμην ἀνήκει ἡ ἀμείλικτος ἀνασκευή, τὴν ὁποίαν ἔγραψεν ὁ Nunes, διὰ τὴν ἐργασίαν τοῦ O. Fineo, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ τελευταῖος περιέπεσεν εἰς τὴν αὐταπάτην, ὅτι ἔλυσε τὰ τρία κλασσικὰ προβλήματα τῆς ἀρχαίας γεωμετρίας καὶ ὅτι ἀνεκάλυψε μίαν γενικὴν κατασκευὴν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ὅλων τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Οἱ συλλογισμοὶ τοὺς ὁποίους παραθέτει ὁ Nunes εἶναι τόσον ἐξαίρετοι, ὥστε περισσότερον χάριν αὐτῶν παρά χάριν τῆς πειστικότητός των ἐναντίον τῶν ἀπόψεων τοῦ Fineo, ἐτιμήθη τὸ ἔργον του μὲ δύο ἐκδόσεις (1546 καὶ 1571). Ὁ Nunes εἶναι ἕνας μεταξὺ πολλῶν, ποὺ συνέγραψαν σχόλια εἰς τὸ V Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ σχετικὸν ἔργον του δὲν ἐδόθη ποτὲ εἰς τὸν τύπον καὶ κατέληξε νὰ χαθῇ.

Τὸ 1532 ἔγραψεν εἰς πορτογαλικὴν γλῶσσαν ἕνα ἐγχειρίδιον ἀλγέβρας, ἀλλὰ δὲν ἐφρόντισε διὰ τὴν δημοσίευσίν του. Ὅταν ἀπεφάσισε νὰ τὸ δώσῃ πρὸς ἐκτύπωσιν, ἐσκέφθη νὰ τὸ μεταφράσῃ πρῶτα εἰς τὴν ἱσπανικήν, γλῶσσαν τότε πολὺ περισσότερον γνωστὴν καὶ διαδεδομένην, ἐνῷ συγχρόνως ἐπέφερε σημαντικὰς προσθήκας, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται ἴχνη ἔργων δημοσιευθέντων ἐν τῷ μεταξύ.

Τὸ ἔργον αὐτὸ εἶναι ἀσφαλῶς ἕνα ἀπὸ τὰ καλύτερα ποὺ ἐδημοσιεύθησαν ἐπὶ τοῦ θέματος ἐκείνην τὴν ἐποχήν, τόσον διὰ τὴν διαύγειαν καὶ τὴν αὐστηρότητα τῆς ἐκθέσεως, ὅσον καὶ διότι ὁ συγγραφεὺς ἠκολούθησε τὸν Giordano Nemorario ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῆς χρήσεως γραμμάτων πρὸς δήλωσιν τῶν ποσοτήτων, χωρὶς νὰ παραμείνῃ προσκεκολλημένος εἰς τὴν εὐκλείδειον συνήθειαν τῆς παραστάσεως αὐτῶν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἄλλο χαρακτηριστικὸν εἶναι ἡ ἐγκατάλειψις τῆς συνηθείας, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησαν οἱ Pacioli, Tartaglia, Cardano καὶ ἄλλοι, νὰ ὑποθέτουν δηλαδὴ ὅτι τὰ προβλήματα πρέπει ν' ἀναφέρωνται εἰς συγκεκριμένας περιπτώσεις τῆς πράξεως.

Ἀκόμη καὶ ὁ ἥλιος ἔχει κηλῖδας. Ἀκόμη καὶ ὁ Nunes δὲν εἶναι ἀπηλλαγμένος ἐλαττωμάτων· καὶ ἐλαττώματα εἶναι βεβαίως αἱ κριτικαί του ἐναντίον τοῦ Pacioli, διότι ὁ τελευταῖος παρεδέχετο τὴν δυνατότητα ἀρνητικῶν λύσεων. Δι' ἕνα ἄλλον μαθηματικὸν διατυπώνει μομφὴν ἐστερημένην βάσεως: κατηγορεῖ τὸν Tartaglia, ὅτι ὁ τύπος του ὁ δίδων τὰς λύσεις τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, παρέχει ἐνίοτε ἐξαγόμενα πολυπλοκωτέρας μορφῆς ἀπὸ ὅσον εἶναι πρέπον. Τὴν βασιμότητα τῆς θέσεώς του ὑποστηρίζει, ἀναφέρων παραδείγματα τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ὅταν ἔχουν ρίζαν ἀναγνωριζομένην ἐξ ὄψεως δύνανται ν' ἀναχθοῦν εἰς δευτεροβαθμίους καὶ νὰ λυθοῦν ἐπομένως, χωρὶς τὴν συνδρομὴν τοῦ τύπου τοῦ Tartaglia. Τοιούτων ἰδιαζουσῶν ἐξισώσεων δίδει περισσότερα παραδείγματα, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν ἐνδιαφέροντα, ἀλλὰ δὲν συντελοῦν εἰς τὴν μείωσιν τῆς ἀξίας τοῦ γενικοῦ τύπου ἐπιλύσεως.

Ὁ Nunes ἔχει προφανῶς μελετήσει τοὺς καλυτέρους ἰταλοὺς ἀλγεβριστάς, δὲν ὁμιλεῖ ὅμως περὶ αὐτῶν ὡς μαθητής των, ἀλλ' ὡς ἐὰν ἦσαν ἐφάμιλλοί του. Ἀναφέρει π.χ. τὸ πρόβλημα τὸ ἀναγόμενον εἰς τὸ σύστημα:

$$x+\frac{y+z}{2}=32, \quad y+\frac{z+x}{3}=28, \quad z+\frac{x+y}{4}=31$$

καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει λύσει ὁ Cardano τόσον εἰς τὸ ἔργον του Practica Arithmeticae ὅσον καὶ εἰς τὸ ἔργον του Ars magna. Ὁ Nunes ὑποδεικνύει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία, καυχᾶται, ὑπερέχει τῶν μέχρι τῶν ἡμερῶν του γνωστῶν.

Ἐντελῶς ἀναλόγως, εἰς τὴν περιοχὴν τὴν ἀφιερωμένην εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα (καὶ ἃς σημειώσωμεν παρεμπιπτόντως, ὅτι στηρίζεται εἰς τὸ De triangulis τοῦ Regiomontano) ἐμπίπτει εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου μὲ δεδομένας πλευράς. Μὲ αὐτὸ εἶχεν ἤδη ἀσχοληθῆ ὁ Pacioli, ἀλλὰ κατὰ τρόπον ἀσαφῆ καὶ συγκεχυμένον· καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὴν λύσιν τοῦ Nunes. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι ἡ λύσις του καταλαμβάνει ὄχι ὀλιγωτέρας τῶν εἴκοσι σελίδων, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὀλίγισται γραμμαὶ φωτεινῆς διατυπώσεως ἤρκεσαν εἰς τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα (βλ. Τόμος Ι, § 74) νὰ ἐπιτύχῃ μὲ ἀπαράμιλλον διαύγειαν τὸν ἴδιον σκοπόν.

Φῶς καὶ σκιὰ ἐναλλάσσονται λοιπὸν εἰς τὴν μαθηματικὴν παραγωγὴν τοῦ Nunes. Καθὼς ὅμως τὸ πρῶτον καταφανῶς πλεονάζει, δὲν ἀμφισβητεῖται ἀπὸ κανένα ἡ διακεκριμένη θέσις, ποὺ ἀποδίδεται εἰς τὸν Nunes μεταξὺ τῶν ἀλγεβριστῶν τῆς XVI ἑκατονταετηρίδος.

Εἰς τὰς Κάτω Χώρας

247. Εἰς τὰς πρώτας σελίδας τῆς ἱστορίας τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν Ὀλλανδίαν ἀπαντᾶται τὸ ὄνομα ἑνὸς μαθηματικοῦ, γεννηθέντος εἰς Deventer, καὶ τὸν ὁποῖον ἐδῶ θ' ἀναφέρωμεν μὲ τὸ ὄνομα Nicola Petri (ἐκλέγοντες τοῦτο μεταξὺ ποικιλίας ἄλλων ποὺ τοῦ ἀποδίδονται). Διδάσκαλος μεγάλης φήμης, δὲν ἔχει καμμίαν ἀξίωσιν πρωτοτυπίας· μνημονεύεται ὅμως δι' ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς καὶ ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον, δημοσιευθὲν τὸ 1567 καὶ τὸ 1583, ἔλαβε ὁριστικὴν μορφὴν τὸ 1591 καὶ ἔτυχε, κατόπιν, πολυαρίθμων ἐκδόσεων (1596, 1598, 1603, 1605, 1635). Τίποτε τὸ συγκεκριμένον δὲν εἶναι γνωστὸν γύρω ἀπὸ τὴν ζωήν του, ἀλλὰ ὅλαι αἱ ἐνδείξεις καθιστοῦν πιστευτόν, ὅτι ἀπέθανε ὀλίγον μετὰ τὸ 1603. Τὸ ἔργον του, γραφὲν εἰς ὀλλανδικὴν γλῶσσαν, παρέμεινε ἄγνωστον εἰς τὴν λοιπὴν Εὐρώπην. Ἀλλὰ καὶ γνωστὸν ἐὰν ἐγίνετο, τίποτε νέον δὲν ἐπρόκειτο νὰ διδάξῃ εἰς ὅσους ἐγνώριζον ἤδη τὰ ἔργα τῶν Pacioli, Cardano, Pélétier,

Ὁ Nunes ἔχει προφανῶς μελετήσει τοὺς καλυτέρους ἰταλοὺς ἀλγεβριστάς, δὲν ὁμιλεῖ ὅμως περὶ αὐτῶν ὡς μαθητής των, ἀλλ' ὡς ἐὰν ἦσαν ἐφάμιλλοί του. Ἀναφέρει π.χ. τὸ πρόβλημα τὸ ἀναγόμενον εἰς τὸ σύστημα:

$$x+\frac{y+z}{2}=32,\quad y+\frac{z+x}{3}=28,\quad z+\frac{x+y}{4}=31$$

καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει λύσει ὁ Cardano τόσον εἰς τὸ ἔργον του Practica Arithmeticae ὅσον καὶ εἰς τὸ ἔργον του Ars magna.Ὁ Nunes ὑποδεικνύει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία, καυχᾶται, ὑπερέχει τῶν μέχρι τῶν ἡμερῶν του γνωστῶν.

Ἐντελῶς ἀναλόγως, εἰς τὴν περιοχὴν τὴν ἀφιερωμένην εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα (καὶ ἂς σημειώσωμεν παρεμπιπτόντως, ὅτι στηρίζεται εἰς τὸ De triangulis τοῦ Regiomontano) ἐμπίπτει εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου μὲ δεδομένας πλευράς. Μὲ αὐτὸ εἶχεν ἤδη ἀσχοληθῆ ὁ Pacioli, ἀλλὰ κατὰ τρόπον ἀσαφῆ καὶ συγκεχυμένον· καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὴν λύσιν τοῦ Nunes. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι ἡ λύσις του καταλαμβάνει ὄχι ὀλιγωτέρας τῶν εἴκοσι σελίδων, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὀλίγισται γραμμαὶ φωτεινῆς διατυπώσεως ἤρκεσαν εἰς τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα (βλ. Τόμος Ι, § 74) νὰ ἐπιτύχῃ μὲ ἀπαράμιλλον διαύγειαν τὸν ἴδιον σκοπόν.

Φῶς καὶ σκιὰ ἐναλλάσσονται λοιπὸν εἰς τὴν μαθηματικὴν παραγωγὴν τοῦ Nunes. Καθὼς ὅμως τὸ πρῶτον καταφανῶς πλεονάζει, δὲν ἀμφισβητεῖται ἀπὸ κανένα ἡ διακεκριμένη θέσις, ποὺ ἀποδίδεται εἰς τὸν Nunes μεταξὺ τῶν ἀλγεβριστῶν τῆς XVI ἑκατονταετηρίδος.

Εἰς τὰς Κάτω Χώρας

247. Εἰς τὰς πρώτας σελίδας τῆς ἱστορίας τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν Ὀλλανδίαν ἀπαντᾶται τὸ ὄνομα ἑνὸς μαθηματικοῦ, γεννηθέντος εἰς Deventer, καὶ τὸν ὁποῖον ἐδῶ θ' ἀναφέρωμεν μὲ τὸ ὄνομα Nicola Petri (ἐκλέγοντες τοῦτο μεταξὺ ποικιλίας ἄλλων ποὺ τοῦ ἀποδίδονται). Διδάσκαλος μεγάλης φήμης, δὲν ἔχει καμμίαν ἀξίωσιν πρωτοτυπίας· μνημονεύεται ὅμως δι' ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς καὶ ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον, δημοσιευθὲν τὸ 1567 καὶ τὸ 1583, ἔλαβε ὁριστικὴν μορφὴν τὸ 1591 καὶ ἔτυχε, κατόπιν, πολυαρίθμων ἐκδόσεων (1596, 1598, 1603, 1605, 1635). Τίποτε τὸ συγκεκριμένον δὲν εἶναι γνωστὸν γύρω ἀπὸ τὴν ζωήν του, ἀλλὰ ὅλαι αἱ ἐνδείξεις καθιστοῦν πιστευτόν, ὅτι ἀπέθανε ὀλίγον μετὰ τὸ 1603.Τὸ ἔργον του, γραφὲν εἰς ὀλλανδικὴν γλῶσσαν, παρέμεινε ἄγνωστον εἰς τὴν λοιπὴν Εὐρώπην.Ἀλλὰ καὶ γνωστὸν ἐὰν ἐγίνετο, τίποτε νέον δὲν ἐπρόκειτο νὰ διδάξῃ εἰς ὅσους ἐγνώριζον ἤδη τὰ ἔργα τῶν Pacioli, Cardano, Pélétier,

Stiefel κλπ. ἐκ τῶν ὁποίων, ὡς ὁμολογεῖ ὁ ἴδιος, ἤντλησεν εἰς εὐρεῖαν κλίμακα.

Χάρις εἰς τὴν ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ἐπὶ τῶν συμπατριωτῶν του καὶ ἔτι μᾶλλον χάρις εἰς τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς μηχανικῆς τῶν στερεῶν καὶ τῶν ὑγρῶν, ὁ Simon Stevin θεωρεῖται ὁ μεγαλύτερος τῶν βέλγων γεωμετρῶν τῆς Ἀναγεννήσεως. Ἐγεννήθη εἰς Bruges τὸ 1548 καὶ — ὅπως συνέβη μὲ τὸν Λεονάρδον Πιζᾶνο — κατέλαβεν ἀπὸ νεαρᾶς ἡλικίας τὴν θέσιν τοῦ ταμίου καὶ τοῦ λογιστοῦ εἰς ἕνα μεγάλον ἐμπορικὸν οἶκον. Εἰς ἡλικίαν δὲ 25 ἐτῶν — πάλιν ὅπως συνέβη μὲ τὸν Πιζᾶνο — ἐπεχείρησε μακρὰ ταξείδια εἰς διαφόρους χώρας τῆς Εὐρώπης (Ἑλβετία, Πολωνία κλπ). Ὑπὸ τὸν ἀφόρητον ἱσπανικὸν ζυγόν, ἠναγκάσθη νὰ εὕρῃ καταφύγιον εἰς τὰς νοτιωτέρας ἐπαρχίας τῶν Κάτω Χωρῶν, ἐλθὼν οὕτω εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Μαυρίκιον τοῦ Nassau. Ὁ τελευταῖος δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐκτιμήσῃ τὰ μεγάλα προσόντα τοῦ Stevin καὶ νὰ τοῦ ἐμπιστευθῇ σημαντικὰς ὑπηρεσίας. Ἀπέθανε πιθανῶς εἰς Aja, τὸ 1620.

Τὰ ἔργα του, τὰ ὁποῖα ἐγράφησαν εἰς φλαμμανδικὴν γλῶσσαν, δὲν ἐβράδυναν νὰ μεταφρασθοῦν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ τὴν γαλλικήν, ὑπὸ τὴν τελευταίαν δὲ ταύτην μορφήν, συνεκεντρώθησαν ὑπὸ τοῦ Albert Girard καὶ ἐδημοσιεύθησαν, μὲ συντμήσεις, σχόλια καὶ προσθήκας, εἰς μί ν ὑπέροχον ἔκδοσιν.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ γραπτὰ τοῦ Stevin ἀποτελοῦν ἀντανάκλασιν τῶν ἐμπορικῶν του ἐνασχολήσεων. Θ' ἀναφέρωμεν τὸν πίνακα τῶν τόκων (1582), δῶρον θείας προνοίας διὰ τοὺς ἐμπορευομένους, οἱ ὁποῖοι προηγουμένως ἦσαν ὑποχρεωμένοι νὰ ἐρανίζωνται δι' ἴδιον λογαριασμὸν (καὶ πράγματι δὲν ὑπῆρχεν ἐμπορικὸς οἶκος ποὺ νὰ μὴ εἶχεν εἰς τὴν κατοχήν του κάποιον πίνακα, θεωρούμενον ὡς ἀληθῆ θησαυρὸν καὶ φυλαττόμενον ζηλοτύπως μυστικόν). Εἰς τὴν συλλογὴν Opere complete τοῦ Stevin, ὁ πίναξ ἐμφανίζεται ἐντεταγμένος εἰς ἕνα ἔργον γενικοῦ χαρακτῆρος φέροντος τίτλον La pratique de l' arithmétique. Ἕνα ἄλλο μέρος τῆς συλλογῆς φέρον τὸν τίτλον La Thiende, φλαμμανδικά, καὶ Le Disme, γαλλικά, ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς πολλοὺς νὰ θεωρήσουν τὸν Stevin ὡς ἐφευρέτην τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ κλάσματα αὐτὰ δὲν ἦσαν προηγουμένως ἄγνωστα, ἀλλ' εἰς τὸν βέλγον ἐπιστήμονα ἀποδίδεται κυρίως ἡ τιμή, ὅτι διεμόρφωσε μεθοδικῶς ἀσφαλεῖς κανόνας, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων ἦτο δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Εἶναι οἱ κανόνες τοὺς ὁποίους ἐφαρμόζομεν μέχρι σήμερον, ἡ τεχνικὴ ὅμως τοῦ συμβολισμοῦ του ἔχει ἔκτοτε σημαντικῶς ἁπλοποιηθῆ. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. 32,57 δηλοῦται κατὰ τὸν Stevin μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ κατωτέρω τρία διάφορα συστήματα :

$$\overset{\textcircled{0}}{32}\ \overset{\textcircled{1}}{5}\ \overset{\textcircled{2}}{7}\ ,\quad 32(0)\ 5(1)\ 7(2)\ ,\quad \underset{\textcircled{0}}{32}\ \underset{\textcircled{1}}{5}\ \underset{\textcircled{2}}{7}$$

ποὺ ἔχει ἀσφαλῶς ἐμπνευσθῆ ἀπὸ τὸν Bombelli (§ 228), τοῦ ὁποίου, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ὁ Stevin ἦτο εἰλικρινὴς θαυμαστής.

Περισσότερον πρωτότυπος ἐμφανίζεται ὁ Stevin, ὅταν εἰσηγεῖται τὴν μεθοδικὴν εἰσαγωγὴν τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν. Ἔχων συνείδησιν τῶν δυσκολιῶν, εἰς τὰς ὁποίας θὰ προσέκοπτεν ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς τοιαύτης τολμηρᾶς μεταρρυθμίσεως, λαμβάνει τὴν θέσιν ἐκείνου ποὺ ρίπτει τὸν σπόρον διὰ νὰ περιμένῃ νὰ ἔλθῃ φυσικῶς ὁ χρόνος τῆς ὡριμάνσεώς του. Καὶ πράγματι ἐδέησε νὰ παρέλθουν δύο αἰῶνες προτοῦ ἡ τόσον λογικὴ ἐκείνη πρότασις ἀρχίσῃ νὰ μεταβάλλεται εἰς πρᾶξιν καὶ ἀκόμη σήμερον ἀπαντᾷ ἀντιδράσεις εἰς πολλὰς γωνίας τῆς γῆς. Ὡς κατακλεὶς τοῦ ἔργου La practique de l' arithmétique εὑρίσκεται μία πραγματεία ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν (Traitè des incommensurables grandeurs), γραφεῖσα μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τοῦ περιφήμου X Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἀπὸ πολλούς, οὐχὶ ἀδίκως, ὡς ὁ «σταυρὸς τῶν μαθηματικῶν» (La croix des mathématiques : ἡ φράσις ἀνήκει εἰς τὸν ἴδιον τὸν Stevin).

Ὑψηλοτέρας στάθμης εἶναι τὰ θέματα, τὰ ὁποῖα πραγματεύεται ἐν ἐκτάσει εἰς ἕνα ἔργον τιτλοφορούμενον μετριοφρόνως Arithmétique, ἀλλὰ τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ὅ,τι ἐγνώριζον λήγοντος τοῦ XVI αἰῶνος ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν. Ἐδημοσιεύθη τὸ 1585, ἀλλὰ τὸ 1594 ἐπλουτίσθη μὲ ἕνα ἐνδιαφέρον παράρτημα. Διὰ νὰ γράψῃ τὸ ἔργον αὐτό, ὁ συγγραφεὺς (ὁ ὁποῖος μὲ ἄκραν ἐντιμότητα μνημονεύει τὰς πηγάς του) ἐχρησιμοποίησεν, ὡς δηλοῖ ὁ ἴδιος, τὰ ἔργα τοῦ Mohammed ibn Musa (μεταφρασθέντα εἰς τὴν λατινικὴν ἀπὸ τὸν Γεράρδον τῆς Κρεμώνης καὶ τὸν Ροβέρτον τοῦ Τσέστερ) καὶ τῶν P. Nunes, Tartaglia, Cardano, Ferrari (ὁ Stevin τὸν ὀνομάζει Louys de Ferrare) καὶ τοῦ Bombelli («τοῦ μεγάλου ἀριθμητικοῦ τῆς ἐποχῆς μας», ὡς τὸν χαρακτηρίζει).

Αἱ δυνάμεις καὶ αἱ ρίζαι ὑποδηλοῦνται διὰ τῆς τοποθετήσεως πλησίον τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλίσκου περιέχοντος τὸν ἀντίστοιχον δείκτην. Ὅσαι ἐν τούτοις ἔχουν δείκτην πολλαπλάσιον τοῦ 2 ὑποδηλοῦνται δι' ἐπαναλήψεως τοῦ σημείου $\surd$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Stevin δὲν ἀποκλείει τὴν δυνατότητα νὰ εἶναι τοῦτο κλασματικὸς ἀριθμός, καταφαίνεται ὅτι εἶχε διαβλέψει τὴν δυνατότητα χρήσεως δυνάμεων μὲ δείκτας κλασματικοὺς ἀντὶ ριζικῶν σημείων.

Ὁ ὑπὸ τούτου χρησιμοποιούμενος συμβολισμὸς πρὸς παράστασιν τοῦ ἀγνώστου, ὡς καὶ τῶν διαφόρων δυνάμεων αὐτοῦ, ὁμοιάζει μὲ ἐκεῖνον τοῦ Bombelli : δηλαδὴ κυκλίσκος περιέχων τὸν ἐκθέτην. Ἐφαρμόζει ὅμως τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν μὲ μεγαλυτέραν ἀφαίρεσιν· διὰ νὰ χαρακτηρίσῃ π.χ. ὁ Stevin τὰς ἐξισώσεις ποὺ ἔλυσεν ὁ Ferrari γράφει ἁπλῶς :

④ *ega* ③②①⓪

ὑπονοῶν ὅτι οἱ διάφοροι ὅροι ἔχουν συντελεστὰς οἱουσδήποτε, οἱ δὲ ὅροι πρέπει νὰ νοοῦνται προστιθέμενοι. Ἐνίοτε ὁ Stevin (ἀκολουθῶν ὄχι τόσον καλὴν ἔμπνευσιν) γράφει μίαν ἐξίσωσιν ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας μὲ τὴν ἀπαίτησιν νὰ προκύπτουν μεταξύ των ἴσοι οἱ δύο ὅροι ἑκάστου λόγου· οὕτω ἡ γραφή:

$$\frac{x^3}{nx^2 + px + q} = \frac{x}{x}$$

σημαίνει ὅτι εἶναι:

$$x^3 = nx^2 + px + q.$$

Εἰς τὴν ἀνάγωγον περίπτωσιν, ἔπειτα ἀπὸ κάποιον χειρισμὸν πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν φανταστικῶν, ὁ Stevin δηλοῖ ἀφελῶς ὅτι ἀφίνει εἰς ἄλλους νὰ ἐξηγήσουν αὐτὸ τὸ μυστήριον. Πρωτότυπος καὶ μεγάλης σπουδαιότητος εἶναι ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει διὰ νὰ λύσῃ μίαν ἀριθμητικὴν ἐξίσωσιν, βάσει τῆς ἀρχῆς: ἄν δύο τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου καθιστοῦν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως ἑτεροσήμους, τότε ὑπάρχει ρίζα κειμένη μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὸν ἄγνωστον. Οὕτω διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$x^3 = 300x + 33915024,$$

ὑποβάλλει προπάντων εἰς δοκιμὴν τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 10 καὶ συμπεραίνει ὅτι μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 10^2 καὶ 10^3, τουτέστι ὅτι ἡ ζητουμένη ρίζα θὰ ἔχῃ τρία ψηφία. Δοκιμάζει κατόπιν τοὺς ἀριθμοὺς 100, 200, 300, 400 καὶ ἐπειδὴ οἱ τελευταῖοι δίδουν ἐξαγόμενα ἀντιθέτου σημείου, συνάγει ὅτι ἡ ζητουμένη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 300 καὶ 400 κ.ο.κ.

Ἂς σημειωθῇ ἀκόμη ὅτι, ἂν καὶ ὁ Stevin, ἀκολουθῶν τὴν συνήθειαν τῆς ἐποχῆς του, ἐχρησιμοποίησε κατὰ κανόνα ἐξισώσεις μὲ συντελεστὰς θετικούς, ἐν τούτοις δὲν παρητήθη τῆς ἐξετάσεως καὶ ἄλλων μὲ συντελεστὰς ἀρνητικούς. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι, εἰς συμπλήρωσιν τοῦ ἔργου του, παρενέβαλε τὴν μετάφρασιν τῶν 4 πρώτων Βιβλίων, τοῦ Διοφάντου (ὁ Girard προσέθεσεν εἰς αὐτὰ τὴν μετάφρασιν τῶν ἄλλων δύο) τιτλοφορῶν αὐτὰ μὲ τὰς λέξεις: Τὰ 4 πρῶτα Βιβλία ἀλγέβρας τοῦ Διοφάντου (Les quatre premiers livres d'algebre de Diophante).

Ἐνῷ δὲν ἔχουν δι' ἡμᾶς ἐνδιαφέρον τὰ ἔργα τοῦ Stevin ἐπὶ τῆς ὀχυρωματικῆς, τῆς ναυσιπλοΐας διὰ πυξίδος καὶ τῆς τηρήσεως λογιστικῶν βιβλίων (ὅπου ἡ ἰταλικὴ ἐπίδρασις εἶναι αἰσθητή), εἶναι ὅμως καθῆκον μας νὰ καταστήσωμεν γνωστόν, ὅτι ὁ προστάτης καὶ εἰλικρινὴς θαυμαστής του Μαυρίκιος τοῦ Nassau ἠθέλησε νὰ λάβῃ μαθήματα ἀπὸ τὸν Stevin ἐπὶ τῶν διαφόρων μερῶν τῶν μαθηματικῶν καὶ μὴ ἀρκούμενος εἰς τὴν ἀκροαματικὴν παρακολούθησιν τῶν μαθημάτων, ἐζήτησε νὰ τοῦ διατυπωθοῦν καὶ γρα-

πτῶς. Τοιουτοτρόπως ἐσχηματίσθησαν μερικὰ τετράδια, τὰ ὁποῖα ἔφερε πάντοτε μαζί του. Εἰς μίαν μάλιστα ἀψιμαχίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἠναγκάσθη ν' ἀγωνισθῇ ὁ ἴδιος ὁ πρίγκηψ, τὰ τετράδια διέτρεξαν τὸν κίνδυνον νὰ χαθοῦν. Καὶ αὐτὸ τὸν ὤθησε νὰ διατάξῃ τὴν ἐκτύπωσίν των (1586) εἰς τρεῖς γλώσσας: φλαμμανδικήν, γαλλικὴν καὶ λατινικήν. Τοιουτοτρόπως ἐγεννήθη τὸ ἔργον ποὺ φέρει ἀντιστοίχως τοὺς τίτλους: Wisconstighe Ghedachtenissen ἢ Mémoires mathématiques ἢ Hypomnemata mathematica.

Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ περιέχονται μαθήματα κοσμογραφίας καὶ τριγωνομετρίας (βλ. Κεφ. XIX), γεωγραφίας, γεωμετρίας, στατικῆς κλπ. Εἰδικῆς μνείας ἀξίζουν αἱ σελίδες αἱ σχετικαὶ μὲ τὴν προοπτικήν, αἱ ὁποῖαι ἔδωσαν εἰς τὸν μεγάλον βέλγον μαθηματικὸν μίαν θέσιν μεταξὺ τῶν προδρόμων τῶν γεωμετρῶν τοῦ XIX αἰῶνος. Ἂν καὶ ἡ μηχανικὴ δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμά μας, ἐν τούτοις δὲν δυνάμεθα νὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὸν Stevin ὀφείλεται ἡ πρώτη ἱκανοποιητικὴ θεωρία τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ὅτι περαιτέρω εἰς τὰς βαρυκεντρικάς του ἐρεύνας, ἐμπνεόμενος ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὰ σχόλια τοῦ F. Commandino (§ 259), ἀπέδειξεν ὅτι ἐγνώριζε νὰ χειρίζεται μὲ μαεστρίαν τὰς ἀρχαίας ἀπειροστικὰς μεθόδους, λαμβάνων τοιουτοτρόπως θέσιν μεταξὺ τῶν προδρόμων τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz.

Εἰς ἕνα πλῆρες πλαίσιον τῆς δραστηριότητος τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιστήμονος θὰ ἔπρεπε νὰ συμπεριληφθῇ καὶ μία πραγματεία λογικῆς ὡς καὶ ἕνας τελευταῖος Τόμος μὲ τίτλον Vita pubblica (Δημόσιος βίος), εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Stevin, περισυλλέγων τοὺς καρποὺς τῆς μακρᾶς καὶ πολυσχιδοῦς ἐμπειρίας του ἐκ τῶν πολλῶν καὶ διαφόρων λειτουργημάτων ποὺ τοῦ ἀνετέθησαν, διετύπωσε κανόνας διαγωγῆς διὰ τὸν καλὸν πολίτην εἰς χρόνους δυσχερεῖς, ὅπως ἐκεῖνοι τῆς ἐποχῆς του. Ἀλλ' ὅσα εἴπομεν ἤδη εἶναι ἀρκετὰ διὰ νὰ δείξουν ὅτι δὲν ὑστερεῖ διόλου ἡ προσωπικότης τοῦ Stevin, συγκρινομένη μὲ τοὺς λοιποὺς κορυφαίους, ποὺ κατέστησαν ἔνδοξον τὸν αἰῶνα εἰς τὸν ὁποῖον ἔζησε.

248. Παραμένομεν ἀκόμη εἰς τὰς Κάτω Χώρας, διὰ ν' ἀσχοληθῶμεν μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς θαρραλεωτέρους ὑπολογιστάς, ἐξ ὅσων ποτὲ διετηρήθη ἡ μνήμη: τὸν Ἀδριανὸν van Roomen. Ἐγεννήθη εἰς Louvain τὴν 29 Σεπτεμβρίου 1561, ἐδίδαξε διαδοχικῶς εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν, εἰς Würzburg καὶ Zamosk (Πολωνία) καὶ ἀπέθανεν εἰς Magonza τὴν 4 Μαΐου 1615.

Ἀξιόλογον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἕνα ἔργον του, εἰς τὸ ὁποῖον ἀποκαλύπτει τὰ τεχνάσματα, τὰ ὁποῖα ἐφήρμοζε διὰ νὰ ἐκτελῇ μὲ ἀσφάλειαν τοὺς πλέον σχοινοτενεῖς ὑπολογισμούς. Τὸ ἔργον φέρει τὸν τίτλον: Nova multiplicandi, dividendi, quadrata componendi, radices extrahendi ratio, multo quam pervulgata certior, faciliter et majoribus maxime numeris ac-

comodatior (Νέος λογισμὸς πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως, ὑψώσεως εἰς δύναμιν, ἐξαγωγῆς ριζῶν, ἀσφαλέστερος, εὐκολώτερος καὶ ἐπιτηδειότερος τοῦ κοινοῦ διὰ μεγάλους ἀριθμούς), ἐδημοσιεύθη δὲ μόλις προσφάτως μὲ ἐπιμέλειαν τοῦ H. Bosmans. Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ δήλωσις τοῦ συγγραφέως ὅτι θυσιάζει τὴν ταχύτητα εἰς τὴν ἀσφάλειαν τῶν ἐξαγομένων. Ἀντὶ νὰ ἐκθέτῃ κατὰ τρόπον συγκεχυμένον τοὺς κανόνας ποὺ ἐφαρμόζει, προτιμᾷ νὰ παρουσιάζῃ τὴν δύναμίν των ἐπὶ καταλλήλων παραδειγμάτων.

Διὰ νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς ἀναγνώστας μιὰν ἰδέαν τοῦ τρόπου τῆς ἐργασίας του, ἐκθέτομεν ἐδῶ τὴν διαδικασίαν ποὺ ἀκολουθεῖ διὰ νὰ λάβῃ τὸν κύβον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ ἀριθμόν τινα μονάδων καί τυχόντα ἀριθμὸν δεκάδων d. Ἡ ὁδὸς τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ τύπου :

$$(d + u)^3 = d^3 + [3\,d^2 + (3\,d + u)\,u\,]\,u.$$

Οὕτω, διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὸν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ 1234, ἀναλυόμενον εἰς $d = 123$ δεκάδας καὶ $u = 4$ μονάδας, παρουσιάζει τὴν ἀκόλουθον κατάστρωσιν :

$$\begin{aligned}
d^3 &= 1\,860\,867\,000\\
3\,d^2 &= \quad 4\,538\,700\\
3\,d + u &= \qquad 3\,694\\
(3\,d + u)u &= \qquad 14\,776\\
3\,d^2 + (3\,d + u)u &= \quad 4\,553\,476\\
u[3\,d^2 + (3\,d + u)u] &= \quad 18\,213\,904\\
(d + u)^3 &= 1\,879\,080\,904
\end{aligned}$$

Τὸ πάθος τοῦ ἰδίου μαθηματικοῦ πρὸς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὸ πρωτοτυπότερον μέρος (ἀφοῦ ἀρχίζει μὲ μερικὰς σελίδας φιλοσοφικοῦ καὶ ἱστορικοῦ περιεχομένου) ἑνὸς ἀποσπάσματος, ὑφισταμένου ἀκόμη, τοῦ ἔργου του Commento all algebra di Mohammed ben Musa (Σχόλιον εἰς τὴν ἄλγεβρα τοῦ M. ben M.), τὸ ὁποῖον φαίνεται ὅτι ἐδημοσιεύθη εἰς Würzburg τὸ 1598 ἢ 1599. Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἐπροχώρησε πέραν τῆς τρίτης δυνάμεως, ἀσχοληθεὶς μὲ τὸν ὑπολογισμὸν ἀνωτέρων δυνάμεων, υἱοθετῶν κριτήρια ὅμοια πρὸς ἐκεῖνα ποὺ ἐδέχθη διὰ τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς δυνάμεις. Οὕτω διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὴν δύναμιν :

$$(d + u)^6 = d^6 + 6\,d^5\,u + 15\,d^4\,u^2 + 20\,d^3\,u^3 + 15\,d^2\,u^4 + 6\,d\,u^5 + u^6,$$

θεωρεῖ διαδοχικῶς τὰς ἑπομένας ἐκφράσεις διὰ νὰ κάμῃ τελικῶς τὸ ἄθροισμά των:

$$d^6,\ 6\,d^5,\ 15\,d^4,\ 20\,d^3,\ 15\,d^2,\ 6\,d + u,\ (6\,d + u)u,$$
$$15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2,\ (15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2)u,$$
$$20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3,$$
$$(20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3)u,$$
$$15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4,$$
$$(15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4)u,$$
$$6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5,$$
$$(6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5)u.$$

Κάθε μία ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτὰς φέρει εἰδικὸν ὄνομα· π.χ. ἡ προτελευταία ὀνομάζεται προσθαφαίρεσις, ὄνομα προωρισμένον νὰ λάβῃ θέσιν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἔστω καὶ ὑπὸ ἄλλην ἔννοιαν.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν πράξεων ἐξαγωγῆς ριζῶν, ὁ βέλγος μαθηματικὸς δίδει, ὑπὸ τὸ ὄνομα αἰτήματα, δύο ἐκτεταμένους βοηθητικοὺς πίνακας. Ὁ ἕνας περιλαμβάνει τὰς πρώτας 33 δυνάμεις τῶν ἐννέα φυσικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἄλλος τοὺς πρώτους 69 συντελεστὰς τοῦ διωνύμου. Ἡ ἐκτύπωσις τῶν πινάκων τούτων παρουσίαζε τὴν ἐποχὴν ἐκείνην δυσκολίας οὐχὶ εὐκαταφρονήτους, ὥστε δὲν εἶναι παράδοξον ὅτι ἐγένοντο ἀφορμὴ τυπογραφικῆς ἀπεργίας, τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς καταδικάζει μὲ λόγους πικρίας.

Κρίνοντες τὸν van Roomen ὡς ἀλγεβριστήν, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ σημειώσωμεν, πρὸς τιμήν του βεβαίως, ὅτι ἐφρόντιζε νὰ χρησιμοποιῇ πάντοτε ἀρίστους συμβολισμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ ἄφινον βραδύτερον τὰ ἴχνη τῆς ἐπιδράσεώς των εἰς τὸν Descartes, ὅταν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εὑρίσκετο εἰς τὰς Κάτω Χώρας, κατὰ τὰ ἔτη τῆς ἐντονωτέρας του δραστηριότητος. Οὔτε θὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονός, ὅτι αἱ ἱστορικαί του πληροφορίαι ἐπὶ τῆς ἀλγέβρας ἀποδεικνύουν ὅτι ἐπεδόθη εἰς τὸ ἔργον, ἀφοῦ προηγουμένως ἔλαβε γνῶσιν τῶν ὅσων εἶχον γράψει οἱ προγενέστεροί του.

François Viète

249. Ἡ θεωρία τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ἡ ὁποία, κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος, ἔλαβεν εἰς τὴν Ἰταλίαν θαυμαστὰς ἐξελίξεις, εὗρεν εἰς τὴν Γαλλίαν, κατὰ τὸ τελευταῖον τέταρτον τοῦ ἰδίου αἰῶνος, ἕνα πρόσωπον προικισμένον μὲ τὴν δύναμιν νὰ πλουτίσῃ περαιτέρω τὴν θεωρίαν μὲ μεθόδους καὶ πορίσματα ὑπερτάτης ἀξίας. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν François Viète, seigneur de la Bigotière, ὁ ὁποῖος γεννηθεὶς τὸ 1540 εἰς Fontenay -

θεωρεῖ διαδοχικῶς τὰς ἑπομένας ἐκφράσεις διὰ νὰ κάμῃ τελικῶς τὸ ἄθροισμά των:

$$d^6, 6\,d^5, 15\,d^4, 20\,d^3, 15\,d^2, 6\,d + u, (6\,d + u)u,$$
$$15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2, (15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2)u,$$
$$20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3,$$
$$(20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3)u,$$
$$15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4,$$
$$(15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4)u,$$
$$6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5,$$
$$(6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5)u.$$

Κάθε μία ἀπὸ τὰς πράξεις αὐτὰς φέρει εἰδικὸν ὄνομα· π.χ. ἡ προτελευταία ὀνομάζεται προσθαφαίρεσις, ὄνομα προωρισμένον νὰ λάβῃ θέσιν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἔστω καὶ ὑπὸ ἄλλην ἔννοιαν.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν πράξεων ἐξαγωγῆς ριζῶν, ὁ βέλγος μαθηματικὸς δίδει, ὑπὸ τὸ ὄνομα αἰτήματα, δύο ἐκτεταμένους βοηθητικοὺς πίνακας. Ὁ ἕνας περιλαμβάνει τὰς πρώτας 33 δυνάμεις τῶν ἐννέα φυσικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἄλλος τοὺς πρώτους 69 συντελεστὰς τοῦ διωνύμου. Ἡ ἐκτύπωσις τῶν πινάκων τούτων παρουσίαζε τὴν ἐποχὴν ἐκείνην δυσκολίας οὐχὶ εὐκαταφρονήτους, ὥστε δὲν εἶναι παράδοξον ὅτι ἐγένοντο ἀφορμὴ τυπογραφικῆς ἀπεργίας, τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς καταδικάζει μὲ λόγους πικρίας.

Κρίνοντες τὸν van Roomen ὡς ἀλγεβριστήν, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ σημειώσωμεν, πρὸς τιμήν του βεβαίως, ὅτι ἐφρόντιζε νὰ χρησιμοποιῇ πάντοτε ἀρίστους συμβολισμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ ἄφινον βραδύτερον τὰ ἴχνη τῆς ἐπιδράσεώς των εἰς τὸν Descartes, ὅταν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εὑρίσκετο εἰς τὰς Κάτω Χώρας, κατὰ τὰ ἔτη τῆς ἐντονωτέρας του δραστηριότητος. Οὔτε θὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονός, ὅτι αἱ ἱστορικαί του πληροφορίαι ἐπὶ τῆς ἀλγέβρας ἀποδεικνύουν ὅτι ἐπεδόθη εἰς τὸ ἔργον, ἀφοῦ προηγουμένως ἔλαβε γνῶσιν τῶν ὅσων εἶχον γράψει οἱ προγενέστεροί του.

François Viète

249. Ἡ θεωρία τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ἡ ὁποία, κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος, ἔλαβεν εἰς τὴν Ἰταλίαν θαυμαστὰς ἐξελίξεις, εὗρεν εἰς τὴν Γαλλίαν, κατὰ τὸ τελευταῖον τέταρτον τοῦ ἰδίου αἰῶνος, ἕνα πρόσωπον προικισμένον μὲ τὴν δύναμιν νὰ πλουτίσῃ περαιτέρω τὴν θεωρίαν μὲ μεθόδους καὶ πορίσματα ὑπερτάτης ἀξίας. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν François Viète, seigneur de la Bigotière, ὁ ὁποῖος γεννηθεὶς τὸ 1540 εἰς Fontenay-

le-Comte (πρωτεύουσαν τοῦ Poitou), ἐσπούδασε νομικὰ εἰς Poitiers καὶ κατόπιν ἐχρημάτισε δικηγόρος καὶ ἐν συνεχείᾳ σύμβουλος τῆς Βουλῆς τῆς Βρετάνης. Δὲν θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν ὅλων τῶν ἄλλων δημοσίων ἀξιωμάτων, τὰ ὁποῖα κατέλαβεν ἐπαξίως, ἀλλὰ θὰ περιορισθῶμεν μόνον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀνεκτίμητος ὑπηρεσία, τὴν ὁποίαν προσέφερεν εἰς τὸν Ἑρρῖκον IV, μὲ τὸ ν' ἀποκρυπτογραφήσῃ τὰ τηλεγραφήματα ποὺ ἀπέστελλεν ἡ Ἱσπανικὴ κυβέρνησις, διὰ μέσου τῆς Γαλλίας, εἰς τοὺς ἱσπανοὺς ὑπαλλήλους τῶν Κάτω Χωρῶν, ἀνεβίβασε τὸν Viète εἰς τὰ ὕψη τῆς φήμης καὶ εἰς τὴν θέσιν μέλους τοῦ ἰδιαιτέρου Συμβουλίου τῆς γαλλικῆς Αὐλῆς. Ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὸ 1603*.

Ὁ Viète, ὁ ὁποῖος οὐδέποτε κατέλαβε καθηγητικὴν ἕδραν καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὴν ἐπιστήμην ἀφιέρωσε μόνον τὰς σπανίας στιγμάς, ποὺ τοῦ ἄφινον ἐλευθέρας αἱ ἐπίσημοι ἀπασχολήσεις του, ἔγραφε σχεδὸν πάντοτε ὑπὸ μορφὴν τόσον σκοτεινήν, ὥστε ὁ Vaset, ὁ ὁποῖος ἐπεχείρησε νὰ μεταφέρῃ ἀπὸ τὴν λατινικὴν εἰς τὴν γαλλικὴν γλῶσσαν μερικὰ ἔργα του, ὡμολόγησεν ὅτι «ἐχρειάζετο ἕνας δεύτερος Viète διὰ νὰ μεταφράσῃ τὸν πρῶτον».

Δὲν συντελοῦν ὀλίγον εἰς τὴν σκοτεινότητα τῶν γραπτῶν τοῦ Viète οἱ πολυάριθμοι νεολογισμοί, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ, δανειζόμενος αὐτοὺς ἐκ τῆς ἑλληνικῆς ἀντὶ τῶν τεχνικῶν ὅρων ποὺ ἦσαν ἐν χρήσει ἐπὶ τῶν ἡμερῶν του. Σημειωτέον ἐπίσης, ὅτι μόνον μερικὰ ἔργα του ἐδημοσιεύθησαν ὅσον ἔζη (Ὁ Viète τὰ ἄφησεν ὡς κληρονομίαν εἰς τὸν γραμματέα του Pierre Aléaume, ἐκ τῶν χειρῶν τοῦ ὁποίου περιῆλθον κατόπιν εἰς τὸν υἱόν του Ἰάκωβον, ὁ ὁποῖος καὶ τὰ ἐδημοσίευσε ἐξ ἰδίων), ἐνῷ ἄλλα δὲν εἶναι γνωστὰ παρὰ μέσῳ ἐρανισμῶν, γενομένων ἐπὶ διεσπαρμένων σημειώσεων τοῦ ἰδίου, μετὰ δωδεκαετίαν ἀπὸ τοῦ θανάτου του, χάρις εἰς τὴν ἐπιμέλειαν τοῦ Alexander Anderson, ἑνὸς ἄγγλου διαμένοντος τότε εἰς Παρισίους. Εἰς τὴν διάδοσιν τῶν ἰδεῶν τοῦ Viète προσέκοψεν ἐπίσης τὸ γεγονὸς ὅτι ἀκόμη καὶ τὰ ἔργα, ποὺ ἔδωσεν ὁ ἴδιος εἰς δημοσιότητα, ἐτυπώθησαν εἰς μίαν δευτερεύουσαν πόλιν (Tours, 1591), καὶ μόνον ὅταν ὁ ἀξιέπαινος ὀλλανδὸς μαθηματικὸς F. van Schooten ἀνετύπωσεν εἰς μίαν συλλογὴν τὰ Ἅπαντα τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ κατέστη δυνατὴ ἡ εὐρεῖα διάδοσίς των. Εἰς αὐτὰ δὲν γίνεται λόγος περὶ τῶν πηγῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ Viète, καταφανὴς ὅμως εἶναι εἰς τὸν προσεκτικὸν ἀναγνώστην ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου, ὡς καὶ ἡ γνῶσις τοὐλάχιστον τοῦ Cardano, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα δὲν ἦσαν ἄγνωστα μεταξὺ τῶν ὀλίγων καλλιεργημένων προσώπων.

250. Τὸ ἔργον τοῦ Viète, ὅπου τίθενται τὰ θεμέλια τῆς ἀλγέβρας, φέρει τὸν τίτλον In artem analyticen isagoge (Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἐπι-

* Μερικαὶ σκοτειναὶ φράσεις ποὺ ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν Anderson τὸ 1615 — «praecipiti et immaturo autoris fato (nobis certe iniquissime)» — ὡδήγησαν κάποιον ἱστορικὸν εἰς τὴν ἰδέαν ὅτι ὁ Viète δὲν ἀπέθανε μὲ φυσικὸν θάνατον.

στήμην). Ὁ συγγραφεὺς ὡρμήθη ἀπὸ ὅσα ἔγραψεν ὁ Πλάτων ἐπὶ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου πρὸς ἔρευναν τῆς ἀληθείας καὶ ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους, «ζητικὸν» καὶ «ποριστικόν», ὑπὸ τοὺς ὁποίους ἐμφανίζεται ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος, ὅπως ἐκτίθενται ἀπὸ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (τόμος I, § 61). Προσθέτει ἤδη ὁ ἴδιος ἕνα τρίτον τρόπον, «ἐξηγητικόν», προωρισμένον νὰ προσδιορίσῃ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἰς τὰ προβλήματα τὰ στηριζόμενα ἐπὶ ὡρισμένων ἐπιταγμάτων, ἡ διατύπωσις τῶν ὁποίων ἄγει εἰς ἐξισώσεις. Προκειμένου νὰ ἐπιχειρήσῃ οἱανδήποτε μαθηματικὴν ἔρευναν ὁ Viète, μιμούμενος τὸν Εὐκλείδη, ἀποκαθιστᾷ ἀριθμόν τινα ἀξιωμάτων, ὅπως π.χ. τὰ ἀκόλουθα: «Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του», «ποσότητες ἴσαι πρὸς τρίτην, εἶναι ἴσαι καὶ μεταξύ των», «αἱ αὐταὶ ἀκριβῶς πράξεις ἐκτελούμεναι ἐπὶ ποσοτήτων ἴσων ἄγουν εἰς τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς ἐξαγόμενα» κλπ. Ἡ σειρὰ κλείει μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τεσσάρων ἀριθμῶν ἀποτελούντων ἀναλογίαν, ὅτι δηλαδὴ «τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων». Μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν ἀναπτύσσει ὁ Viète, ὅταν ἀποκαθιστᾷ τὸν «νόμον τῆς ὁμογενείας», συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον δὲν ἐπιδέχονται σύγκρισιν παρὰ μόνον μεγέθη γεωμετρικὰ τῶν αὐτῶν διαστάσεων· ἐκ σεβασμοῦ λοιπὸν πρὸς τὴν δεσμευτικὴν αὐτὴν ἀρχὴν θεωρεῖ ὑποχρέωσιν νὰ διαπιστώνῃ τὰς διαστάσεις τῶν εἰσερχομένων εἰς ἑκάστην σχέσιν μεγεθῶν. Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

A cubus — B in A quad. + B quad. in A aeq. B quad. in Z,

ἡ ὁποία σήμερον θὰ ἐγράφετο:

$$a^3 - b\,a^2 + b^2\,a = b^2\,z.$$

Προσθέτει περαιτέρω ὅτι ἡ ἄγνοια ἢ ἡ παράλειψις τοῦ νόμου τούτου ὡδήγησε τοὺς ἀρχαίους εἰς βαρύτατα σφάλματα, τὰ ὁποῖα ἐν τούτοις ἀπέφυγον οἱ κορυφαῖοι, διότι ὁ Ἥρων καὶ ὁ Διόφαντος ἐπρόσθετον ἐλευθέρως ἐμβαδὰ καὶ ὄγκους, ἐννοοῦντες ὅτι κάθε μέγεθος εἰσέρχεται εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μέγεθος.

Διὰ νὰ στρέψῃ τὸν «νόμον τῆς ὁμογενείας» εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ὁ Viète ἐχρειάσθη ν' ἀπαριθμήσῃ τὰ μεγέθη, ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ ἡ διαδοχικὴ ἐφαρμογὴ τῶν πράξεων (εἶναι τὰ ὑπ' αὐτοῦ κληθέντα «βαθμωτὰ» — scalari — μεγέθη: Διὰ ν' ἀπαλλαγῇ δὲ ἀπὸ τὴν δυσκολίαν, ποὺ παρουσιάζει τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς μόνον διαστάσεις, εἰσάγει — πέραν τῆς πλευρᾶς ἢ ρίζης, τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κύβου — τὴν θεώρησιν νέων μεγεθῶν, ὅπως τὸ «τετράγωνον-τετράγωνον», «τετράγωνον-κύβος», «κύβος-κύβος-κύβος», ἐμφανιζόμενος τοιουτοτρόπως ὡς μακρινὸς πρόδρομος τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν χώρων μὲ πολλὰς διαστάσεις.

Οἱ προηγηθέντες τοῦ Viète μαθηματικοὶ ἠσχολήθησαν μὲ τὴν «λογι-

στικὴν ἀριθμητικὴν» (προφανῶς γράφων τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν εἶχε τὴν σκέψιν του εἰς τὸν Διόφαντον), λύοντες προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ δεδομένα ἦσαν ἀριθμοί. Ὁ γάλλος μαθηματικὸς ἀντιθέτως (καὶ εἰς τοῦτο συνίσταται ἡ μεγαλυτέρα δόξα του) ἠθέλησε ν' ἀσχοληθῇ μὲ «λογιστικὴν μορφολογικήν», εἰς τὴν ὁποίαν δηλαδὴ τὰ δεδομένα ἠδύναντο νὰ εἶναι, ἀδιαφόρως, τυχόντα. Καὶ καθιέρωσε τὴν χρῆσιν τῶν κεφαλαίων φωνηέντων

A, E, I, V, Y,

πρὸς παράστασιν τῶν ἀγνώστων, καὶ τῶν κεφαλαίων συμφώνων B, D, F, G, K, κλπ. πρὸς δήλωσιν τῶν γνωστῶν ποσοτήτων.

Εἰς τὴν νέαν αὐτὴν λογιστικήν, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀρχαίαν, αἱ ἐκτελεστέαι πράξεις εἶναι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις. Τὸ ἄθροισμα παριστάνεται μὲ τὸ +, ἡ διαφορὰ μὲ τὸ —, ὅπερ ἀποδεικνύει ὅτι ὁ Viète δὲν ἠγνόει τὴν εἰς Γερμανίαν, Ἀγγλίαν καὶ ἀλλαχοῦ, πιθανῶς, διαδεδομένην σχετικὴν συνήθειαν. Ὅπου ὑπῆρχεν ἀβεβαιότης ὡς πρὸς τὴν φορὰν τῆς διαφορᾶς ὁ Viète ἐχρησιμοποίει νέον σύμβολον, τὸ σημερινὸν ἴσον =. Ὥστε ἡ γραφὴ α = β κατὰ Viète δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ σημερινὴ ἔκφρασις | α — β |. Ὡς πρὸς τὰς πράξεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως, ὁ συμβολισμός του συμπίπτει μὲ τὸν σήμερον ἐν χρήσει· τὸ πηλῖκον π.χ. ἑνὸς κύβου δι' ἑνὸς τετραγώνου γράφεται, ὡς καὶ σήμερον,

$$\frac{\text{A κύβος}}{\text{B τετράγωνον}}$$

Εἰς ἄλλο ἔργον μεταγενέστερον ὁ Viète ᾐσθάνθη τὴν ἀνάγκην παρενθέσεων καὶ ἐχρησιμοποίησεν ἀντ' αὐτῶν ὁριζοντίαν ἐπιγραμμήν, καλύπτουσαν τὰ ἐν παρενθέσει ποσά, γράφων π.χ.:

$$E\ \overline{3B^2 + D^2}$$

ἀντὶ $E(3B^2 + D^2)$. Δὲν ἔκαμε χρῆσιν εἰδικοῦ συμβόλου διὰ τὴν ἰσότητα, ἐνῷ εἰς τὴν λέξιν «ἐξίσωσις» ἀποδίδει τὴν ἰδίαν σημασίαν μὲ ἐκείνην ποὺ ἀποδίδομεν εἰς αὐτὴν σήμερον. Ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων διδάσκει τὴν ἐκτέλεσιν τῶν γνωστῶν μας πράξεων, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζει μὲ εἰδικὰ ὀνόματα:

α) *Ἀντίθεσις*, μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ σύγχρονον ἀλλαγὴν σημείου.

β) *Ὑποβιβασμός*, ἀπαλοιφὴ κοινοῦ παράγοντος ἐξ ὅλων τῶν ὅρων.

γ) *Παραβολισμός*, διαίρεσις ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως δι' ἑνὸς τυχόντος ἀριθμοῦ.

Αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς ἠμποροῦν νὰ ἐκτελεσθοῦν γεωμετρικῶς διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Ἀλλὰ τὰ ὄργανα

αὐτὰ δὲν εἶναι ἐπαρκῆ, ὅταν ἔχωμεν νὰ κάμωμεν μὲ ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου. Παραδέχεται λοιπὸν ὁ Viète ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω ἡ κατασκευὴ τῆς ν ε ύ σ ε ω ς: μεταξὺ δύο εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου νὰ παρεμβληθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα δοθέντος μήκους, διερχόμενον διὰ δοθέντος σημείου. Διαπλατύνεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἔκτασις τῶν πραγματοποιησίμων γεωμετρικῶν κατασκευῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε νὰ δύνανται νὰ λυθοῦν προβλήματα ποὺ ἐθεωροῦντο ἄλυτα. Μεταξὺ τούτων ὁ Viète ἀναφέρει τὴν παρεμβολὴν δύο μέσων γεωμετρικῶν μεταξὺ δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων, τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας καὶ τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ ἑπταγώνου εἰς κύκλον. Ἐν κατακλεῖδι ὁμιλεῖ μὲ πολὺ ὀλίγην σαφήνειαν περὶ τοῦ προβλήματος τῶν γωνιακῶν τομῶν, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται κανεὶς εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐγνώριζεν ἀπὸ τότε τοὺς τύπους πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων. Τὸ ἔργον του κλείει μὲ τὰς λέξεις «nullum non problema solvere» (πρὸς λύσιν οἱουδήποτε προβλήματος) ἀποδεικνύουν τὴν σπουδαιότητα τὴν ὁποίαν ἀπέδιδεν εἰς αὐτό.

251. Ἀπὸ τὸ ἔργον, τοῦ ὁποίου σύνοψιν ἐδώσαμεν ἀνωτέρω, μεταβαίνομεν εἰς ἕνα ἄλλο, ποὺ ἀποτελεῖ φυσικὴν προέκτασιν ἐκείνου καὶ φέρει τὸν τίτλον Ad logisticen speciosam notae priores, (δηλαδή: «Πρότερα μορφολογικῆς λογιστικῆς» δὲν ἀνευρέθησαν ἄλλα, φέροντα κατ' ἐπέκτασιν τὸν τίτλον «ὕστερα» — posteriores — καὶ ἴσως νὰ μὴ ἐγγράφησαν ποτέ). Τὸ ἔργον αὐτὸ ἀρχίζει μὲ τὸν προσδιορισμὸν ὁσωνδήποτε μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μηκῶν. Ἀκολουθεῖ μακρὰ σειρὰ προβλημάτων πρώτου βαθμοῦ, τὰ ὁποῖα σήμερον λύονται μὲ τὴν μεγαλυτέραν εὐκολίαν, ἀλλ' ἀπαιτοῦν εἰδικὰ τεχνάσματα δι' ὅσους παραμένουν εἰς τὴν χρῆσιν συγκεκομμένης ἀλγέβρας. Τὸ ἀποτέλεσμα ἑκάστου συνοψίζεται εἰς ἕνα θεώρημα. Οὕτω ὁ γάλλος μαθηματικὸς ἐσχημάτισε πλουσίαν συλλογὴν προτάσεων ἰσοδυνάμων πρὸς τοὺς τύπους, ποὺ χρησιμοποιοῦμεν σήμερον εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς μετασχηματισμούς. Τὰ πρῶτα ἐξαγόμενα ἠμποροῦν σήμερον νὰ γραφοῦν μὲ τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$(a + b) + (a - b) = 2a$$
$$(a + b) - (a - b) = 2b$$
$$(a - c) - (a - d) = d - c$$
$$(a + c) - (a + d) = c - d$$

Δίδονται κατόπιν τὰ ἀναπτύγματα τοῦ $(a + b)^v$ διὰ $v = 2, 3, \ldots 6$, ὡς καὶ μετασχηματισμοί, ὅπως οἱ ἀκόλουθοι:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$

δι' ἐκθέτας ἀνωτέρους τοῦ 3. Τέλος πολλὰ ἄλλα θεωρήματα διδάσκουν ἀναπτύγματα παραστάσεων τῆς μορφῆς:

$$(a+b)^{\nu} \pm d^{\mu}(a+b)^{\nu-\mu}$$

Ἡ συνέχεια τοῦ κειμένου φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι ἀνήκει εἰς τὴν ἀπροσδιόριστον διοφαντικὴν ἀνάλυσιν μὲ ἄμεσον ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ ἀριθμούς. Θὰ ἴδωμεν ὅμως ὅτι οἱ σκοποί του εἶναι πολὺ εὐρύτεροι. Ἀπαντᾶται προπάντων ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος: $|A^2 - B^2|$ καὶ 2AB εἶναι κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν $A^2 + B^2$. Ἀκολουθεῖ μία μέθοδος πρὸς εὕρεσιν ἐκ δύο ὀρθογωνίων τριγώνων B, D, Z (ὑποτείνουσα) καὶ F, G, X (ὑποτείνουσα) ἑνὸς τρίτου. Ὁ Viète ὑποθέτει ὅτι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ νέου τριγώνου εἶναι ZX, στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑπομένης διπλῆς ταυτότητος (μὴ ἀγνώστου εἰς τὸν Διόφαντον, Τόμος I, § 92):

$$(B^2 + D^2)(F^2 + G^2) = (BG + FD)^2 + (BF - DG)^2 =$$
$$= (BG - FD)^2 + (BF + DG)^2,$$

καὶ συνάγει ὡς ἐκφράσεις τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ νέου τριγώνου τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν ἀκολούθων ζευγῶν:

$$BG + FD, \quad |BF - DG|,$$
$$|BG - DF|, \quad BF + DG.$$

Ἐὰν τὰ δύο ἀρχικὰ τρίγωνα τεθοῦν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, τὰ δύο αὐτὰ ζεύγη ταυτίζονται μὲ τὸ ζεῦγος:

$$2BD, \quad |B^2 - D^2|$$

καὶ ἀναγόμεθα οὕτω εἰς ἕνα νέον ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ὀξειῶν τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου. Συνδυάζοντες τοῦτο μὲ τὸ νέον, καθ' ὃν τρόπον ἐξετέθη ἀνωτέρω, φθάνομεν εἰς συμπεράσματα, τῶν ὁποίων ἡ σπουδαιότης καταφαίνεται ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ταῦτα δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς τύπους πολλαπλασιασμοῦ τῶν συναρτήσεων ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.

252. Εἰς τὰ πέντα Βιβλία ποὺ φέρουν τὸν τίτλον Ζ η τ η τ ι κ ά (Zetetica) θὰ ἔλεγε κανείς, ὅτι ὁ Viète ἔθεσεν ὡς σκοπόν, νὰ φέρῃ εἰς φῶς τὴν δύναμιν τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐξέθεσεν εἰς τὴν Ε ἰ σ α γ ω γ ή ν, (Isagoge, § 250), παραθέτων ἐφαρμογὰς ἐπὶ μεγάλου πλήθους ἀριθμητικῶν προβλημάτων. Τὸ ὑλικὸν ποὺ χρησιμοποιεῖ εἶναι κατὰ βάθος διοφαντικόν. Ἀλλὰ ἡ δυνατότης, τὴν ὁποίαν ἀπέκτησεν ὁ γάλλος μαθηματικός, νὰ σκέπτεται ἐπὶ ἐγγραμμάτων δεδομένων — καίτοι δὲν παραλείπει ἕνα ἀριθμητικὸν παράδειγμα εἰς ἑκάστην λύσιν — καὶ νὰ παριστᾷ συμβολικῶς πολλοὺς ἀγνώστους,

τοῦ ἐπέτρεψε νὰ δώσῃ εἰς τὸ ὅλον ἀξιόλογον κομψότητα καὶ ταχύτητα, ὡς καὶ μίαν γενικότητα ἄγνωστον προηγουμένως. Μία ἄλλη ὑπεροχὴ τοῦ Viète, συγκρινομένου πρὸς τὸν Διόφαντον, εἶναι ὅτι διέκρινε μὲ διαύγειαν, ἔστω καὶ ἂν δὲν τὸ ἐδήλωσε ρητῶς, τὰ ὡρισμένα προβλήματα ἀπὸ τὰ λοιπὰ καὶ ὅτι παρουσίασε ἐν γένει τὸ ὑλικόν του μὲ τὴν ὀρθολογικὴν ἐκείνην τάξιν, τὴν ὁποίαν ματαίως θ' ἀνεζητοῦμεν εἰς τὸν Διόφαντον ἢ τὸν Bombelli (§ 231).

Οὕτω ἐνῷ εἰς τὸ Βιβλίον I γίνεται λόγος μόνον διὰ συστήματα ἀποτελούμενα ἐκ δύο γραμμικῶν ἐξισώσεων, εἰς τὸ Βιβλίον II ἐξετάζονται συστήματα ἀνάλογα, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται ἐπίσης ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ. Ἡ κομψότης τῶν ἐφαρμοζομένων τεχνασμάτων ἀποτελεῖ τεκμήριον ἀσφαλές, ὅτι ὁ γάλλος μαθηματικὸς εἶχε μελετήσει κατὰ βάθος τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου. Διὰ νὰ δείξωμεν μὲ ἕνα παράδειγμα τὴν φύσιν τῶν τεχνασμάτων ποὺ ἐφαρμόζει ὁ Viète, ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύστημα:

$$xy = k^2, \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ εἰσάγει ὁ Viète βοηθητικὴν μεταβλητὴν t ὁριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως:

$$x^2 + y^2 = t^2.$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καὶ τῆς τελευταίας, ἀμφοτέρων ὑψουμένων εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη, προκύπτει:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = t^4 - 4k^4,$$

ἢ

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = t^4 - 4k^4.$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ὑψουμένης εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a^4.$$

Ὅθεν:

$$a^4 = t^4 - 4k^4 \quad ἢ \quad t^4 = a^4 + 4k^4.$$

Ἐπαναφέροντες εἰς τὴν τελευταίαν τὴν σημασίαν τῆς μεταβλητῆς t εὑρίσκομεν:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^4 + 4k^4},$$

ἥτις συνδυαζομένη μὲ τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος,

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

ἄγει διὰ προσθαφαιρέσεως εἰς ἁπλούστατον προσδιορισμὸν τῶν x^2 καὶ y^2, ἄρα καὶ τῶν ἀγνώστων x, y.

Παρόμοια ζητήματα λύονται εἰς τὸ Βιβλίον III. Χαρακτηριστικὸν αὐτῶν εἶναι ὅτι ὑποτίθενται πάντοτε τρεῖς ἢ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν-

τες ἀναλογίαν. Τὰ δύο τελευταῖα Βιβλία ἀνήκουν εἰς τὴν ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν τοῦ 2ου βαθμοῦ, μὲ ἐξαίρεσιν τῶν τελευταίων προβλημάτων τοῦ IV Βιβλίου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν δύο κύβοι ἔχοντες ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων κύβων. Τὰ προβλήματα τοῦ Βιβλίου IV ἀναφέρονται κατὰ μέγα μέρος εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ ἀριθμούς. Τὸ Βιβλίον ἀρχίζει πράγματι μὲ τὴν λύσιν δύο προβλημάτων, τὰ ὁποῖα σήμερον ἐκφράζονται μὲ τὰς ἐξισώσεις:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Τὸ πρῶτον, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ περιοριζόμεθα χάριν συντομίας, λύεται ἀπὸ τὸν Viète μὲ τὴν βοήθειαν βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου:

$$m^2 + n^2 = p^2,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνονται:

$$x = \frac{am}{p}, \quad y = \frac{an}{p}.$$

Τὰ ἑπόμενα προβλήματα εἶναι ὑψηλοτέρας στάθμης καὶ ἔχουν λυθῆ ἀπὸ τὸν Διόφαντον. Εἰς τὸ Βιβλίον V, π.χ., εὑρίσκεται ἡ ἔρευνα τριῶν ἀριθμῶν x, y, z τοιούτων, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \square \\ y^2 + z^2 &= \square \\ z^2 + x^2 &= \square \\ x^2 + y^2 &= \square \end{aligned}$$

θέμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἔρευνα ἀπαντᾶται ἤδη εἰς τὸν ἀρχαῖον Ἕλληνα μαθηματικόν. Ἐξ ὅλων τούτων συνάγεται ὅτι τὰ Ζ η τ η τ ι κ ὰ ἀποτελοῦν μᾶλλον μίαν ἐμπνευσμένην μεταμόρφωσιν τοῦ ἔργου τοῦ Διοφάντου, παρὰ ἕνα βῆμα πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἐπὶ τῆς ὁδοῦ, ποὺ ἐκεῖνος διήνοιξε καὶ διέστρωσε.

253. Τὰ ἀλγεβρικὰ γραπτὰ τοῦ Viète, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ στρέψωμεν τώρα τὴν προσοχήν μας ἀποτελοῦν μέρος ἐκείνων, τὰ ὁποῖα, μετὰ τὸν θάνατόν του, συνετάχθησαν ἀπὸ τὸν Anderson (§ 249) ἐπὶ τῇ βάσει ἁπλῶν σημειώσεων τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ. Χωρὶς ν' ἀρνούμεθα ὅτι κάτι ἀπὸ τὰ περιεχόμενα ἀποτελεῖ καταβολὴν τοῦ ἀνασυντάξαντος τὰ περισυλλεγέντα σημειώματα, δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι, ὡς προκύπτει ἀπὸ αὐτά, ὁ Viète διέβλεψε καθαρά, ὅτι ἡ θεωρία τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἀποτελεῖ μίαν ἀπὸ τὰς στήλας, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη καὶ ὅτι ἑπομένως ἐπεβάλλετο νὰ καταστῇ συντόμως τελειοτέρα καὶ στερεωτέρα.

Τὸ πρῶτον κείμενον, ποὺ ἀφιέρωσεν εἰς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἔχει τί-

τλον De recognitione aequationum (Περὶ ἀναγνωρίσεως τῶν ἐξισώσεων). Κατάμεστον ὅπως εἶναι ἀπὸ νέους ὅρους, καταγομένους ἐκ τῆς ἑλληνικῆς, καθίσταται, ἀκόμη σήμερον, δυσανάγνωστον καὶ στρυφνόν, ὄχι βεβαίως μόνον διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ἀλλὰ καὶ διότι δὲν ἐλλείπουν αἱ ἐπαναλήψεις, ἐπὶ πλέον δὲ ἀντὶ γενικῶν θεωρημάτων, ἐκτίθεται σειρὰ συγγενῶν προτάσεων ὁλοὲν αὐξούσης περιπλοκότητος. Εἰς μερικὰ σημεῖα τοῦ ἔργου τούτου ὁ συγγραφεὺς φαίνεται ὅτι πλησιάζει ἀκροθιγῶς τὴν ἔννοιαν τῆς πολλαπλότητος τῶν ριζῶν ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, θὰ ἔλεγεν ὅμως κανεὶς ὅτι ἡ ἰδέα αὐτὴ ἐκυμαίνετο εἰς τὴν διάνοιαν τοῦ Viète ὡς ἀσύλληπτον φάντασμα ἢ πειρακτικὸν ὄραμα, τὸ ὁποῖον ἔσπευδε ν' ἀπωθήσῃ*.

Οὐσιώδης πρόοδος, τὴν ὁποίαν χρεωστεῖ ἡ ἄλγεβρα εἰς τὸν Viète, εἶναι ἡ θεώρησις ἐξισώσεων μὲ συντελεστὰς ἀρνητικοὺς καὶ ἀσυμμέτρους, μολονότι δὲν ἠδυνήθη ν' ἀπαλλαγῇ τῶν τριῶν συνήθων τύπων τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μὲ θετικοὺς ὅλους τοὺς συντελεστὰς καὶ τῶν ἀναλόγων τύπων τῆς τριτοβαθμίου. Ἐφήμερος ὑπῆρξεν ἐξ ἄλλου ἡ ὑπ' αὐτοῦ εἰσαχθεῖσα σύγκρισις (syncresis), ἤτοι ὁ συνδυασμὸς δύο ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$bx^{\mu} - x^{\nu} = 0,$$
$$by^{\mu} - y^{\nu} = 0,$$

ἐκ τῶν ὁποίων, ἄγνωστον διὰ ποῖον σκοπόν, ἐξάγει σχέσεις τῆς μορφῆς:

$$b = \frac{x^{\nu} - y^{\nu}}{x^{\mu} - y^{\mu}}.$$

Ἀνάλογον τύχην εἶχον αἱ προσπάθειαι τοῦ Viète ν' ἀποκαταστήσῃ μίαν σχέσιν μεταξὺ δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ ἄλλης γεωμετρικῆς.

Παρέμειναν ὅμως εἰς τὴν ἐπιστήμην, πρὸς δόξαν τοῦ Viète, τὰ ὑπ' αὐτοῦ προταθέντα τεχνάσματα πρὸς ἐξάλειψιν τοῦ δευτέρου ὅρου μιᾶς ἐξισώσεως, σημειοῦται δὲ ὅτι διὰ ν' ἁπλοποιήσῃ τὴν διατύπωσιν τῶν σχετικῶν κανόνων, ἐθεώρησε σκόπιμον νὰ δώσῃ εἰς τὰς ἐξισώσεις τὰς ἀκολούθους μορφάς:

$$x^2 = 2ax + b,$$
$$x^3 = 3ax^2 + bx + c, \text{ κλπ.}$$

254. Τὸ ἄλλο ἔργον τοῦ Viète, περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινε νύξις εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἔχει ὡς τίτλον De emendatione aequationum (Περὶ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων). Πραγματεύεται εἰς αὐτὸ τοὺς διαφόρους μετασχηματισμούς, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ ὑποστῇ μιὰ ἐξίσωσις, θέμα

* Οὕτω, ἐνώπιον τῆς ἐξισώσεως $12x - x^2 = 20$, ὁ Viète ἐκφράζεται σχεδὸν μετὰ δισταγμοῦ περὶ τῆς δυνατότητος νὰ δεχθῇ αὕτη τὰς ρίζας $x = 6 \pm 4$.

θιγὲν καὶ εἰς τὸ προηγούμενον ἔργον του. Ἐδῶ τώρα διακρίνει τὰς διαφόρους πράξεις ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων εἰς πέντε κατηγορίας. Ἡ πρώτη (expurgatio per uncias) δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἐκείνη ποὺ χρησιμεύει εἰς τὴν ἐξάλειψιν τοῦ δευτέρου ὅρου μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, διατεταγμένης κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου. Ἡ δευτέρα εἶναι ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης (transformatio π ρ ῶ τ ο ν ἔ σ χ α τ ο ν), δυνάμει τῆς ὁποίας ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν π.χ.

$$x^3 + px = q,$$

μεταβαίνομεν εἰς τὴν

$$y^3 + p'y^2 = q'.$$

Ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x = q/y$. Δὲν διέφυγε τοῦ Viète ὅτι διὰ τῆς αὐτῆς πράξεως ἠδύνατο νὰ ἐξαλείψῃ τὸν δευτεροβάθμιον ὅρον τῆς ἐξισώσεως:

$$x^3 + px^2 = q.$$

Ἐπὶ πλέον μάλιστα παρετήρησεν, ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτὴν δύναται κανεὶς νὰ καταφύγῃ, προκειμένου νὰ ἐξαλείψῃ συντελεστὰς ἀσυμμέτρους: οὕτω ἡ ἐξίσωσις π.χ.

$$x^3 - 10x = \sqrt{48},$$

ἀνάγεται εἰς τὴν $y^3 + 10y^2 - 48 = 0$, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x = \sqrt{48}/y$.

Μετὰ τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ἔρχεται ἡ ἀ ν ά σ τ ρ ο φ ο ς (anastrofe), πρᾶξις ἐξαφανισθεῖσα τελικῶς ὡς ἄχρηστος. Διὰ τοῦτο καὶ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ τὴν περιγράψωμεν κηδόμενοι τοῦ ἀναγνώστου. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται νὰ λεχθῇ διὰ μίαν ἄλλην πρᾶξιν τὴν ὁποίαν καλεῖ ἰ σ ο μ έ ρ ε ι α ν (isomeria) καὶ τῆς ὁποίας σκοπὸς εἶναι ἡ ἀπαλλαγὴ τῆς ἐξισώσεως ἐκ τῶν παρονομαστῶν.

Ἡ τελευταία ἐκ τῶν πράξεων μετασχηματισμοῦ, τὰς ὁποίας διδάσκει ὁ Viète, χρησιμεύει εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως 4ου βαθμοῦ εἰς ἄλλην 3ου βαθμοῦ. Πρόκειται κατὰ βάθος περὶ ἑνὸς τεχνάσματος ἐπινοηθέντος ἀπὸ τὸν Ferrari, τὸ ὁποῖον ὁ Viète παρέλαβεν ἀναμφιβόλως ἀπὸ τὴν Ars magna τοῦ Cardano.

Πρωτοτυπότερος ἐδείχθη ὁ Viète εἰς τὴν λύσιν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως:

$$x^3 + 3b^2x = c^3, \qquad (\alpha)$$

τὴν ὁποίαν ἀνήγαγεν εἰς τὴν:

$$y^6 + c^3y^3 = b^6, \qquad (\beta)$$

διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως:

$$x = \frac{b^2}{y} - y, \qquad (\gamma)$$

καὶ τελικῶς εἰς δευτεροβάθμιον διὰ νέας ἀντικαταστάσεως $y^3 = z$. Ἀνάλογα τεχνάσματα δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς οἱανδήποτε τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν. Εἶναι δὲ ἀξιοσημείωτον, ὅτι δὲν διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ Viète τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν μὴ ἀναγώγιμον περίπτωσιν αἱ τριτοβάθμιαι ἐξισώσεις ἄγουν εἰς τριχοτόμησιν τῆς γωνίας.

Αἱ τελευταῖαι σελίδες τοῦ De emendazione ἀποδεικνύουν, ὅτι ὁ Viète ἔφθασε μέχρι τοῦ κατωφλίου τῆς ἀναγωγῆς ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον γραμμικῶν παραγόντων, ἀφοῦ κατέστρωσε τὸν τύπον, ὑπὸ τὸν ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ ἕνα πολυώνυμον ν βαθμοῦ, ὅταν τοῦτο μηδενίζεται διὰ ν δεδομένας τιμὰς τῆς μεταβλητῆς του: $a(x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_\nu)$. Ἀληθὲς εἶναι ὅτι θεωρεῖ κεχωρισμένως τὰς ἐξισώσεις τοῦ 2ου, 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ, ἀλλ' ἡ ὁμοιομορφία τῶν συλλογισμῶν καὶ τῶν συμπερασμάτων δεικνύει τὴν διατήρησιν αὐτῶν καὶ εἰς τὴν γενικότητα. Βραχὺς πλέον ἦτο ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον ἔπρεπε νὰ διανύσῃ διὰ ν' ἀποκαταστήσῃ τὰς σχέσεις μεταξὺ ριζῶν καὶ συντελεστῶν ἑνὸς πολυωνύμου.

255. Εἰς τὸν Viète ὀφείλεται ἀκόμη μία μέθοδος προσεγγιστικῆς ἐκτιμήσεως τῶν ριζῶν τῶν ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων παντὸς βαθμοῦ. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀφιεροῦται ἕνα ἐκτενὲς ἔργον, φέρον τὸν τίτλον De numerosa potestatum purarum resoluzione. Ἐὰν $f(x) = k$ εἶναι ἡ προτεινομένη ἐξίσωσις βαθμοῦ ν, a προσεγγιστικὴ τιμὴ μιᾶς ρίζης καὶ s τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτῆς, τότε κατὰ τὸν Viète ἡ ἔκφρασις:

$$a - \frac{f(a)}{|f(a+s) - f(a)| - s^\nu}$$

προσφέρει μίαν τιμὴν τῆς ρίζης μεγαλυτέρας προσεγγίσεως. Ὁ ἀναγνώστης θ' ἀναγνωρίσῃ τὴν ἀναλογίαν τοῦ κανόνος τούτου μὲ τὸν γνωστότατον κανόνα τοῦ Newton.

Τέλος, ἕνα κείμενον τιτλοφορούμενον Effectionum geometricarum canonica recencio (Γεωμετρικῶν κατασκευῶν κανονικὴ ἀπογραφή) μᾶς μεταφέρει εἰς ἕνα πεδίον ὑπαγόμενον εἰς τὴν ἐπιστήμην τοῦ διαστήματος, καθ' ὅσον λύονται ἐδῶ προβλήματα γεωμετρίας 1ου καὶ 2ου βαθμοῦ. Συγγενὲς ἀλλὰ ὑψηλότερον εἶναι τὸ θέμα ἑνὸς ἄλλου ἔργου ἔχοντος τίτλον Supplementum geometriae (Συμπλήρωμα γεωμετρίας). Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἐξετάζονται προβλήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ, διὰ τὴν λύσιν τῶν ὁποίων ὁ Viète καινοτομεῖ, εἰσάγων πέραν τῶν εὐκλειδείων κατασκευῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν πάσης παρεμβολῆς (βλ. § 250). Τοιουτοτρόπως καθιερώνει τὰ μέσα τριχοτομήσεως τῆς γωνίας ὡς καὶ τῆς παρεμβολῆς δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ

δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Εἰς τὰ δύο αὐτὰ βασικὰ προβλήματα ἀνάγει οἱονδήποτε ζήτημα 3ου ἢ 4ου βαθμοῦ (π.χ. τὴν ἐγγραφὴν εἰς κύκλον κανονικοῦ ἑπταγώνου), μὲ γενικότητα ἡ ὁποία ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα καὶ ἐπιστέφει ἐπαξίως τὰς λοιπὰς συμβολὰς ποὺ ἔδωσεν ὁ Viète εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ Κεφάλαια ποὺ ἀκολουθοῦν ποῖα ἴχνη, ἐξ ἴσου βαθέα, ἠδυνήθη ν' ἀποτυπώση εἰς ἄλλα πεδία τῆς μαθηματικῆς γνώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΣΜΟΥ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Αἱ πρῶται ἐκδόσεις τῶν ἑλλήνων κλασσικῶν

256. Τὸ ἀνθρωπιστικὸν κίνημα, τὸ ὁποῖον, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ Πετράρχου καὶ τοῦ Βοκκακίου, ὡδήγησε τόσους ἐπιφανεῖς ἄνδρας εἰς τὸ νὰ ἐρευνήσουν, νὰ μελετήσουν καὶ νὰ θέσουν εἰς κυκλοφορίαν ποιητὰς καὶ φιλοσόφους, ἱστορικοὺς καὶ φυσιοδίφας, ῥήτορας καὶ τραγικοὺς ποιητὰς τῶν ἀρχαίων ἐποχῶν, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου συμπεριέλαβε καὶ τοὺς ἐργάτας τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν. Ἀλλ' αἱ ἀξιέπαινοι προσπάθειαί των δὲν ἠδυνήθησαν ν' ἀσκήσουν ὅλην τὴν ἐπίδρασίν των παρὰ μόνον μετὰ τὴν ἐφεύρεσιν τῆς τυπογραφίας. Διὰ ν' ἀναμετρήσωμεν τὴν ἀποτελεσματικότητα τῆς ἐπιδράσεως τῆς θαυμαστῆς αὐτῆς ἐφευρέσεως, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVI αἰῶνος ἐξῆλθον ἀπὸ τὰς κονισσαλέας βιβλιοθήκας, ὅπου εἶχον ἀπὸ αἰώνων ἐγκλεισθῆ, ὅλοι οἱ μεγάλοι μαθηματικοὶ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος καὶ μέρος τῶν μικροτέρων.

Οὕτω τῇ φροντίδι τοῦ βενετοῦ Bartolomeo Zamberti ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1505 τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ «Εὐκλείδου τοῦ Μεγαρικοῦ, πλατωνικοῦ φιλοσόφου», κατόπιν (1573) τὰ Ὀπτικὰ τοῦ ἰδίου καὶ τοῦ Ἡλιοδώρου τοῦ Λαρισαίου τῇ φροντίδι τοῦ Egnatio Danti (1537-1586). Τὸ 1533 εἶδε τὸ φῶς εἰς τὴν Βασιλείαν, τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, συνοδευόμενον ἀπὸ τὸ Σχόλιον τοῦ Πρόκλου. Ἕνδεκα ἔτη βραδύτερον ἐπεξετάθη ἡ ἐκδοτικὴ δραστηριότης εἰς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὴν Ἀλμαγέσταν τοῦ Πτολεμαίου. Τὸ 1544 ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Ρώμην ἀκόμη καὶ ἡ ἀραβικὴ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὀφειλομένη εἰς τὸν Nassir - ed - Din*.

---

* Euclidis Elementorum geometricarum Libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabice impressi. Ἡ πρώτη σελίς, τῆς ὁποίας ἕνα μέρος εἶναι εἰς τὴν ἀραβικήν, ἀναδημοσιεύεται ἀπέναντι τῆς σελ. 104 ἑνὸς ἔργου τοῦ José A. Sanchez Perez : Las matematicas eu la Biblioteca del Escorial (Memor de la R. Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid, Ser. 2, t VII, 1929).

Εἰς τὸν Francesco Barozzi ὀφείλεται ἡ πρώτη μετάφρασις τοῦ Σχολίου τοῦ Πρόκλου, ἡ ὁποία ἐδημοσιεύθη, μετὰ τὸν θάνατον τοῦ μεταφραστοῦ, εἰς Βενετίαν τὸ 1560. Ἄλλα κείμενα τοῦ ἰδίου συγγραφέως μαρτυροῦν βαθεῖαν γνῶσιν τῆς ἀρχαίας ἐπιστήμης· ἂς περιορισθῶμεν ν' ἀναφέρωμεν ὅτι εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν πραγματευόμενον περὶ ἀσυμπτώτων, ἀπαντᾶται ἡ περιγραφὴ ἑνὸς ὀργάνου γράφοντος τὰς κωνικὰς τομὰς καὶ ὁμοιάζοντος πρὸς τὸν «τέλειον διαβήτην» τῶν Ἀράβων (Τόμος I, § 149).

Ἡ λατινικὴ μετάφρασις τῆς Σφαιρικῆς τοῦ Θεοδοσίου, γενομένη ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ ἀπὸ τοῦ 1120, ἐτυπώθη τελικῶς τὸ 1518 καὶ ἐκ νέου τὸ 1557. Τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὴν ἀνάλογον ἐργασίαν, γενομένην ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ, ὑπὸ ἑνὸς μαθητοῦ τοῦ Ramus, καθηγητοῦ ἐπίσης εἰς τὸ Γαλλικὸν Κολλέγιον, τοῦ Giovanni de la Pène (1528-1558), εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται προσέτι μία λατινικὴ καὶ ἑλληνικὴ ἔκδοσις τῶν Ὀπτικῶν τοῦ Εὐκλείδου.

Τέλος, τὸ ἔτος 1575 εἶναι ἀσυνήθως ἐνδιαφέρον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν ἐρευνῶν ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, διὰ τὴν πραγματοποιηθεῖσαν τότε δημοσίευσιν (ἔστω καὶ ἀτελῆ) τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου εἰς λατινικὴν γλῶσσαν. Συγγραφεὺς τῆς μεταφράσεως εἶναι ὁ Wilhelm Holzmann, γενικῶς γνωστὸς ὑπὸ τὸ λατινικὸν ὄνομα Gulielmus Xylander, καθηγητὴς τῶν ἑλληνικῶν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Heidelberg, γεννηθεὶς τὸ 1532 εἰς Augsburg ἐκ πτωχῶν γονέων καὶ ἀποθανὼν τὸ 1576. Εἴδομεν ὅτι (§ 247) σχεδὸν 10 ἔτη εἶχον ἤδη παρέλθει, ἀφ' ὅτου ἕνας διάσημος Βέλγος, ὁ S. Stevin, μετέφρασεν εἰς τὴν γαλλικὴν τὰ 4 πρῶτα βιβλία. Ἡ δημοσίευσις (1570) τῆς πρώτης ἀγγλικῆς μεταφράσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Henry Billingsley* μᾶς δίδει τὴν εὐκαιρίαν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αὕτη, ὅπως καὶ αἱ ἄλλαι μεταφράσεις εἰς νεωτέρας γλώσσας, ἐγένετο ὄχημα χρησιμώτατον πρὸς διάδοσιν τῆς μαθηματικῆς γνώσεως εἰς τὰς μάζας, ἀκόμη δηλαδὴ καὶ μεταξὺ ἐκείνων, ποὺ δὲν ἦσαν εἰς θέσιν νὰ διαβάσουν ἕνα κείμενον γραμμένον εἰς μίαν τῶν κλασσικῶν γλωσσῶν.

Θὰ ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν τὴν πληροφορίαν τῆς δημοσιεύσεως (Βενετία, 1537) τῶν 4 πρώτων Βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, εἰς μία λατινικὴν μετάφρασιν ὀφειλομένην εἰς τὸν βενετὸν πατρίκιον G. B. Memo. Ἀλλ' ἡ ἐκτύπωσις ἔλαβε χώραν μετὰ τὸν θάνατόν του μὲ ἐπιμέλειαν τοῦ υἱοῦ του Gianmaria, ἐντελῶς ἀμυήτου εἰς τὰ μαθηματικά, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ὑπῆρξεν τόσον πλημμελές, ὥστε τὸ κείμενον νὰ εἶναι ἀκατάληπτον. Ἡ συμβολὴ λοιπὸν τῶν δύο Memo δὲν ἠμπορεῖ παρὰ νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ γεγονός, ὅτι παρεκίνησεν ἄλλους νὰ ἐπιτύχουν καλύτερον ἀποτέλεσμα.

Τὸ σύνολον τῶν πρώτων αὐτῶν ἐκδόσεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν ἐκ πρωτοτύπων κειμένων ὑπὸ ἐρασιτεχνῶν ἀμαθῶν καὶ ἀπειροκάλων, παρουσιάζει ἀτελείας τόσον σοβαράς, ὥστε ἡ σκέψις τοῦ συγγραφέως νὰ παρίσταται

σκοτεινὴ καὶ παραμορφωμένη. Ἡ κατάστασις αὐτὴ ἐγέννησε εἰς μερικοὺς εὐρυμαθεῖς, ἔχοντας οἰκειότητα μὲ τὴν μαθηματικὴν σκέψιν, τὴν ἰδέαν νὰ ἀναθεωρήσουν καὶ νὰ διορθώσουν τὰ δημοσιευθέντα κείμενα, νὰ σχολιάσουν τὰ ἐξοχώτερα ἔργα καὶ τέλος νὰ προσπαθήσουν νὰ μαντεύσουν ἐκεῖνα, περὶ τῶν ὁποίων τίποτε ἄλλο δὲν ἦτο γνωστὸν πλὴν τῶν ὅσων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Πρόκλου. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἤχθησαν εἰς πρωτοτύπους ἐρεύνας αἱ ὁποῖαι, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν δύνανται νὰ παραβληθοῦν μὲ τὰ ἀλγεβρικὰ ἔργα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν εἰς τὰ δύο προηγηθέντα Κεφάλαια, ἀποτελοῦν πάντως συμπτώματα ἀσφαλῆ μιᾶς ἀφυπνίσεως τοῦ πνεύματος τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης.

Ἡ Ἰταλία ἔχει τὴν δόξαν ὅτι ἐγέννησε δύο ἐξόχους στοχαστὰς αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Προτοῦ ἀσχοληθῶμεν μὲ αὐτούς, ἄς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ ἐξάρωμεν ἕνα γεγονός, ἄξιον μεγάλης προσοχῆς (καὶ τοῦ ὁποίου θ' ἀπαντήσωμεν πολλὰς ἐπιβεβαιώσεις), ὅτι κάθε φορὰν ποὺ εἰς μίαν χώραν ἀρχίζει ν' ἀφυπνίζεται τὸ πνεῦμα τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης, οἱ ἐπιστήμονες δὲν κατορθώνουν ν' ἀπαλλαγοῦν τῆς γοητείας, τὴν ὁποίαν ἀσκοῦν ἐπ' αὐτῶν οἱ ἀρχαιότεροι ἐρευνηταί, διὸ καὶ προσπαθοῦν ν' ἀκολουθήσουν τὰ ἴχνη των, νὰ μιμηθοῦν ἀκόμη καὶ τὰς κινήσεις καὶ τοὺς τρόπους των. Θὰ ἠδύνατο λοιπὸν κανεὶς νὰ ὁδηγηθῇ εἰς τὴν σκέψιν, ὅτι εἰς τὸν πνευματικὸν βίον τῶν ἐθνῶν συμβαίνει κάτι τὸ ἀνάλογον μ' ἐκεῖνο ποὺ διδάσκει ἡ ἐμβρυολογία ὅτι γίνεται εἰς τὸν φυσικὸν βίον τῶν ζώων : κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον κάθε ὀργανικὸν ὄν, προτοῦ ἀποκτήσῃ βίον αὐτόνομον καὶ ἀνεξάρτητον, διέρχεται ἀπὸ ὅλας ἐκείνας τὰς φάσεις ἐξελίξεως, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐπέρασε τὸ εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει, προτοῦ φθάσῃ τὴν φυσικὴν κατάστασιν τῆς γενεᾶς τῆς ὁποίας θ' ἀποτελέσῃ ἕνα μέλος, οὕτω καὶ κάθε λαός, προτοῦ ἀποκτήσῃ τὴν ἱκανότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γνώσεών μας ἐπὶ τῶν φαινομένων τοῦ διαστήματος, ὀφείλει ἐπί τινα χρόνον νὰ ἐνστερνισθῇ τὰ ἐξωτερικὰ γνωρίσματα καὶ τοὺς τρόπους δράσεως ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐπάτησε προηγουμένως τὸν αὐτὸν δρόμον.

Μαυρόλυκος καὶ Κομμαντῖνος

257. Εἰς τὴν Μεσσήνην (τῆς Σικελίας), ἡ ὁποία ἦτο κέντρον σοβαρῶν σπουδῶν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης καὶ γραμματείας, καὶ ἀπὸ οἰκογένειαν προερχομένην ἐκ Κωνσταντινουπόλεως, ἐγεννήθη ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος, μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος, ποιητὴς καὶ ἱστορικὸς μεγάλης ἀξίας. Ὁ σεβασμὸς τὸν ὁποῖον ἔτρεφον πρὸς αὐτὸν οἱ σύγχρονοί του συνάγεται ἀπὸ τὴν δήλωσιν, ἡ ὁποία ἔχει σκαλισθῆ ἐπὶ τοῦ τάφου του εἰς τὴν Μεσσήνην· κατὰ τὴν ἐπιγραφὴν αὐτὴν ἡ φύσις ἐγέννησε τὸν Μαυρόλυκον εἶνα μὴ

σκοτεινὴ καὶ παραμορφωμένη. Ἡ κατάστασις αὐτὴ ἐγέννησε εἰς μερικοὺς εὐρυμαθεῖς, ἔχοντας οἰκειότητα μὲ τὴν μαθηματικὴν σκέψιν, τὴν ἰδέαν νὰ ἀναθεωρήσουν καὶ νὰ διορθώσουν τὰ δημοσιευθέντα κείμενα, νὰ σχολιάσουν τὰ ἐξοχώτερα ἔργα καὶ τέλος νὰ προσπαθήσουν νὰ μαντεύσουν ἐκεῖνα, περὶ τῶν ὁποίων τίποτε ἄλλο δὲν ἦτο γνωστὸν πλὴν τῶν ὅσων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Πρόκλου. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἤχθησαν εἰς πρωτοτύπους ἐρεύνας αἱ ὁποῖαι, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν δύνανται νὰ παραβληθοῦν μὲ τὰ ἀλγεβρικὰ ἔργα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν εἰς τὰ δύο προηγηθέντα Κεφάλαια, ἀποτελοῦν πάντως συμπτώματα ἀσφαλῆ μιᾶς ἀφυπνίσεως τοῦ πνεύματος τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης.

Ἡ Ἰταλία ἔχει τὴν δόξαν ὅτι ἐγέννησε δύο ἐξόχους στοχαστὰς αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Προτοῦ ἀσχοληθῶμεν μὲ αὐτούς, ἂς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ ἐξάρωμεν ἕνα γεγονός, ἄξιον μεγάλης προσοχῆς (καὶ τοῦ ὁποίου θ' ἀπαντήσωμεν πολλὰς ἐπιβεβαιώσεις), ὅτι κάθε φορὰν ποὺ εἰς μίαν χώραν ἀρχίζει ν' ἀφυπνίζεται τὸ πνεῦμα τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης, οἱ ἐπιστήμονες δὲν κατορθώνουν ν' ἀπαλλαγοῦν τῆς γοητείας, τὴν ὁποίαν ἀσκοῦν ἐπ' αὐτῶν οἱ ἀρχαιότεροι ἐρευνηταί, διὸ καὶ προσπαθοῦν ν' ἀκολουθήσουν τὰ ἴχνη των, νὰ μιμηθοῦν ἀκόμη καὶ τὰς κινήσεις καὶ τοὺς τρόπους των. Θὰ ἠδύνατο λοιπὸν κανεὶς νὰ ὁδηγηθῇ εἰς τὴν σκέψιν, ὅτι εἰς τὸν πνευματικὸν βίον τῶν ἐθνῶν συμβαίνει κάτι τὸ ἀνάλογον μ' ἐκεῖνο ποὺ διδάσκει ἡ ἐμβρυολογία ὅτι γίνεται εἰς τὸν φυσικὸν βίον τῶν ζώων : κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον κάθε ὀργανικὸν ὄν, προτοῦ ἀποκτήσῃ βίον αὐτόνομον καὶ ἀνεξάρτητον, διέρχεται ἀπὸ ὅλας ἐκείνας τὰς φάσεις ἐξελίξεως, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐπέρασε τὸ εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει, προτοῦ φθάσῃ τὴν φυσικὴν κατάστασιν τῆς γενεᾶς τῆς ὁποίας θ' ἀποτελέσῃ ἕνα μέλος, οὕτω καὶ κάθε λαός, προτοῦ ἀποκτήσῃ τὴν ἱκανότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γνώσεών μας ἐπὶ τῶν φαινομένων τοῦ διαστήματος, ὀφείλει ἐπί τινα χρόνον νὰ ἐνστερνισθῇ τὰ ἐξωτερικὰ γνωρίσματα καὶ τοὺς τρόπους δράσεως ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐπάτησε προηγουμένως τὸν αὐτὸν δρόμον.

Μαυρόλυκος καὶ Κομμαντῖνος

257. Εἰς τὴν Μεσσήνην (τῆς Σικελίας), ἡ ὁποία ἦτο κέντρον σοβαρῶν σπουδῶν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης καὶ γραμματείας, καὶ ἀπὸ οἰκογένειαν προερχομένην ἐκ Κωνσταντινουπόλεως, ἐγεννήθη ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος, μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος, ποιητὴς καὶ ἱστορικὸς μεγάλης ἀξίας. Ὁ σεβασμὸς τὸν ὁποῖον ἔτρεφον πρὸς αὐτὸν οἱ σύγχρονοί του συνάγεται ἀπὸ τὴν δήλωσιν, ἡ ὁποία ἔχει σκαλισθῆ ἐπὶ τοῦ τάφου του εἰς τὴν Μεσσήνην· κατὰ τὴν ἐπιγραφὴν αὐτὴν ἡ φύσις ἐγέννησε τὸν Μαυρόλυκον αἶνα μὴ

ἡ Σικελία στηρίζῃ τὴν αἴγλην καὶ τὴν δόξαν της εἰς ἕνα καὶ μόνον Ἀρχιμήδη».

Ὁ Μαυρόλυκος εἶδε τὸ φῶς τὴν 16 Σεπτεμβρίου 1494, τὸ δὲ 1521 περιεβλήθη τὸ ἱερατικὸν σχῆμα. Δύο φορὰς (1528 καὶ 1553) οἱ συμπολῖται του τὸν ἐκάλεσαν νὰ καταλάβῃ μίαν δημοσίαν καθηγητικὴν ἕδραν τῶν μαθηματικῶν. Ὁ αὐτοκράτωρ Κάρολος V, ὅταν τὸ 1535 διῆλθεν ἐκ Μεσσήνης, ἐπιστρέφων ἐκ Τύνιδος, ὅπου εἶχε μεταβεῖ πρὸς ἐξόντωσιν τοῦ πειρατοῦ Barbarossa, ἐζήτησε τὸν Μαυρόλυκον εἰς συνδιάλεξιν. Ἀπέθανε τὴν 21 Ἰουλίου 1575. Ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν πρωτοτύπων ἔργων του, τῶν ἐκδόσεων κλασσικῶν κειμένων καὶ σχολίων δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ τὸν Regiomontano*, εἶχε δὲ τὴν ἱκανοποίησιν νὰ ἴδῃ τὰ ἔργα του κυκλοφοροῦντα ἀνὰ τὸν κόσμον καὶ ν' ἀντλήσῃ ἐξ αὐτῶν οἰκουμενικὴν φήμην.

Ὁ πρῶτος Ἕλλην γεωμέτρης ποὺ ἐφείλκυσε τὴν προσοχήν του ὑπῆρξεν ὁ Εὐκλείδης, ἐξ ἀφορμῆς τῆς ὑπὸ τοῦ Zamberti γενομένης ἐκδόσεως (§ 256), τὴν ὁποίαν ἔκρινεν ὡς μὴ ἱκανοποιητικήν. Λαβὼν τὰ Στοιχεῖα ὡς θέμα δημοσίων μαθημάτων, μετέβαλε ριζικῶς τὴν ὕλην τοῦ XIII Βιβλίου καὶ εἰσήγαγεν ἀξιολόγους προσθήκας τόσον εἰς τὸ Βιβλίον τοῦτο ὅσον καὶ εἰς τὰ οὕτω καλούμενα Βιβλία XIV καὶ XV.

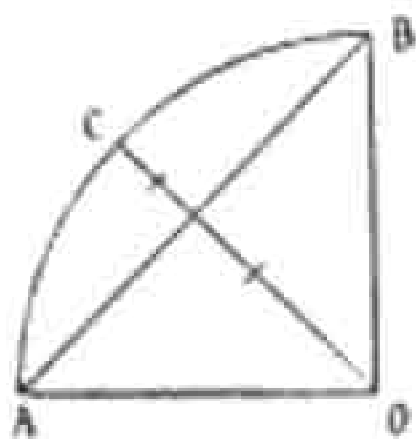
Ἀκόμη ὀλιγώτερον ἱκανοποιητικὴν εὗρεν ὁ Μαυρόλυκος τὴν ὑπὸ τοῦ βενετοῦ πατρικίου G. B. Memo γενομένην ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (§ 256). Τοῦ ἔργου τούτου ἦσαν τότε γνωστὰ μόνον τὰ 4 πρῶτα Βιβλία. Ὁ Μαυρόλυκος ἐκυριεύθη ἀπὸ τὴν ἐπιθυμίαν ν' ἀνασυντάξῃ μὲ τὴν δύναμιν τῆς φαντασίας τὰ ὑπόλοιπα δύο Βιβλία, ἐκμεταλλευόμενος πρὸς τοῦτο τὰς περὶ αὐτῶν πληροφορίας τοῦ Πάππου. Ὅταν ἀνεκαλύφθησαν αἱ ἀραβικαὶ μεταφράσεις τῶν δύο Βιβλίων, παρετηρήθη ὅτι ὡς πρὸς τὸ V (ὁ ἀναγνώστης θὰ ἐνθυμῆται ὅτι τοῦτο πραγματεύεται περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων εὐθυγράμμων τμημάτων ἀγομένων εἰς κωνικὴν ἐκ σημείου τοῦ ἐπιπέδου της), ὁ ἐκ Μεσσήνης μαθηματικὸς εἶχε πολὺ ἀπομακρυνθῇ τοῦ Περγαίου, ἐνῷ ὡς πρὸς τὸ Βιβλίον VI (ἰσότης καὶ ὁμοιότης κωνικῶν) ἡ ἀπόκλισίς του ἦτο ὀλιγώτερον σημαντική. Ἀπὸ τὰς σπουδάς του αὐτὰς ἐπὶ τῶν περιφήμων καμπύλων ὁ Μαυρόλυκος ἤχθη εἰς μίαν νέαν μέθοδον μελέτης αὐτῶν, ἐξετάζων δηλαδὴ τὰς καμπύλας κατ' εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ κώνου. Κατὰ σύμπτωσιν ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἀποτελεῖ τὴν πρώτην πρόοδον ἡ ὁποία,

* Ἕνας πίναξ τῶν ἔργων, ποὺ ἔγραψεν ὁ Μαυρόλυκος μέχρι τοῦ 1543, ἀναφέρεται εἰς μίαν ἐπιστολήν του, διὰ τῆς ὁποίας ἀφιερώνει τὸ βιβλίον του Κοσμογραφία εἰς τὸν Καρδινάλιον Bembo. Μεταξὺ αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ἕνα ἔργον ἀλγέβρας, θεωρούμενον σήμερον ὡς ἀπολεσθέν· ἐξ ὅσων ἀναφέρει ὁ ἴδιος ὁ συγγραφεὺς τὸ ἔργον ἀφεώρα μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς ὕλης.

ἐν τῷ συνόλῳ της, ἐσημειώθη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ἡ προσοχὴ τοῦ Μαυρολύκου ἐστράφη κατόπιν πρὸς τὸν τρίτον ἐκ τῶν νομοθετῶν τῆς γεωμετρίας καὶ ὅλως ἰδιαιτέρως εἰς τὰς βαρυκεντρικὰς ἐρεύνας τοῦ ἀθανάτου Συρακουσίου. Εἰς συμπλήρωσιν δὲ αὐτῶν ἠσχολήθη μὲ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου βάρους πυραμίδος, ἡμισφαιρίου καὶ παραβολικοῦ κωνοειδοῦς. Ἦτο ἡ ὁδός, τὴν ὁποίαν εἶχον ἤδη ἀκολουθήσει μερικοὶ ἄραβες (Τόμος I, § 144), ἐντελῶς ἄγνωστοι τότε εἰς τὴν Εὐρώπην, καὶ τὴν ὁποίαν ἠκολούθησαν μετ' ὀλίγον δύο ἄλλοι μαθηματικοί, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτὸ (Κομμαντῖνος καὶ Κλάβιος). Καὶ λέγοντες τοῦτο δὲν ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἐλαττώσωμεν, ἀλλὰ ν' αὐξήσωμεν τὴν ὀφειλομένην τιμὴν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος μὲ τόσην ἐπιτυχίαν διήνοιξε καὶ διέτρεξε τὸν δρόμον αὐτόν.

Ἱστορικὴ ἀμεροληψία ἐν τούτοις ἐπιβάλλει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ Μαυρόλυκος ἐπλανήθη, ἐπειδὴ ἐνόμισεν ὅτι μὲ βαρυκεντρικὰς θεωρίας θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. Ἔλαβε πράγματι ἕνα τεταρτοκύκλιον (σχ. 6), τὸ ὁποῖον ἐχώρισεν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AOB καὶ εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ABC καὶ ἐθεώρησεν ἐν συνεχείᾳ τὰ κέντρα βάρους τῶν μερῶν καὶ τοῦ ὅλου. Ἔκαμεν ὅμως τὸ λάθος ν' ἀμελήσῃ τὸ οὐσιῶδες γεγονός, ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ἦτο τότε πρόβλημα ἄλυτον, καὶ θὰ ἴδωμεν ἐν καιρῷ (§ 320) ὅτι ἡ λύσις στηρίζεται ἐπὶ τῆς εὐθειοποιήσεως κυκλικοῦ τόξου, ἤτοι, κατ' οὐσίαν, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος τοῦ ὁποίου ἐπεχείρει ὁ Μαυρόλυκος νὰ εὕρῃ τὴν λύσιν.



Σχ. 6

258. Ὁ πρὸς τὴν ἐπιστήμην ζῆλος, ποὺ ἐνεψύχωνε τὸν Μαυρόλυκον, τὸν ὤθησεν εἰς τὴν σπουδὴν ἀκόμη καὶ τῶν μικροτέρων ἑλλήνων γεωμετρῶν (ὅπως ὁ Σερῆνος, Τόμος I, § 60), ἡ δὲ κλίσις του πρὸς τὴν μελέτην τῶν οὐρανίων φαινομένων, τὸν παρεκίνησε ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὸν ἐκ Πριήνης Αὐτόλυκον, τὸν ἐκ Τριπόλεως Θεοδόσιον (§ 67, Τόμος I) καὶ τὸν ἐξ Ἀλεξανδρείας Μενέλαον (Τόμος I, §68). Ἀλλά, ὡς διανοούμενος, τὸν ὁποῖον ἐχαρακτήριζεν ἡ πνευματικὴ ἀνεξαρτησία, δὲν περιωρίσθη εἰς τὴν δημοσίευσιν τῶν ἐργασιῶν των, ἀλλὰ προσέθεσεν εἰς ὅσα ἔμαθε μίαν σημαντικὴν θεωρίαν. Ἐνῷ δηλαδὴ ἀπὸ καιροῦ εἶχον εἰσαχθῇ εἰς χρῆσιν αἱ συναρτήσεις ἡμίτονον (sinus) καὶ συνημίτονον (cosinus), καὶ ἐνῷ ὁ Regiomontano εἶχε προσθέσει εἰς αὐτὰς τὴν ἐφαπτομένην (tangens), ὁ Μαυρόλυκος — συναντώμενος, ὅπως θὰ ἴδωμεν (§ 270), μὲ τὸν Rhaeticus — ὑπέδειξεν ὅτι εἶναι συμφέρουσα ἡ μεθοδικὴ χρῆσις καὶ ἄλλης συναρ-

τήσεως, τῆς τεμνούσης (secant), τῆς ὁποίας τὸν σύνδεσμον μὲ τὰς λοιπὰς ἔδειξε διὰ τῶν σχέσεων:

$$\text{τεμ}\ \varphi = \frac{(\text{ακτίς})^2}{\text{συν}\ \varphi},$$

$$\text{τεμ}\ \varphi = \frac{\text{ακτίς} \cdot \text{εφ}\ \varphi}{\text{ημ}\ \varphi}.$$

Διὰ νὰ διευκολύνῃ μάλιστα τὴν χρῆσιν τῆς τεμνούσης εἰς τὴν πρᾶξιν, κατέστρωσεν ἕνα πίνακα τιμῶν τῆς τεμνούσης, εἰς τὸν ὁποῖον ἔδωσε τὸ ὄνομα Tavola benefica (εὐεργετικὸς πίναξ).

Ὁ Μαυρόλυκος ἠσχολήθη ἀκόμη καὶ μὲ τοὺς δύο ἄλλους κλάδους, ποὺ ὑπηρετοῦν τὴν ἀστρονομίαν: τὴν γνωμονικὴν καὶ τὴν ὀπτικήν. Χάρις εἰς τὴν οἰκειότητά του μὲ τὰς κωνικὰς τιμὰς ἔδωσεν εἰς τὴν γνωμονικὴν κατεύθυνσιν ἀληθῶς ἐπιστημονικήν, ἡ ὁποία διετηρήθη ἀπὸ τοὺς μεταγενεστέρους συγγραφεῖς (ἀναφέρομεν ὡς παράδειγμα τὸν Κλάβιον). Μελετῶν δὲ τὴν ὀπτικήν, κατέδειξε τὴν ὕπαρξιν μιᾶς καμπύλης, περιβαλλούσης τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων τῶν ἐκπορευομένων ἀπό τινος φωτεινοῦ κέντρου, γενόμενος οὕτω πρόδρομος τῆς θεωρίας τῶν καυστικῶν καμπύλων, ποὺ συνεδέθη μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Tschirnhausen.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι εἰς ὅλους τοὺς κλάδους τοὺς συνδεομένους μὲ θεωρίας τοῦ διαστήματος ὁ Μαυρόλυκος, ὁρμώμενος ἐκ βαθείας μελέτης τῶν ἀρχαίων ἔργων, ὄχι μόνον ἤντλησε πολυτίμους γνώσεις, ἀλλ' ἔδωσεν εἰς τὸ πνεῦμα του κίνητρον καὶ ἐμπνεύσεις πρὸς δημιουργίαν.

Τὸ αὐτὸ δὲν δύναται νὰ λεχθῇ ὡς πρὸς τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν. Τὰ ἔργα τῶν Νεο-Πυθαγορείων, πρὸς τὰ ὁποῖα ἐστράφη ὁ Μαυρόλυκος μετὰ τὴν μελέτην τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τοῦ Εὐκλείδου, ἦσαν πράγματι πολὺ ὀλίγον ἐνδεδειγμένα διὰ νὰ τὸν παρακινήσουν ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, ποὺ εὑρίσκοντο εἰς τὴν ἡμερησίαν διάταξιν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς χρυσῆς περιόδου τῆς ἰταλικῆς ἀλγέβρας. Παρέμεινε λοιπὸν πιστὸς ὀπαδὸς τῆς κατευθύνσεως ἐκείνης, τὴν ὁποίαν, ὅπως εἴδομεν (Τόμος I, §§ 86, 87), ἠκολούθησαν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνός, θεωρήσας ἄξιον τοῦ κόπου νὰ μελετήσῃ τὰς ἀριθμητικὰς σειρὰς (τετραγώνων, κύβων, πολυγώνων κλπ.) ποὺ ἐξήτασαν ἐκεῖνοι, εἰς τὰς ὁποίας προσέθεσε μόνον μερικὰς νέας ἰδιότητας. Ἀλλὰ πρόκειται περὶ ἁπλῶν ἀθυρμάτων, τὰ ὁποῖα οἱ μεταγενέστεροι ἐτοποθέτησαν εἰς τὴν βιτρίναν τῶν περιέργων ἀντικειμένων, καὶ τὰ ὁποῖα, συνεπῶς, οὐδεμίαν οὐσιαστικὴν συμβολὴν προσφέρουν εἰς τὴν αὔξησιν τῆς φήμης ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἀντιθέτως τόσην φήμην ἀπέκτησεν ἐκ τῆς γονίμου μελέτης τῶν ἔργων ποὺ ἔγραψαν οἱ γεωμέτραι τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος.

259. Ὁ ἄλλος σημαντικὸς ἰταλὸς διανοούμενος, περὶ τοῦ ὁποίου ἐγένετο νύξις προηγουμένως (§ 256), εἶναι ὁ Φρειδερῖκος Κομμαντῖνος (Federigo Commandino). Ἐγεννήθη εἰς Urbino τὸ 1509. Ἐπὶ μίαν δεκαετίαν ἐσπούδαζεν εἰς τὴν Padova καὶ κατόπιν εἰς τὴν Ferrara, ὅπου καὶ ἔλαβε τὸν τίτλον διδάκτορος τῆς ἰατρικῆς. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν, ἀνῆλθε ταχέως τὰς βαθμίδας τῆς φήμης, λόγῳ τῆς εὐφυΐας καὶ τῶν γνώσεών του. Ἔζησεν ἐπί τινα χρόνον εἰς Ρώμην, ὑπὸ τὴν εὐεργετικὴν σκιὰν τοῦ παπικοῦ θρόνου, ἀλλ' ἀπέθανε τὸ 1565 εἰς τὴν πόλιν τῆς γεννήσεώς του. Ἠνάλωσεν ὅλην του τὴν ζωὴν εἰς σχολιασμοὺς καὶ δημοσιεύσεις τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων γεωμετρῶν, ἀναδειχθεὶς ἄριστος γνώστης τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης, προικισμένος μὲ ὀξεῖαν κριτικὴν ἀντίληψιν καὶ μαθηματικὴν διάνοιαν.

Μεταξὺ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ποὺ ἐξέδωσεν ὁ Κομμαντῖνος θὰ μνημονεύσωμεν τὸ Περὶ ὀχουμένων, διότι ἐξ αὐτοῦ ἔλαβεν ἀφορμὴν ὁ τελευταῖος νὰ προβῇ εἰς προσδιορισμοὺς κέντρων βάρους, ἀναλόγους πρὸς ἐκείνους ποὺ διεξήγαγεν ὁ Μαυρόλυκος (μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Κομμαντῖνος διετήρει ἐγκάρδιον καὶ γόνιμον ἐπιστημονικὴν ἀλληλογραφίαν), εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα ἀφιέρωσεν ἕνα μακρὸν ἔργον του De centro gravitatis solidorum (Περὶ κέντρου βάρους στερεῶν), ὅπου, ἐκτὸς μερικῶν ἐξαγομένων ἐντελῶς νέων, θαυμάζεται τὸ ὕφος, διὰ τὴν ἀναλογίαν του πρὸς ἐκεῖνο τῶν κορυφαίων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος. Τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου βάρους τῆς πυραμίδος εἶχεν, ὅπως καὶ ὁ μαθηματικὸς τῆς Μεσσήνης, πρόδρομον τὸν Λεονάρδον ντὰ Βίντσι, δὲν μειώνει τὴν ἀξίαν τοῦ εὑρήματος, διότι ὁ ἀναγνώστης πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του ὅτι ἦτο τότε πολὺ μακρὰν ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἡρμηνεύθησαν τὰ πολύτιμα σημειωματάρια ποὺ ἄφησεν ὁ διάσημος ζωγράφος - ἐπιστήμων.

Εἰς τὸν Κομμαντῖνον ὀφείλεται ἐπίσης ἡ τιμή, ὅτι ἐδημοσίευσεν εἰς λατινικὴν καὶ ἰταλικὴν γλῶσσαν μίαν ἀναμόρφωσιν, τὴν ὁποίαν εἶχε κάμει ὁ Maometto di Bagdad (Τόμος I, § 153), τοῦ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου Περὶ διαιρέσεως τῶν σχημάτων (Τόμος I, § 38). Ἀντίγραφον τοῦ χειρογράφου τοῦ ὑφισταμένου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην Cotton τοῦ Λονδίνου ἐκομίσθη εἰς Urbino ὑπὸ τοῦ John Dee (γεννηθέντος εἰς Λονδῖνον 13 Δεκεμβρίου 1527, ἀποθανόντος εἰς Mortlke τὸ 1608), ὁ ὁποῖος, γνωρίζων τὴν γλῶσσαν τοῦ κειμένου, ἐβοήθησε τὸν Κομμαντῖνον εἰς τὴν μεταφοράν του εἰς τὴν λατινικήν.

Ὀφείλονται ἀκόμη εἰς αὐτὸν ἄρισται λατινικαὶ μεταφράσεις τοῦ μοναδικοῦ περισωθέντος ἔργου τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (Τόμος I, § 65), ὡς καὶ τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς τοῦ Πάππου (Τόμος I, § 56). Ἀλλὰ δὲν θὰ παρασιωπήσωμεν τὴν μεγάλην τιμὴν ποὺ τοῦ ὀφείλεται διὰ

τὰς ἀλλεπαλλήλους ἐκδόσεις, τὰς ὁποίας ἐπεξειργάσθη, τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὑπὸ λατινικὴν καὶ ἰταλικὴν μετάφρασιν.

260. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν κατάλογον τῶν ἔργων εὐρυμαθείας τοῦ Κομμαντίνου καὶ μερικὰ ἔργα τοῦ Ἥρωνος, ἀλλὰ δικαιούμεθα νὰ μὴν τὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ἀφοῦ δὲν ἀφοροῦν τὴν ἐπιστήμην, τῆς ὁποίας ἱστοροῦμεν τὴν ἀνάπτυξιν. Παρὰ ταῦτα θεωροῦμεν ὑποχρέωσιν νὰ σταματήσωμεν εἰς ἕνα τελευταῖον, διότι μὲ τὸ ἔργον αὐτὸ ἐπισημαίνεται ἡ μεταβίβασις τῆς προοπτικῆς ἀπὸ τὰς χεῖρας τῶν ζωγράφων εἰς τὰς χεῖρας τῶν γεωμετρῶν. Ὁμιλοῦμεν δι' ἕνα τόμον, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Κομμαντῖνος περισυνέλεξε τὴν λατινικὴν μετάφρασιν τοῦ πτολεμαϊκοῦ ἔργου «Ἄπλωσις ἐπιφανείας» (Planisfero) (Τόμος I, § 71)*, τὴν κοσμογραφίαν τοῦ Jordanus Nemorarius (Τόμος I, § 170), καὶ τὰ ἰδικά του σχόλια. Ἀλλὰ τὸ ἔργον τοῦ διασήμου ἕλληνος ἀστρονόμου περιλαμβάνει, ὅπως εἶναι γνωστόν, τὰ θεμέλια τῆς μεθόδου (τῆς λεγομένης σήμερον μὲ τὸ ὄνομα «στερεογραφικὴ προβολή»), ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται πρὸς παράστασιν τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς διὰ κεντρικῆς προβολῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ πόλου ἐπὶ τὸ ἰσημερινὸν ἐπίπεδον. Τὰ σχόλια ὅμως τοῦ σοφοῦ τοῦ Urbino ἀποτελοῦν μίαν σύνοψιν τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῆς κεντρικῆς προβολῆς, γραφεῖσαν μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐξασφαλισθοῦν στερεαὶ βάσεις εἰς τὴν μέθοδον αὐτὴν παραστάσεως τῶν σχημάτων τοῦ χώρου. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ὑποθέτει ὅτι ἀναφέρει τὰ θεωρούμενα σχήματα, ἐπὶ δύο ἐπιπέδων ὀρθογωνίως διακειμένων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ὁριζόντιον καὶ τὸ ἄλλο, ἑπομένως, κατακόρυφον, ἐκλέγει δὲ ὡς πίνακα (ἐπίπεδον προβολῆς) ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' ἀμφότερα, κατακλινόμενον ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ περιστροφῆς 90^0. Ὡς κέντρον προβολῆς λαμβάνεται σημεῖον κείμενον ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Βάσει τοιούτων συμβάσεων ὁ Κομμαντῖνος ἐδίδαξε πῶς κατασκευάζεται ἡ προοπτικὴ ἑνὸς σημείου, καὶ ἀπέδειξε πῶς ἀπορρέει ἐξ αὐτοῦ μία μέθοδος πρὸς χάραξιν τῶν προοπτικῶν τῶν κύκλων μιᾶς σφαίρας. Τοιουτοτρόπως, ἀπὸ ἀνεξάρτητον πνεῦμα, μετεβλήθη εἰς σχολιαστὴν τῆς ἑλληνικῆς σκέψεως.

Καθῆκον τοῦ ἱστορικοῦ εἶναι νὰ σημειώσῃ ὅτι τὸ κείμενον αὐτὸ τοῦ Κομμαντίνου δὲν ἔτυχεν ἐπιδοκιμασίας ἐκ μέρους τῶν καλλιτεχνῶν, οἱ ὁποῖοι ἔκρινον τοῦτο ὡς ἀσαφὲς καὶ ἀτελές. Πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ἀπαιτήσεών των, ἀντεπεξῆλθεν ὁ Daniele Barbaro, πατριάρχης τῆς Aquilija (γεννηθεὶς τὴν 8 Φεβρουαρίου 1513 εἰς Βενετίαν καὶ ἀποθανὼν ἐκεῖ τὴν 12 Ἀπριλίου 1570), μὲ ἕνα τόμον φέροντα τίτλον: La pratica della prospettiva : opera molto profitevole a pittori, scultori et architetti (Ἡ πρακτικὴ τῆς προοπτι-

---

* Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕνα σύστημα μαζὶ μὲ τὸ φέρον τὸν τίτλον Ἀνάλημμα (ὀρθὴ προβολή) τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, τὸ ὁποῖον ἐπίσης μετεφράσθη εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Κομμαντίνου.

κῆς: ἔργον χρησιμώτατον εἰς ζωγράφους, γλύπτας καὶ ἀρχιτέκτονας, Βενετία, 1559). Τὸ βιβλίον ἐγράφη μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Giovanni Zamberti (ὁ ὁποῖος μᾶς εἶναι ἤδη γνωστὸς ὡς ἐκδότης τοῦ Εὐκλείδου) καὶ στηρίζεται κατὰ μέγα μέρος ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ μας παρομοίου ἔργου τοῦ Pier della Francesca (Τόμος I, § 187).

Μετὰ τὸν Barbaro, ἄλλος ἀσχοληθεὶς μὲ τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον εἶναι ἕνας ἀρχιτέκτων μεγάλης φήμης, ὁ Jacopo Barozzi (γεννηθεὶς εἰς Vignola τὴν 1 Ὀκτωβρίου 1507, ἀποθανὼν εἰς Ρώμην τὴν 7 Ἰουλίου 1573).Τὸ ἔργον του Le due regole della prospettiva pratica (Οἱ δύο κανόνες τῆς πρακτικῆς προοπτικῆς), ἀφοῦ ἐκυκλοφόρησεν ἐπὶ μακρὸν ὡς χειρόγραφον καὶ ὑπέστη διαφόρους σημαντικὰς βελτιώσεις, ἐδημοσιεύθη τελικῶς εἰς τὴν Ρώμην τὸ 1582 τῇ φροντίδι τοῦ Egnatio Danti (1537-1586). Τὸ ἔργον στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ Πίναξ εἶναι κατακόρυφος καὶ ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ διαστήματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν του προβολὴν καὶ τὸ ὑψόμετρόν του. Τεραστία ὑπῆρξεν ἡ ἐπιτυχία τοῦ βιβλίου. Τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ διεδόθη εἰς ὅλον τὸν κόσμον, μεταφρασθὲν εἰς τὴν γαλλικήν, ἀγγλικήν, γερμανικήν, λατινικήν, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ρωσσικὴν γλῶσσαν. Τί πέραν τούτου; Ἐὰν ἡ φήμη δὲν ψεύδεται, ὁ Μέγας Πέτρος δὲν ἐθεώρησεν ἀνάξιον ἑαυτοῦ ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὸ βιβλίον κατὰ τὰς ὥρας τῆς σχολῆς του καὶ μάλιστα νὰ τὸ σχολιάσῃ.

G. B. Benedetti

261. Ὅτι τὸ ἐνδιαφέρον πρὸς τὴν προοπτικὴν ἦτο ζωηρὸν εἰς ὅλους τοὺς κύκλους ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἕνα ἔργον κάποιου βενετοῦ πατρικίου, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη ὡς μαθητὴν τοῦ Tartaglia (§ 234). Φαίνεται ὅτι, παρὰ τὰ δημοσιεύματα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν προηγουμένως, εἰς τοὺς καλλιτεχνικοὺς κύκλους ἐχρησιμοποιοῦντο μέθοδοι ὁδηγοῦσαι εἰς ἐσφαλμένην παράστασιν τῶν σχημάτων τοῦ χώρου, καὶ ἀκριβῶς πρὸς ἐπιβολὴν ἑνὸς φραγμοῦ εἰς τὴν εὐρυτέραν διάδοσιν αὐτῶν, ὁ Benedetti ἔγραψε τὸ δεύτερον μέρος τοῦ γνωστοῦ μας ἔργου του Diversarum speculationum liber. Μὲ τὰς διορθώσεις ποὺ ἐπρότεινεν εἰς τὰς ἐν χρήσει μεθόδους συνηντήθη μὲ τὸν Danti. Ἀλλὰ σημειοῦται, πρὸς ἔπαινόν του, ὅτι ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ καταστήσῃ διαυγεστέραν τὴν ἔκθεσιν, δίδει εἰς ἕκαστον πρόβλημα σχηματικὴν καὶ πραγματικὴν παράστασιν τοῦ ἀντικειμένου.

Ὁ προσανατολισμὸς τοῦ Benedetti πρὸς τὴν γεωμετρίαν, μαρτυρούμενος ἀπὸ τὰς σελίδας ποὺ ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω, καταφαίνεται μὲ πολὺ ζωηροτέραν λάμψιν εἰς ἕνα μικρὸν ἔργον του, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν, ὅταν ἀκόμη ἦτο περίπου εἰκοσαετής. Σκοπὸς καὶ περιεχόμενον αὐτοῦ προδίδονται σαφῶς ἀπὸ τὸν τίτλον: Resolutio omnium Euclidis problematum

κῆς: ἔργον χρησιμώτατον εἰς ζωγράφους, γλύπτας καὶ ἀρχιτέκτονας, Βενετία, 1559). Τὸ βιβλίον ἐγράφη μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Giovanni Zamberti (ὁ ὁποῖος μᾶς εἶναι ἤδη γνωστὸς ὡς ἐκδότης τοῦ Εὐκλείδου) καὶ στηρίζεται κατὰ μέγα μέρος ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ μας παρομοίου ἔργου τοῦ Pier della Francesca (Τόμος I, § 187).

Μετὰ τὸν Barbaro, ἄλλος ἀσχοληθεὶς μὲ τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον εἶναι ἕνας ἀρχιτέκτων μεγάλης φήμης, ὁ Jacopo Barozzi (γεννηθεὶς εἰς Vignola τὴν 1 Ὀκτωβρίου 1507, ἀποθανὼν εἰς Ρώμην τὴν 7 Ἰουλίου 1573).Τὸ ἔργον του Le due regole della prospettiva pratica (Οἱ δύο κανόνες τῆς πρακτικῆς προοπτικῆς), ἀφοῦ ἐκυκλοφόρησεν ἐπὶ μακρὸν ὡς χειρόγραφον καὶ ὑπέστη διαφόρους σημαντικὰς βελτιώσεις, ἐδημοσιεύθη τελικῶς εἰς τὴν Ρώμην τὸ 1582 τῇ φροντίδι τοῦ Egnatio Danti (1537-1586). Τὸ ἔργον στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ Πίναξ εἶναι κατακόρυφος καὶ ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ διαστήματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν του προβολὴν καὶ τὸ ὑψόμετρόν του. Τεραστία ὑπῆρξεν ἡ ἐπιτυχία τοῦ βιβλίου. Τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ διεδόθη εἰς ὅλον τὸν κόσμον, μεταφρασθὲν εἰς τὴν γαλλικήν, ἀγγλικήν, γερμανικήν, λατινικήν, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ρωσσικὴν γλῶσσαν. Τί πέραν τούτου; Ἐὰν ἡ φήμη δὲν ψεύδεται, ὁ Μέγας Πέτρος δὲν ἐθεώρησεν ἀνάξιον ἑαυτοῦ ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὸ βιβλίον κατὰ τὰς ὥρας τῆς σχολῆς του καὶ μάλιστα νὰ τὸ σχολιάσῃ.

G. B. Benedetti

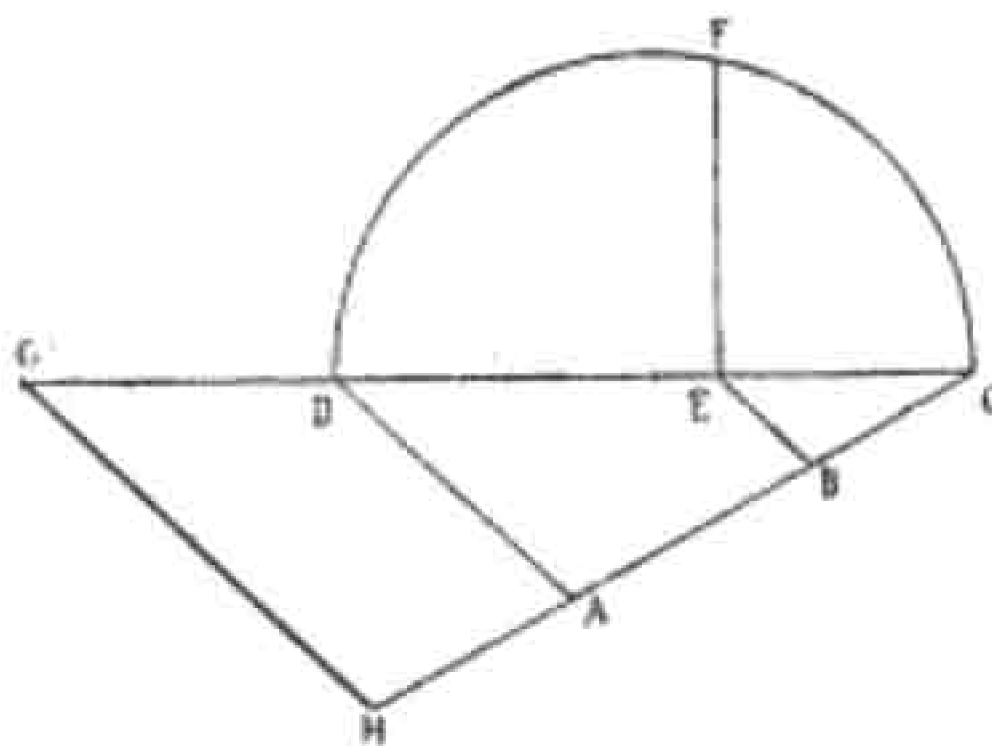
261. Ὅτι τὸ ἐνδιαφέρον πρὸς τὴν προοπτικὴν ἦτο ζωηρὸν εἰς ὅλους τοὺς κύκλους ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἕνα ἔργον κάποιου βενετοῦ πατρικίου, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη ὡς μαθητὴν τοῦ Tartaglia (§ 234). Φαίνεται ὅτι, παρὰ τὰ δημοσιεύματα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν προηγουμένως, εἰς τοὺς καλλιτεχνικοὺς κύκλους ἐχρησιμοποιοῦντο μέθοδοι ὁδηγοῦσαι εἰς ἐσφαλμένην παράστασιν τῶν σχημάτων τοῦ χώρου, καὶ ἀκριβῶς πρὸς ἐπιβολὴν ἑνὸς φραγμοῦ εἰς τὴν εὐρυτέραν διάδοσιν αὐτῶν, ὁ Benedetti ἔγραψε τὸ δεύτερον μέρος τοῦ γνωστοῦ μας ἔργου του Diversarum speculationum liber. Μὲ τὰς διορθώσεις ποὺ ἐπρότεινεν εἰς τὰς ἐν χρήσει μεθόδους συνηντήθη μὲ τὸν Danti. Ἀλλὰ σημειοῦται, πρὸς ἔπαινόν του, ὅτι ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ καταστήσῃ διαυγεστέραν τὴν ἔκθεσιν, δίδει εἰς ἕκαστον πρόβλημα σχηματικὴν καὶ πραγματικὴν παράστασιν τοῦ ἀντικειμένου.

Ὁ προσανατολισμὸς τοῦ Benedetti πρὸς τὴν γεωμετρίαν, μαρτυρούμενος ἀπὸ τὰς σελίδας ποὺ ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω, καταφαίνεται μὲ πολὺ ζωηροτέραν λάμψιν εἰς ἕνα μικρὸν ἔργον του, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν, ὅταν ἀκόμη ἦτο περίπου εἰκοσαετής. Σκοπὸς καὶ περιεχόμενον αὐτοῦ προδίδονται σαφῶς ἀπὸ τὸν τίτλον: Resolutio omnium Euclidis problematum

aliorumque ad hoc necessario inventorum una tantummodo circini data apertura[1] (Venetiis, 1553) Τοῦ βιβλίου τούτου ἐπωφελήθη ἀσφαλῶς ὁ Tartaglia ὅταν ἔγραψε τὰς ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου σελίδας τοῦ Μέρους V τοῦ General Trattato (§ 224). Ἄξιον σημειώσεως εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι τόσον ὁ Benedetti ὅσον καὶ ὁ Tartaglia δὲν ἐπρόσεξαν τὴν σημαντικὴν λεπτομέρειαν ὅτι, ἐνῷ λύονται μὲ τὸν τιθέμενον περιορισμὸν (ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου) μερικὰ προβλήματα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὑπόλοιπα οὐδεμίαν ἀνάγκην ἔχουν εἰσαγωγῆς αὐτῆς τῆς καινοτομίας εἰς ὅσα ἔγραψεν ὁ μέγας μαθηματικὸς τῆς Ἀλεξανδρείας.

Ὁ σκοπὸς εἰς τὸν ὁποῖον ἀπέβλεπεν ὁ νεαρὸς γεωμέτρης δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἐπετεύχθη πλήρως. Δὲν θ' ἀναφέρωμεν τὰς λύσεις τῶν 54 προβλημάτων ποὺ πραγματεύεται, οὔτε τὰς ἐκφωνήσεις των (ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ληφθεισῶν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην). Θὰ σημειώσωμεν μόνον, ὅτι αἱ ἀντιμετωπισθεῖσαι δυσχέρειαι διαφαίνονται ἀπὸ τοὺς θαυμασίους λόγους, μὲ τοὺς ὁποίους συνοδεύεται ἡ κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου μὲ δεδομένας πλευράς: «Et contra illos omnes eccellentissimos mathematicos, priscos, modernos que, qui dixerunt impossible esse hoc problema alio modo concludi, quam ut docet XXII primi Euclidis, ergo vero deo dante labente Anno Divinae incarnationis MDLII Die XV octobris illud inveni»[2].

Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέαν τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν ὁ Benedetti, κατ' ἀπόκλισιν πρὸς ἐκείνας ποὺ ἐδίδαξεν ὁ Εὐκλείδης, θ' ἀναφέρωμεν τὴν ἀκόλουθον κατασκευὴν τῆς μέσης ἀναλόγου μεταξὺ δύο δοθέντων μηκῶν AB, BC (σχ. 7).



Σχ. 7

Φέρομεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ἐκ τοῦ C τὸ τμῆμα CD ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀνοίγματος τοῦ διαβήτου. Ἑνώνομεν τὰ A καὶ D καὶ φέρομεν τὴν BE παράλληλον πρὸς τὴν AD. Γράφομεν ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον CD, ἄγομεν τὴν EF κάθετον ἐπὶ τὴν CD καὶ φέρομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς CD, DG = EF. Ἡ παράλληλος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ G πρὸς τὴν AD κόπτει τὴν εὐθεῖαν AB εἰς H. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AH εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

262. Αἱ ρόδιναι προβλέψεις διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν σταδιοδρομίαν τοῦ Benedetti, ὅπως διεγράφοντο ἀπὸ τὸ δημοσίευμα, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἐδικαιώθησαν, ὅπως ἀπο-

δεικνύεται ἀπὸ τὴν εὔνοιαν, τὴν ὁποίαν κατέκτησεν εἰς δύο βασιλικοὺς οἴκους τῆς Ἰταλίας. Ἦτο μία ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ μαθηματικὰ ἔτειναν ν' ἀνακτήσουν τὸ γόητρον ἐκεῖνο, ποὺ εἶχον εἰς τὴν ἀρχαιότητα, καὶ διαρκῶς ἐγενικεύετο ἡ πεποίθησις, ὅτι οἱ ἄνθρωποι τῶν ὅπλων, ὅπως καὶ οἱ κατασκευασταὶ μηχανῶν καὶ κτιρίων, ἔπρεπε νὰ προστρέχουν εἰς τοὺς ἀνθρώπους τῆς ἐπιστήμης πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἀνεφύοντο συχνὰ εἰς τὴν καθημερινὴν ἐργασίαν των.

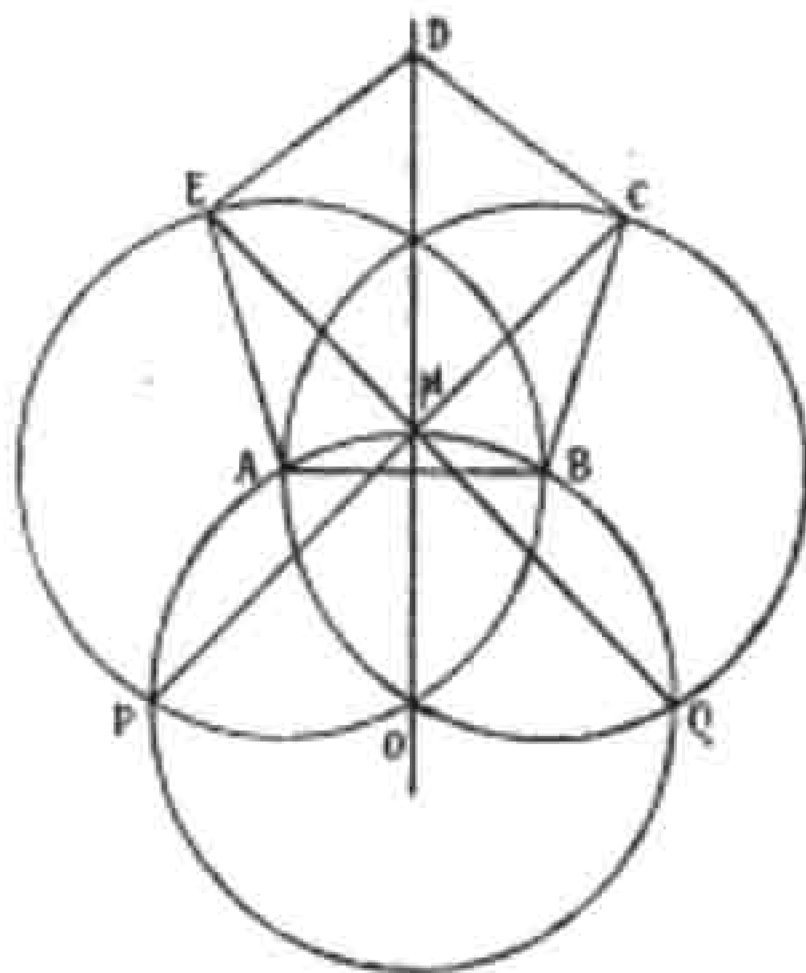
Τοῦ γεγονότος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ὁ ἱστορικὸς ὀφείλει νὰ ἐπισημάνῃ, ἐπανειλημμένας ἀποδείξεις εὑρίσκωμεν εἰς πολλὰς σελίδας τοῦ βιβλίου «Διάφοροι ἔρευναι καὶ ἐφευρέσεις» τοῦ Tartaglia (§ 213). Ἄλλαι ἀποδείξεις συνάγονται ἀπὸ διάφορα χωρία τοῦ ἔργου τοῦ Benedetti «Διαφόρων στοχασμῶν Βίβλος» (§ 261), ὅπου ἀνὰ πᾶν βῆμα ἀπαντῶνται ἄρθρα ἀνταποκρινόμενα εἰς ζητήματα ποὺ ἐπροτάθησαν εἰς τὸν συγγραφέα ὑπὸ προσώπων προερχομένων ἐκ διαφόρων κοινωνικῶν τάξεων. Εὑρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς ἐξονυχιστικὰς λεπτομερείας, περιοριζόμεθα μόνον εἰς τὸ νὰ δώσωμεν μερικὰς νύξεις.

Θὰ σημειώσωμεν προπάντων τὰς παρατηρήσεις τοῦ Benedetti ἐπὶ τοῦ Βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου (πιθανῶς προερχομένας ἐκ τῶν μαθημάτων τοῦ ἰδίου πρὸς τοὺς δούκας τῆς Σαβοΐας Emanuele Filiberto καὶ Carlo Emanuele), διότι αἱ ἐν λόγῳ παρατηρήσεις ἀντιπροσωπεύουν τὴν ἀρχὴν μιᾶς σειρᾶς ἡμιφιλοσοφικῶν ἔργων ἐπὶ τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν, τῶν ὁποίων θὰ ὑποδείξωμεν ἐν συνεχείᾳ τὰ κυριώτερα στοιχεῖα.

Ἀξία μνείας εἶναι ἐπίσης μία ἐπιτυχὴς λύσις τοῦ προβλήματος τῆς κατασκευῆς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου μὲ δεδομένας πλευράς, προβλήματος εὑρισκομένου τότε εἰς τὴν ἡμερησίαν διάταξιν, ὡς ἐπίσης μία κατασκευὴ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $(a + x)x = b^2$, ἐξ ἀφορμῆς τῆς ὁποίας οἱ M. Chasles καὶ G. Libri ἐθεώρησαν τὸν Benedetti (ἀβασίμως καθ' ἡμᾶς) ὡς πρόδρομον τοῦ Descartes εἰς τὴν ἐπινόησιν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας.

Μακρότερον σχολιασμὸν ἀπαιτεῖ ἐκ μέρους μας μία ἀξιόλογος συμπλήρωσις, δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ Benedetti, εἰς μίαν κατασκευὴν ποὺ ἐπενόησεν ὁ Dürer (δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ ἔργον του τὸ ἀναφερόμενον εἰς § 189 τοῦ Τόμου I) διὰ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον δοθείσης πλευρᾶς AB (σχ. 8). Ἡ συμβολὴ τοῦ Benedetti συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς: Ἂς γραφοῦν αἱ περιφέρειαι ἀκτῖνος AB μὲ κέντρα A καὶ B. Ἔστω O μία τῶν τομῶν. Ἂς γραφῇ ἀκόμη μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα ἡ περιφέρεια κέντρου O καὶ ἂς προσδιορισθοῦν αἱ τομαὶ P καὶ Q μὲ τὰς δύο προηγουμένας. Ἔστω M τὸ μέσον τοῦ τόξου τῆς περιφερείας αὐτῆς, τοῦ ὑποτεινομένου ὑπὸ τῆς χορδῆς AB. Ἔστωσαν δὲ περαιτέρω C, E αἱ τομαὶ τῶν εὐθειῶν PM καὶ QM μὲ τὰς πρώτας περι-

φερείας. Γεννᾶται οὕτω ἡ ἀνοικτὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ EABC, τὴν ὁποίαν εἶναι εὔκολον νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ἰσόπλευρον πεντάγωνον. Γεννᾶται τώρα φυσικῶς τὸ ἐρώτημα: εἶναι τὸ ἐν λόγῳ πεντάγωνον καὶ ἰσογώνιον; Ὁ Benedetti ἀπαντᾷ ἀρνητικῶς εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο, ἀποδεικνύων ὅτι ἐνῷ ὅλαι αἱ γωνίαι κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν τιμὴν τῶν 108°, τῆς γωνίας D τὸ μέγεθος εἶναι 109° 12′, τῶν γωνιῶν εἰς E καὶ C 107° 7′ καὶ τῶν γωνιῶν εἰς A καὶ B 108° 22′. Τὸ πεντάγωνον τοῦ Dürer δὲν εἶναι λοιπὸν κανονικόν, ἀλλὰ κατὰ θαυμαστὴν μόνον προσέγγισιν τοιοῦτον*.



Σχ. 8

Δὲν πρέπει νὰ τελειώσωμεν μὲ τὸν γεωμέτρην, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, χωρὶς προηγουμένως νὰ κάμωμεν ἔστω καὶ ἁπλῆν μνείαν τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ ἱστορικοὶ τῆς μηχανικῆς ἔχουν καθιερώσει δι' αὐτὸν μίαν θέσιν μεταξὺ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι, πρὸ τοῦ Γαλιλαίου, ἠσχολήθησαν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν κινήσεων καὶ τῶν δυνάμεων.

Guidobaldo del Monte

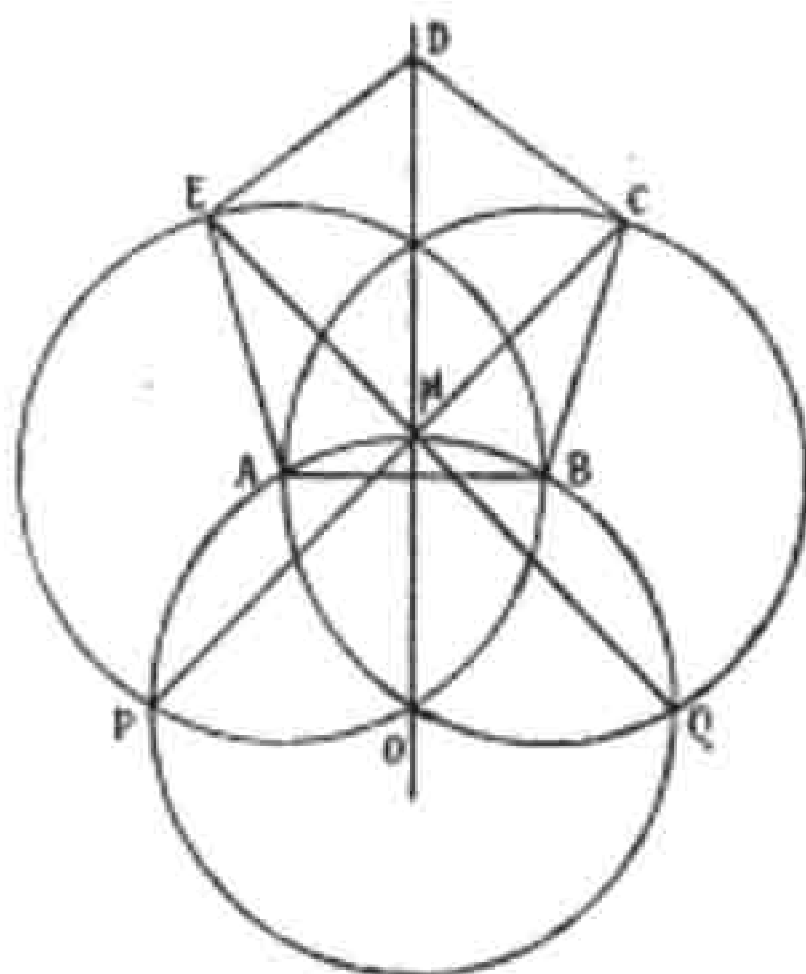
263. Ἐπιστρέφομεν τώρα εἰς τὴν προοπτικήν, διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ σημαντικωτέρα πρόοδος ἡ συντελεσθεῖσα εἰς τὸν κλάδον αὐτὸν κατὰ τὸν XVI αἰῶνα ὀφείλεται εἰς τὸν Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte. Ὁ διακεκριμένος αὐτὸς ἐπιστήμων ἐγεννήθη εἰς Pesaro τὴν 11 Ἰανουαρίου 1545 ἀπὸ μίαν τῶν διασημοτέρων οἰκογενειῶν τῆς ἐποχῆς του. Εἰς τὸ Urbino εἶχεν ὡς διδάσκαλον τὸν Κομμαντῖνον. Ἐσπούδασεν ἐπίσης εἰς τὴν Padova καὶ κατόπιν ἐγκατέλειψε τὴν Ἰταλίαν διὰ νὰ πολεμήσῃ κατὰ τῶν Τούρκων. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν πατρίδα, ἀφωσιώθη εἰς μελέτας, τῶν ὁποίων ἡ ἔντασις καὶ οἱ καρποὶ κατοπτρίζονται εἰς τὰ ἀκόλουθα συγγράμματα:

Mechanicorum liber (Pesaro, 1577). Planisphaeriorum theorica (Pesaro, 1579). In duos Archimedes libros aequiponder. Paraphrasis (Pesaro, 1588).

---

* Ὁ Κλάβιος, ἀναθεωρήσας ὀλίγον ἔπειτα τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ Benedetti, εὗρεν ὅτι πρέπει νὰ ἐλαττωθοῦν κατὰ 20′ αἱ γωνίαι τῶν 107°7′ καὶ ν' αὐξηθοῦν κατὰ 40′ αἱ γωνίαι τῶν 108°22′.

φερείας. Γεννᾶται οὕτω ἡ ἀνοικτὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ EABC, τὴν ὁποίαν εἶναι εὔκολον νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ἰσόπλευρον πεντάγωνον. Γεννᾶται τώρα φυσικῶς τὸ ἐρώτημα: εἶναι τὸ ἐν λόγῳ πεντάγωνον καὶ ἰσογώνιον; Ὁ Benedetti ἀπαντᾷ ἀρνητικῶς εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο, ἀποδεικνύων ὅτι ἐνῷ ὅλαι αἱ γωνίαι κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν τιμὴν τῶν 108°, τῆς γωνίας D τὸ μέγεθος εἶναι 109° 12′, τῶν γωνιῶν εἰς E καὶ C 107° 7′ καὶ τῶν γωνιῶν εἰς A καὶ B 108° 22′. Τὸ πεντάγωνον τοῦ Dürer δὲν εἶναι λοιπὸν κανονικόν, ἀλλὰ κατὰ θαυμαστὴν μόνον προσέγγισιν τοιοῦτον*.



Σχ. 8

Δὲν πρέπει νὰ τελειώσωμεν μὲ τὸν γεωμέτρην, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, χωρὶς προηγουμένως νὰ κάμωμεν ἔστω καὶ ἁπλῆν μνείαν τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ ἱστορικοὶ τῆς μηχανικῆς ἔχουν καθιερώσει δι᾽ αὐτὸν μίαν θέσιν μεταξὺ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι, πρὸ τοῦ Γαλιλαίου, ἠσχολήθησαν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν κινήσεων καὶ τῶν δυνάμεων.

Guidobaldo del Monte

263. Ἐπιστρέφομεν τώρα εἰς τὴν προοπτικήν, διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ σημαντικωτέρα πρόοδος ἡ συντελεσθεῖσα εἰς τὸν κλάδον αὐτὸν κατὰ τὸν XVI αἰῶνα ὀφείλεται εἰς τὸν Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte. Ὁ διακεκριμένος αὐτὸς ἐπιστήμων ἐγεννήθη εἰς Pesaro τὴν 11 Ἰανουαρίου 1545 ἀπὸ μίαν τῶν διασημοτέρων οἰκογενειῶν τῆς ἐποχῆς του. Εἰς τὸ Urbino εἶχεν ὡς διδάσκαλον τὸν Κομμαντῖνον. Ἐσπούδασεν ἐπίσης εἰς τὴν Padova καὶ κατόπιν ἐγκατέλειψε τὴν Ἰταλίαν διὰ νὰ πολεμήσῃ κατὰ τῶν Τούρκων. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν πατρίδα, ἀφωσιώθη εἰς μελέτας, τῶν ὁποίων ἡ ἔντασις καὶ οἱ καρποὶ κατοπτρίζονται εἰς τὰ ἀκόλουθα συγγράμματα:

Mechanicorum liber (Pesaro, 1577). Planisphaeriorum theorica (Pesaro, 1579). In duos Archimedes libros aequiponder. Paraphrasis (Pesaro, 1588).

* Ὁ Κλάβιος, ἀναθεωρήσας ὀλίγον ἔπειτα τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ Benedetti, εὗρεν ὅτι πρέπει νὰ ἐλαττωθοῦν κατὰ 20′ αἱ γωνίαι τῶν 107°7′ καὶ ν᾽ αὐξηθοῦν κατὰ 40′ αἱ γωνίαι τῶν 108°22′.

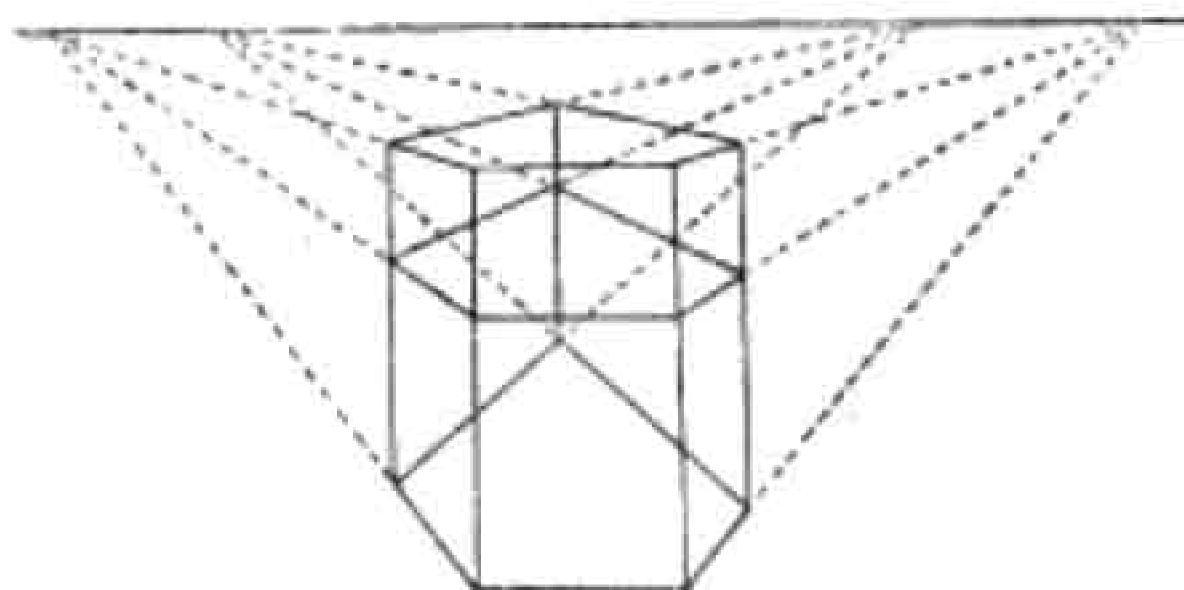
Τὸ πρῶτον τοποθετεῖ τὸν συγγραφέα μεταξὺ τῶν ἐξοχωτέρων ἐργατῶν τῆς μηχανικῆς ποὺ ἤκμασαν πρὸ τοῦ Γαλιλαίου*, ἐνῷ τὰ ὑπόλοιπα καταδεικνύουν ὅτι οὔτε ὁ del Monte ἠδυνήθη ν' ἀποφύγῃ τὴν γοητείαν, τὴν ὁποίαν ἤσκουν τότε οἱ μεγάλοι στοχασταὶ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, ἐφ' ὅλων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσουν τὴν ἀδιαφιλονίκητον ἀξίαν των. Κατόπιν τῆς μεγάλης φήμης, τὴν ὁποίαν ἀπέκτησεν ὁ del Monte ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συγγράμματα, ἡ Κυβέρνησις τῆς Τοσκάνης τοῦ ἐνεπιστεύθη (1588) τὸ ὑπούργημα τοῦ γενικοῦ ἐπιθεωρητοῦ τῶν φρουρίων. Συνέβη δὲ κατὰ τὴν διάρκειαν ὑπηρεσιακῆς του παραμονῆς εἰς Φλωρεντίαν νὰ γνωρισθῇ προσωπικῶς μὲ τὸν Γαλιλαῖον, τοῦ ὁποίου προεῖπε τὴν ραγδαίαν ἐξέλιξιν καὶ τὸν ὁποῖον ἐβοήθησεν εἰς δυσκόλους στιγμάς. Ὅταν παρητήθη ἀπὸ παντὸς εἴδους δημοσίαν ὑπηρεσίαν, ἐπέστρεψεν εἰς τὴν ἰδιαιτέραν του πατρίδα διὰ νὰ ἐπιδοθῇ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς μελέτας. Ἐκεῖ καὶ ἀπέθανε τὴν 6 Ἰανουαρίου 1607.

Δὲν εἶναι δυστυχῶς δυνατὸν νὰ ἐκθέσωμεν ἐδῶ ὁλόκληρον τὸ μαθηματικὸν ἔργον τοῦ del Monte. Θὰ περιορισθῶμεν νὰ ὁμιλήσωμεν διὰ τὸ σύγγραμμα, ποὺ φέρει τὸν τίτλον Perspectivae libri sex (Pisauri, 1600) καὶ ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ πολύτιμα κοσμήματα τῆς ἰταλικῆς μαθηματικῆς γραμματείας τοῦ XVI αἰῶνος. Διὰ νὰ σταθμίσωμεν τὴν ἀξίαν του, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποδεικνύεται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν γενικότητά του τὸ θεώρημα, ὅτι ἡ κεντρικὴ προβολὴ δέσμης εὐθειῶν παραλλήλων εἶναι δέσμη συντρεχουσῶν εὐθειῶν, γεγονὸς τοῦ ὁποίου τὴν ἀλήθειαν ἐδέχοντο μέχρι τότε ἐμπειρικῶς, καὶ τοῦ ὁποίου τὴν ἐξήγησιν δὲν εἶχον ἐπιχειρήσει. Ὅτι ἡ σπουδαιότης τοῦ θεωρήματος δὲν διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ συγγραφέως, ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἕνα σχέδιον τοποθετηθὲν εἰς τὴν πρώτην σελίδα τοῦ ἐξωφύλλου. Τὸ σχέδιον αὐτὸ ἀναπαριστῶμεν εἰς τὸ σχ. 9. Εἰς τὸ πρωτότυπον ἀνεγράφετο πλησίον τοῦ σχεδίου καὶ τὸ ρητὸν «citra dolum fallimur» (χωρὶς τὴν τέχνην ἀπατώμεθα). Ἀπὸ τὸ σχέδιον αὐτὸ προκύπτει ἀκόμη ὅτι ὁ del Monte ἀνεκάλυψεν ἐπίσης ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν διάφορα συστήματα εὐθειῶν παραλλήλων μεταξύ των καὶ παραλλήλων πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὰ σημεῖα συναντήσεώς των πίπτουν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἂς σημειωθῇ τέλος ὅτι ὁ ὑπ' αὐτοῦ τεθεὶς ὅρος «punctum concursus», δηλαδὴ σημεῖον συνδρομῆς ἢ φυγῆς, παρέμεινεν εἰς τὴν ἐπιστήμην.

Εἰς τὸ Βιβλίον II τοῦ ἰδίου συγγράμματος ἡ ἔννοια τοῦ σημείου φυγῆς ἐφαρμόζεται εἰς τὴν χάραξιν τῆς προοπτικῆς σχημάτων κειμένων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐπὶ πίνακος συνήθως κατακορύφου. Κατακλίνων αὐτὸν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὁ συγγραφεὺς ἐπιτυγχάνει τὴν κατασκευὴν

* Εἰς τὸ ἔργον αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι συντεταγμένον κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν ἀρχαίων, ὁ Lagrange εὗρεν ἴχνη τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ταχυτήτων.

τῆς προοπτικῆς ἐξ ὁλοκλήρου ἐπὶ τοῦ χάρτου σχεδιάσεως καὶ τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ὑπὸ 23 διαφόρους μορφάς. Ἐκ τούτων συνάγει τὴν λύσιν, εἴς τινας περιπτώσεις, τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος τῆς προοπτικῆς.



Σχ. 9

Εἰς τὸ Βιβλίον ΙΙΙ ἐξετάζει τὴν κατασκευὴν τῆς προοπτικῆς τῶν ὑψῶν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Συνάγει δ' ἐξ αὐτῆς τὰς ἀναλόγους κατασκευὰς εἰς σχήματα κατέχοντα τυχοῦσαν θέσιν εἰς τὸν χῶρον, χωρὶς μάλιστα τὸν περιορισμὸν τοῦ ζητήματος εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ πίναξ εἶναι ἐπίπεδος. Ἐκ τοῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου τούτου συνάγεται ὅτι, ὅταν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν προοπτικὴν ἑνὸς σημείου, μᾶς εἶναι ἐπαρκὲς καὶ ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὴν ὀρθὴν προβολήν του ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὑψόμετρον τοῦ σημείου. Εἰς τὸ ἑπόμενον Βιβλίον IV ὁ συγγραφεὺς ἀσχολεῖται μὲ τοὺς χειρισμοὺς τῶν στοιχείων τούτων καὶ ἀσυναισθήτως, μὲ τοὺς χειρισμοὺς αὐτούς, θέτει τὰς βάσεις τῆς μεθόδου τῶν ἠριθμημένων προβολῶν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου. Ὅτι ὅλα αὐτὰ εἶναι ἐπίσης χρήσιμα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν σκιῶν ἀποδεικνύεται εἰς τὸ Βιβλίον V, ἐνῷ τὸ τελευταῖον VI ἔχει χαρακτῆρα πρακτικὸν καὶ περιέχει τοὺς ἐφαρμοστέους κανόνας εἰς τὴν χάραξιν τῶν σκηνῶν τῶν θεάτρων.

Ἐξ ὅσων ἐλέχθησαν συνάγεται, ὅτι μὲ τὸν G. del Monte αἱ μέθοδοι ἀπεικονίσεως ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν σχημάτων τοῦ χώρου ἔφθασαν εἰς μίαν τόσον ὑψηλὴν στάθμην, ὥστε πολὺ ὀλίγα ἐχρειάζοντο ἀκόμη διὰ νὰ φθάσουν εἰς τὸ ὕψος, ὅπου εὑρίσκονται σήμερον. Ὅτι δὲ ὁ del Monte ἠκολούθησεν αὐστηρῶς ἐπιστημονικὴν ὁδόν, προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι εἰς τὸ ἔργον του ἀπαντῶνται μερικαὶ κατασκευαί, αἱ ὁποῖαι ἀνευρίσκονται εἰς τὸ περὶ ὁμολογίας κεφάλαιον τῶν συγχρόνων ἐγχειριδίων προβολικῆς γεωμετρίας.

Ἡ μεγάλη ἐκτίμησις, τὴν ὁποίαν ἔτρεφον πρὸς τὸν συγγραφέα οἱ σύγχρονοί του, ὤθησε μερικοὺς ἐκ τῶν θαυμαστῶν του ν' ἀναδιφήσουν προσεκτικὰ μεταξὺ τῶν καταλοίπων του, μὲ τὴν ἐλπίδα ν' ἀνεύρουν καμμίαν ἐργασίαν ἀξίαν νὰ ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος. Ἡ ἔρευνα πράγματι δὲν

ἀπέβη ματαία, ὅπως ἀπεδείχθη ἀπὸ τὰ δημοσιευθέντα, μετὰ τὸν θάνατόν του, ἔργα ὑπὸ τοὺς τίτλους: Problematum astronomicum Libri VI (Venetiis, 1609). De cochlea Libri sex (Venetiis, 1615).
Ὁ θερισμὸς ὑπῆρξε λοιπὸν πλούσιος. Παρὰ ταῦτα διέφυγε τῆς προσοχῆς τῶν ἐρευνητῶν μία ἐργασία ποικίλου περιεχομένου, γραφεῖσα εἰς τὴν ἰταλικήν, ἀλλὰ φέρουσα τὸν λατινικὸν τίτλον De rebus mathematicis. Τῆς ἐργασίας αὐτῆς ὑφίστανται ἀντίγραφα εἰς διαφόρους βιβλιοθήκας, ἕνα δὲ ἀπόσπασμά της ἐδημοσιεύθη ἀπὸ τὸν G. Libri*.

Τέλος, παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα τ' ἀποτελέσματα τῶν ἐπιμόνων μελετῶν τοῦ πνευματώδους μαρκησίου ἐπὶ τοῦ Βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου. Τούτων πρέπει ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ γνῶσιν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος θ' ἀναλάβῃ τὴν ἀξιέπαινον πρωτοβουλίαν νὰ γράψῃ μίαν ἱστορίαν πλήρη ὅλων τῶν σχολίων, ποὺ ἐγένοντο μέχρι σήμερον, εἰς τὸ βαθύτερον καὶ λεπτότερον ἐξ ὅλων τῶν βιβλίων, ποὺ ἔγραψεν ὁ ἀθάνατος ἀλεξανδρινὸς γεωμέτρης.

Ἡ προοπτικὴ εἰς τὴν Ὀλλανδίαν

264. Εἰς τὴν χώραν ποὺ κατέστησαν διάσημον οἱ Rubens καὶ van Dyck εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ζωγραφικῆς, δὲν ἐπανελήφθη τὸ φαινόμενον ποὺ εἴδομεν (Κεφ. XIV) ὅτι συνέβη εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπου αἱ ἐπιστημονικαὶ βάσεις τοῦ κλάδου τούτου τῆς τέχνης ἐτέθησαν ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐχειρίζοντο μὲ μαεστρίαν τὸν χρωστῆρα. Ἡ ὕπαρξις «σημείου φυγῆς» εἰς τὴν ἀπεικόνισιν δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν ἐδιδάσκετο εἰς τοὺς ζωγράφους τῆς Ὀλλανδίας ἀπὸ τὸν Sebastiano Serlio (1475-1552), συγγραφέα ἑνὸς μετρίου ἐγχειριδίου ἀρχιτεκτονικῆς μὴ στερουμένου σφαλμάτων.

Παρὰ ταῦτα τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ὀλλανδία ἔδωσαν εἰς τὴν προοπτικὴν ἀξιολόγους συμβολάς, κυρίως μὲ τὰς μελέτας τοῦ Simon Stevin, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 247) ὡς πρωτότυπον ἐπιστήμονα εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς. Εἰς τὸ ἔργον του Traité d' optique, ποὺ ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ Ἅ π α ν τ ά του, εὑρίσκεται ὡς Βιβλίον I, μία μελέτη καθαρῶς ἐπιστημονικὴ ἑνὸς κλάδου χαρακτηριζομένου ἐκεῖ ὡς «Σκηνογραφία, κοινῶς λεγομένη προοπτική». Ἀπαντᾶται εἰς τὸ κείμενον αὐτό, μεταξὺ ἄλλων, ἡ λύσις εἰς πολλὰς μερικὰς περιπτώσεις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίστροφον τοῦ θεμελιώδους προβλήματος τῆς προοπτικῆς: «Δοθέντων εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σχημάτων οἱωνδήποτε, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι προοπτικὸν τοῦ ἄλλου, ζητεῖται νὰ τοποθετηθοῦν ταῦτα εἰς τὸν χῶρον οὕτως,

* Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. IV (Paris 1846), σημ. VII, σελ. 369-398.

ἀπέβη ματαία, ὅπως ἀπεδείχθη ἀπὸ τὰ δημοσιευθέντα, μετὰ τὸν θάνατόν του, ἔργα ὑπὸ τοὺς τίτλους: Problematum astronomicum Libri VI (Venetiis, 1609). De cochlea Libri sex (Venetiis, 1615).
Ὁ θερισμὸς ὑπῆρξε λοιπὸν πλούσιος. Παρὰ ταῦτα διέφυγε τῆς προσοχῆς τῶν ἐρευνητῶν μία ἐργασία ποικίλου περιεχομένου, γραφεῖσα εἰς τὴν ἰταλικήν, ἀλλὰ φέρουσα τὸν λατινικὸν τίτλον De rebus mathematicis. Τῆς ἐργασίας αὐτῆς ὑφίστανται ἀντίγραφα εἰς διαφόρους βιβλιοθήκας, ἕνα δὲ ἀπόσπασμά της ἐδημοσιεύθη ἀπὸ τὸν G. Libri*.

Τέλος, παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα τ' ἀποτελέσματα τῶν ἐπιμόνων μελετῶν τοῦ πνευματώδους μαρκησίου ἐπὶ τοῦ Βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου. Τούτων πρέπει ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ γνῶσιν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος θ' ἀναλάβῃ τὴν ἀξιέπαινον πρωτοβουλίαν νὰ γράψῃ μίαν ἱστορίαν πλήρη ὅλων τῶν σχολίων, ποὺ ἐγένοντο μέχρι σήμερον, εἰς τὸ βαθύτερον καὶ λεπτότερον ἐξ ὅλων τῶν βιβλίων, ποὺ ἔγραψεν ὁ ἀθάνατος ἀλεξανδρινὸς γεωμέτρης.

Ἡ προοπτικὴ εἰς τὴν Ὀλλανδίαν

264. Εἰς τὴν χώραν ποὺ κατέστησαν διάσημον οἱ Rubens καὶ van Dyck εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ζωγραφικῆς, δὲν ἐπανελήφθη τὸ φαινόμενον ποὺ εἴδομεν (Κεφ. XIV) ὅτι συνέβη εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπου αἱ ἐπιστημονικαὶ βάσεις τοῦ κλάδου τούτου τῆς τέχνης ἐτέθησαν ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐχειρίζοντο μὲ μαεστρίαν τὸν χρωστῆρα. Ἡ ὕπαρξις «σημείου φυγῆς» εἰς τὴν ἀπεικόνισιν δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν ἐδιδάσκετο εἰς τοὺς ζωγράφους τῆς Ὀλλανδίας ἀπὸ τὸν Sebastiano Serlio (1475-1552), συγγραφέα ἑνὸς μετρίου ἐγχειριδίου ἀρχιτεκτονικῆς μὴ στερουμένου σφαλμάτων.

Παρὰ ταῦτα τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ὀλλανδία ἔδωσαν εἰς τὴν προοπτικὴν ἀξιολόγους συμβολάς, κυρίως μὲ τὰς μελέτας τοῦ Simon Stevin, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 247) ὡς πρωτότυπον ἐπιστήμονα εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς. Εἰς τὸ ἔργον του Traité d' optique, ποὺ ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ Ἅπαντά του, εὑρίσκεται ὡς Βιβλίον I, μία μελέτη καθαρῶς ἐπιστημονικὴ ἑνὸς κλάδου χαρακτηριζομένου ἐκεῖ ὡς «Σκηνογραφία, κοινῶς λεγομένη προοπτική». Ἀπαντᾶται εἰς τὸ κείμενον αὐτό, μεταξὺ ἄλλων, ἡ λύσις εἰς πολλὰς μερικὰς περιπτώσεις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίστροφον τοῦ θεμελιώδους προβλήματος τῆς προοπτικῆς: «Δοθέντων εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σχημάτων οἱωνδήποτε, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι προοπτικὸν τοῦ ἄλλου, ζητεῖται νὰ τοποθετηθοῦν ταῦτα εἰς τὸν χῶρον οὕτως,

* Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. IV (Paris 1846), σημ. VII, σελ. 369-398.

ὥστε νὰ πληροῦται πράγματι ἡ προοπτικὴ αὐτῶν τοποθέτησις καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ ὀφθαλμοῦ».

Ἂς προστεθῇ ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ κείμενον ἀπαντᾶται μὲ τὴν ἀπόδειξίν της ἡ ἀκόλουθος σημαντικὴ πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι δίκαιον νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα Θεώρημα τοῦ Stevin: «Ἐὰν ὁ πίναξ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν τέμνει τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ἂν ὁ παρατηρητὴς στραφῇ ὁμορρόπως περὶ τὸν πόδα του, διατηρούμενος πάντοτε παράλληλος πρὸς τὸν πίνακα, ἡ προοπτικὴ σχέσις δὲν θὰ διαταραχθῇ, θὰ ὑφίσταται μάλιστα ἀκόμη καὶ ὅταν ὁ πίναξ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου». Τῆς προτάσεως αὐτῆς ὁ Stevin παραθέτει πολλὰς ἀξιολόγους ἐφαρμογάς. Σημειωτέον ἀκόμη, ὅτι τὴν προοπτικὴν ὁ συγγραφεὺς παρουσιάζει ὡς βοηθητικὸν μέσον διὰ τὴν χάραξιν τῶν σκιῶν εἰς τὰ σχέδια τῆς ὀχυρωματικῆς.

F. Viète

265. Εἰς τὴν ἀκαταμάχητον ἕλξιν, τὴν ὁποίαν ἤσκουν οἱ μεγάλοι γεωμέτραι τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντισταθῇ οὔτε ἕνας στοχαστὴς μὲ ὑπερβάλλουσαν πρωτοτυπίαν, ὅπως ὁ Viète. Τοῦτο καταφαίνεται εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ ἔργα του, τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 249 καὶ πέραν), καὶ εἰς τὰ ὁποῖα τὰ πάντα φανερώνουν τὴν μεγάλην οἰκειότητα τοῦ συγγραφέως μὲ τὸν Κικέρωνα καὶ τὸν Ὅμηρον, ἀλλὰ καὶ μὲ τὰς μεθόδους τοῦ Διοφάντου. Ἐπιβεβαιοῦται δὲ τοῦτο πάλιν ἀπὸ μερικὰ μικρὰ ἔργα καθαρῶς γεωμετρικοῦ χαρακτῆρος, τὰ ὁποῖα ἂν δὲν ἔφερον τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως, θὰ ἠδύναντο ἄριστα νὰ θεωρηθοῦν ὡς γνήσια προϊόντα τῆς ἀρχαίας Σχολῆς τῆς Ἀλεξανδρείας.

Τὸ πρῶτον φέρει τὸν τίτλον Effectionum geometricarum canonica recensio [3] καὶ ἀποτελεῖ συλλογὴν προβλημάτων γεωμετρίας α' καὶ β' βαθμοῦ, τὰ ὁποῖα φαίνονται ὡς ἐὰν προέκυψαν ἐκ μελετῶν του εἰς τὸν κλάδον τῆς μηχανικῆς. Ὑψηλότερον εἶναι τὸ ἀντικείμενον τοῦ δευτέρου ἔργου, τὸ ὁποῖον φέρει τὸν τίτλον Supplementum geometriae καὶ ἀσχολεῖται μὲ προβλήματα γ' καὶ δ' βαθμοῦ. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν ὁ Viète ἀνανεώνει τὴν προταθεῖσαν ὑπ' αὐτοῦ (§ 250) ἐκχώρησιν εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ δικαιώματος νὰ ἐκτελῇ, πέραν τῶν γνωστῶν εὐκλειδείων πράξεων, καὶ τῆς λεγομένης ὑπὸ τῶν ἀρχαίων «νεύσεως». Τοιουτοτρόπως ἐφοδιάζεται μὲ ἕνα μέσον, ποὺ τοῦ ἐπιτρέπει νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τῆς Δήλου, τῆς τριχοτομήσεως γωνίας καὶ τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.

Αἰρόμενος κατόπιν εἰς ὑψηλοτέρας θεωρίας, ἀποδεικνύει ὅτι κάθε πρόβλημα γ' ἢ δ' βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου ἢ εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας.

Παραπλήσιον εἶναι τὸ ἀντικείμενον ἑνὸς ὑπομνήματος φέροντος τί-

ὥστε νὰ πληροῦται πράγματι ἡ προοπτικὴ αὐτῶν τοποθέτησις καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ ὀφθαλμοῦ».

Ἄς προστεθῇ ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ κείμενον ἀπαντᾶται μὲ τὴν ἀπόδειξίν της ἡ ἀκόλουθος σημαντικὴ πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι δίκαιον νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα Θεώρημα τοῦ Stevin: «Ἐὰν ὁ πίναξ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν τέμνει τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ἂν ὁ παρατηρητὴς στραφῇ ὁμορρόπως περὶ τὸν πόδα του, διατηρούμενος πάντοτε παράλληλος πρὸς τὸν πίνακα, ἡ προοπτικὴ σχέσις δὲν θὰ διαταραχθῇ, θὰ ὑφίσταται μάλιστα ἀκόμη καὶ ὅταν ὁ πίναξ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου». Τῆς προτάσεως αὐτῆς ὁ Stevin παραθέτει πολλὰς ἀξιολόγους ἐφαρμογάς. Σημειωτέον ἀκόμη, ὅτι τὴν προοπτικὴν ὁ συγγραφεὺς παρουσιάζει ὡς βοηθητικὸν μέσον διὰ τὴν χάραξιν τῶν σκιῶν εἰς τὰ σχέδια τῆς ὀχυρωματικῆς.

F. Viète

265. Εἰς τὴν ἀκαταμάχητον ἕλξιν, τὴν ὁποίαν ἤσκουν οἱ μεγάλοι γεωμέτραι τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντισταθῇ οὔτε ἕνας στοχαστὴς μὲ ὑπερβάλλουσαν πρωτοτυπίαν, ὅπως ὁ Viète. Τοῦτο καταφαίνεται εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ ἔργα του, τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 249 καὶ πέραν), καὶ εἰς τὰ ὁποῖα τὰ πάντα φανερώνουν τὴν μεγάλην οἰκειότητα τοῦ συγγραφέως μὲ τὸν Κικέρωνα καὶ τὸν Ὅμηρον, ἀλλὰ καὶ μὲ τὰς μεθόδους τοῦ Διοφάντου. Ἐπιβεβαιοῦται δὲ τοῦτο πάλιν ἀπὸ μερικὰ μικρὰ ἔργα καθαρῶς γεωμετρικοῦ χαρακτῆρος, τὰ ὁποῖα ἂν δὲν ἔφερον τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως, θὰ ἠδύναντο ἄριστα νὰ θεωρηθοῦν ὡς γνήσια προϊόντα τῆς ἀρχαίας Σχολῆς τῆς Ἀλεξανδρείας.

Τὸ πρῶτον φέρει τὸν τίτλον Effectionum geometricarum canonica recensio [3] καὶ ἀποτελεῖ συλλογὴν προβλημάτων γεωμετρίας α' καὶ β' βαθμοῦ, τὰ ὁποῖα φαίνονται ὡς ἐὰν προέκυψαν ἐκ μελετῶν του εἰς τὸν κλάδον τῆς μηχανικῆς. Ὑψηλότερον εἶναι τὸ ἀντικείμενον τοῦ δευτέρου ἔργου, τὸ ὁποῖον φέρει τὸν τίτλον Supplementum geometriae καὶ ἀσχολεῖται μὲ προβλήματα γ' καὶ δ' βαθμοῦ. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν ὁ Viète ἀνανεώνει τὴν προταθεῖσαν ὑπ' αὐτοῦ (§ 250) ἐκχώρησιν εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ δικαιώματος νὰ ἐκτελῇ, πέραν τῶν γνωστῶν εὐκλειδείων πράξεων, καὶ τῆς λεγομένης ὑπὸ τῶν ἀρχαίων «νεύσεως». Τοιουτοτρόπως ἐφοδιάζεται μὲ ἕνα μέσον, ποὺ τοῦ ἐπιτρέπει νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τῆς Δήλου, τῆς τριχοτομήσεως γωνίας καὶ τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.

Αἰρόμενος κατόπιν εἰς ὑψηλοτέρας θεωρίας, ἀποδεικνύει ὅτι κάθε πρόβλημα γ' ἢ δ' βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου ἢ εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας.

Παραπλήσιον εἶναι τὸ ἀντικείμενον ἑνὸς ὑπομνήματος φέροντος τί-

τλον Pseudo-Mesolabum (ψευδο-μεσόλαβος). Διὰ νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν ἀπόφασιν τοῦ συγγραφέως νὰ γράψῃ τὸ ὑπόμνημα τοῦτο, σκόπιμον εἶναι νὰ ὑπενθυμίσωμεν ὅτι εἰς τὸν Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον (Τόμος Ι, § 51) ἀποδίδεται μία λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος στηριζομένη ἐπὶ τῆς χρήσεως εἰδικοῦ ὀργάνου, ποὺ ὠνομάζετο «μεσόλαβος». Τὸ σχετικὸν ἔργον τοῦ Ἐρατοσθένους δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν, ὁ δὲ Viète, ἐπιθυμῶν ν' ἀνασκευάσῃ ἕνα ἔργον τοῦ Giuseppe Scaligero (περὶ τοῦ ὁποίου κατωτέρω, § 279), ἐπεδόθη εἰς τὴν ἀνασύνταξιν τοῦ ἀπολεσθέντος ἀρχαίου. Καὶ διὰ νὰ προσλάβῃ ἡ ἐργασία του ἀκόμη καὶ τὴν μορφὴν ἔργου τῆς χρυσῆς περιόδου τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἔδωσεν εἰς πολλὰς τῶν ἐκτιθεμένων προτάσεων τὸ ὄνομα «δεδομένα».

Τὸ ἀνωτέρω κείμενον ἀκολουθεῖ ἕνα παράρτημα τιτλοφορούμενον Adjuncta capitula (Πρόσθετα κεφάλαια), ὅπου ὁ συγγραφεὺς πραγματεύεται μερικὰ ἄλλα προβλήματα. Τὸ πρῶτον εἶναι ἐκεῖνο πού, ὅπως εἴδομεν (§ 262), ἀπησχόλησεν ἐπίσης καὶ τὸν Benedetti καὶ τὸ ὁποῖον τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εὑρίσκετο εἰς τὸ προσκήνιον τοῦ ἐνδιαφέροντος. Ἐννοοῦμεν τὴν κατασκευὴν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου μὲ δεδομένας πλευράς. Ὁ Viète ἀρχίζει ἀποδεικνύων ἐσφαλμένην μίαν λύσιν δοθεῖσαν ἀπὸ ἕνα ἀνώνυμον χειροῦργον, κατόπιν δὲ ἐκθέτει ἄλλην ἀκριβῆ ἰδικῆς του ἐπινοήσεως, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς τῶν διαγωνίων τοῦ ζητουμένου σχήματος. Σημειώνομεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ ὅτι τὸ ἴδιον ἔτος (1598) τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἀπὸ τὸν γερμανὸν μαθηματικὸν Johan Richter (1537-1616), ἀπὸ τὸ ἐκλατινισθὲν ὄνομα τοῦ ὁποίου (Pretorius) προέκυψεν ἡ ὀνομασία «πρετοριανὴ πινακίς» δι' ἕνα ἐργαλεῖον ποὺ εἶναι ἀκόμη ἐν χρήσει ὑπὸ τῶν ἀγρονόμων. Ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ γραπτὸν ἐκεῖνο τοῦ Viète διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν μηχανικὴν κατασκευήν, μὲ προσέγγισιν, τῶν κανονικῶν πολυγώνων 5, 7 καὶ 9 πλευρῶν.

266. Ἕνα ἄλλο ἀξιόλογον γεωμετρικὸν πρόβλημμα ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν τοῦ Viète. Τοῦτο ἐπρότεινεν εἰς ἀπάντησιν προκλήσεως, τὴν ὁποίαν ἀπηύθυνεν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ὁ βέλγος μαθηματικὸς A. van Roomen (§ 274) πρὸς τοὺς μαθηματικοὺς ὅλου τοῦ κόσμου. Πρόκειται περὶ τῆς κατασκευῆς περιφερείας ἐφαπτομένης τριῶν ἄλλων, πρόβλημα πού, ὅπως γνωρίζομεν (Τόμος Ι, § 45), ἀπετέλει τὸ ἀντικείμενον ἑνὸς ἔργου τοῦ ἐκ Πέργης Ἀπολλωνίου, ἀτυχῶς ἀπολεσθέντος.

Τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, φέροντος σήμερον τὸ ὄνομα τοῦ Ἀπολλωνίου, ὁ van Roomen ἔδωσε λύσιν διὰ τομῆς δύο ὑπερβολῶν. Ὁ Viète ἐξέφερε τότε δυσμενῆ κριτικήν, στηριζόμενος εἰς τὸ βάσιμον ἐπιχείρημα, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προτείνεται ὡς ἐπιτυχὴς μία λύσις χρησιμοποιοῦσα μέσα ἀνώτερα ἐκείνων, τῶν ὁποίων πράγματι ἔχει ἀνάγκην, ἀποδείξας συγ-

χρόνως τὴν δυνατότητα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μόνον μὲ τὴν βοήθειαν εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν. Αὐτὸ εἶναι ἀκριβῶς τὸ περιεχόμενον ἑνὸς ἀξιολόγου ὑπομνήματος, φέροντος τίτλον Francisci Viètae Apollonius Gallus, τὸ ὁποῖον κατέχει ἐξέχουσαν θέσιν μεταξὺ τῶν ἔργων ἐκείνων ποὺ ἀποτελοῦν προσπάθειαν ἀναπαραγωγῆς, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς φαντασίας, ἀρχαίων συγγραμμάτων ἀπολεσθέντων.

Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ὁ συγγραφεὺς θεωρεῖ τὰς ἀκολούθους ὑποθέσεις ἐν σχέσει μὲ τὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εἶναι σημεῖα (Σ), εὐθεῖαι (Ε) καὶ περιφέρειαι (Π) : 3 Σ : 2 Σ + 1 Ε: 3 Ε : 1 Σ + 2 Ε : 2 Ε + 1 Π 1 Π + 1 Ε + 1 Σ : 1 Ε + 2 Π : 2 Σ + 1 Π : 1 Σ + 2 Π : 3 Π. Τὸ παράδειγμα τοῦ Viète δὲν ἐβράδυνον νὰ μιμηθοῦν δύο μαθηταί του : ὁ A. Anderson, τὸν ὁποῖον συνηντήσαμεν ἤδη (§ 249) ὡς ἐκδότην τοῦ μεγάλου γάλλου ἀλγεβριστοῦ καὶ ὁ Marino Ghetaldi (γεννηθεὶς εἰς Ragusa τὸ 1566, ἀποθανὼν ἐκεῖ τὴν 11 Ἀπριλίου 1626). Ὁ πρῶτος ἐπεχείρησε τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολλωνείου ἔργου «χωρίου ἀποτομή» εἰς τὸ Supplementum Apollonii redivivi (Paris, 1612) (Συμπλήρωσις τοῦ ἀναβιώσαντος Ἀπολλωνίου). Ὁ δεύτερος ἐπεχείρησε τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ προβλήματος τῶν ἐπαφῶν εἰς τὸ ἔργον Supplementum Apollonii Galli (Venezia, 1507) καὶ τῶν ἀφορώντων τὰς «νεύσεις» εἰς τὸ Apollonius redivivus (Τόμος I, § 45).

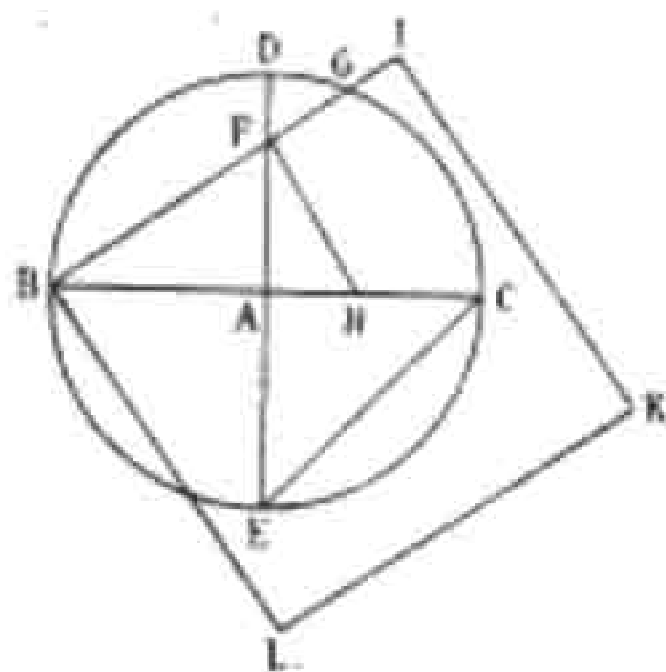
Θὰ μνημονεύσωμεν ἀκόμη ἕνα παράρτημα ὅπου ὁ Viète δίδει τὰς λύσεις τῶν ἀκολούθων προβλημάτων, περὶ τῶν ὁποίων ὁ Regiomontano εἰς ἕνα πολὺ γνωστὸν ἔργον του (Τόμος I, § 182), ἐδήλωσεν ὅτι ὑπερέβαινον τὰς δυνάμεις του: Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις, ἡ ἀντικειμένη γωνία καὶ τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον τῶν δύο ἄλλων. Ἢ ἐπίσης τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις, τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος. Νὰ κατασκευασθῇ τέλος ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀναλογίαν.

Ἕνα δεύτερον παράρτημα εἶναι ἀφιερωμένον εἰς μερικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα οἱ ἀστρονόμοι εἶχον ἀφίσει ἄνεπαφα ἢ ἀνεπιτυχῶς λελυμένα. Ἀλλὰ φρονοῦμεν, ὅτι δὲν συντρέχει λόγος νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐδῶ μὲ αὐτά, λόγῳ τοῦ περιωρισμένου ἐνδιαφέροντος, ποὺ παρουσιάζουν.

Ἐντελῶς διαφορετικὰ πρέπει νὰ κρίνωμεν τὸ περιεχόμενον μιᾶς ἀνθολογίας εἰς πολλὰ Μέρη, τῆς ὁποίας ἕνα μόνον (δημοσιευθὲν τὸ 1593) ἔφθασεν εἰς τὴν κατοχὴν τοῦ ἐκδότου τῶν Ἀπάντων τοῦ Viète. Τὸ μέρος αὐτὸ φέρει τὸν τίτλον: Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII. Τὸ τελευταῖον ἀπὸ τὰ εἴκοσι Κεφάλαια, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται, ἀναφέρεται εἰς τὴν χρονολογίαν, ἕνα θέμα ἐπικαιρότητος τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, καθ' ἣν ἐσχεδιάζετο ἡ γρηγοριανὴ μεταρρύθμισις τοῦ ἡμερολογίου, ἀλλὰ ἐξερχόμενον τοῦ πλαισίου τῆς παρούσης Ἱστορίας. Ἄλλα

θὰ ἐξετασθοῦν κατωτέρω (Κεφ. XIX). Τὰ ὑπόλοιπα φαίνεται ὅτι περιέχουν τοὺς καρποὺς τῶν μελετῶν του ἐπὶ τῆς ἀρχαίας μαθηματικῆς γραμματείας. Πολλαὶ σελίδες εἶναι ἀφιερωμέναι εἰς τὰ τρία κλασσικὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ Viète ἔδειξε πῶς θὰ ἔπρεπε νὰ ἐφαρμόζωνται αἱ γνωσταὶ καμπύλαι τῶν ἀρχαίων, μὴ ἐξαιρουμένης τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα δὲν παρέλειψε νὰ ὑποδείξῃ ἀκόμη μερικὰς μηχανικὰς προσεγγιστικὰς λύσεις. Ἀπαντᾶται ἀκόμη εἰς τὰς σελίδας αὐτὰς τὸ πρόβλημα τῆς ἐγγραφῆς κανονικοῦ ἑπταγώνου εἰς κύκλον, τὸ ὁποῖον ὁ Viète (μιμούμενος τὸν Εὐκλείδειον τρόπον διὰ τὸ πεντάγωνον) ἀνάγει εἰς τὴν κατασκευὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν ἴσων γωνιῶν εἶναι τριπλασία τῆς τρίτης.

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι τὸ στὺλ τοῦ συγγραφέως, καθιστάμενον σκοτεινότερον ἐκ τῆς ἀναμίκτου χρήσεως λατινικῆς καὶ ἑλληνικῆς γλώσσης, συνετέλεσεν, ὥστε νὰ μὴ γίνουν εὐρύτερον γνωσταὶ πολλαὶ θεωρίαι του, αὐστηραὶ καὶ πνευματώδεις. Τοιαύτη εἶναι π.χ. καὶ ἡ ἀκόλουθος θεωρία του περὶ προσεγγιστικοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τὴν ὁποίαν ἀναφέρομεν ὡς ἀξίαν ἰδιαιτέρας μνείας μεταξὺ πολλῶν ἄλλων ἀξιολόγων ζητημάτων. Εἰς κύκλον κέντρου A (σχ. 10) ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι BC καὶ DE μεταξύ των κάθετοι. Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος AD λαμβάνομεν $AF = CE/2$ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν BFG. Ἔστω κατόπιν AH τὸ μικρότερον μέρος τῆς ἀκτῖνος AC διαιρουμένης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ ἔστω I ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας BFG τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι:



Σχ. 10

$$\frac{BH}{BF} = \frac{BC}{BI}. \qquad (1)$$

Ὁ Viète τώρα βεβαιώνει, χωρὶς ἀπόδειξιν, ὅτι τὸ τετράγωνον BIKL ποὺ κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν BI εἶναι «κατὰ προσέγγισιν ἴσον» πρὸς τὸν δοθέντα κύκλον.

Πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῆς δηλώσεως τοῦ Viète καὶ πρὸς ἐξακρίβωσιν τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐπιτυγχανομένης προσεγγίσεως, ἂς ὑποθέσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δυνάμει τῆς ἐκτεθείσης γεωμετρικῆς κατασκευῆς πληροῦνται αἱ σχέσεις:

$$AF = \frac{1}{2}\,CE = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad BF = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AH = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad BH = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Κατὰ συνέπειαν, ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν:

$$BI = \frac{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})}{10}. \qquad (2)$$

Ἐντεῦθεν, ἐκτελουμένων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, εὑρίσκομεν:

$$BI^2 = 3{,}1416...$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἐλήφθη μονάς, τὸ ἐμβαδὸν τούτου θὰ ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π. Κατὰ τὸν Viète λοιπὸν εἶναι $\pi = 3{,}1416$, τιμὴ ὄντως «κατὰ προσέγγισιν ἴση» πρὸς τὴν 3,14159...

Ὑποφώσκει ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν

267. Ἐνῷ εἰς τὸν τομέα τῆς πολιτικῆς εἶναι παραδεκτὸν ὡς ἀληθὲς τὸ γνωμικὸν «εὐτυχεῖς οἱ λαοὶ ποὺ δὲν ἔχουν Ἱστορίαν», ἡ ἐμφάνισις ἱστορικῶν πραγματειῶν εἰς ἕνα κλάδον τῆς γνώσεως ἀποτελεῖ ἀσφαλὲς σύμπτωμα τῆς εἰς αὐτὸν ἀποδιδομένης σπουδαιότητος. Εἴδομεν πράγματι (Τόμος I, § 33) ὅτι ἡ πρώτη ἱστορία τῆς γεωμετρίας τῆς ὁποίας διετηρήθη ἡ μνήμη ἐνεφανίσθη τὴν προτεραίαν τῆς ἡμέρας ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης ἐπεδόθη εἰς τὴν περισυλλογὴν καὶ κατάταξιν τοῦ συνόλου τῶν ἀληθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶχον γίνει κτῆμα μόνιμον τῆς ἐπιστήμης τοῦ διαστήματος. Ἀτυχῶς τὸ ἔργον ἐκεῖνο ἐξηφανίσθη χωρὶς ν' ἀφίσῃ κανένα ἴχνος καὶ πρέπει ν' ἀνέλθωμεν εἰς τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος προτοῦ συναντήσωμεν ἄλλα ἔργα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπιστήμη μας ν' ἀναπαρίσταται εἰς τὸν ἀναγνώστην ἐν συναφείᾳ μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐργάτας της.

Τὸ πρῶτον κείμενον αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ποὺ εἶχε τὴν τιμὴν νὰ ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος διὰ τοῦ τύπου εἶναι τὸ φέρον τὸν τίτλον Scholae mathematicae, τοῦ γνωστοῦ μας Petrus Ramus (§ 242). Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ προηγεῖται τῆς διδασκομένης ὕλης μία γενικὴ ἐπισκόπησις, ὅπου ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν κατανέμεται εἰς τέσσαρας περιόδους: Ἡ πρώτη ἀποκαλεῖται χαλδαϊκή, καλύπτουσα τὴν χρονικὴν περίοδον ἀπὸ τοῦ πρωτοπλάστου Ἀδὰμ μέχρι τοῦ γενάρχου Ἀβραάμ. Ἡ δευτέρα ἀποκαλεῖται αἰγυπτιακή, διὰ νὰ ὑπενθυμίζῃ τὴν εἰς Αἴγυπτον μεταλαμπάδευσιν ὑπὸ τοῦ Ἀβραὰμ τῆς ἀσσυρο - βαβυλωνιακῆς ἐπιστήμης. Ἡ τρίτη ὀνομάζεται ἑλληνικὴ περίοδος, ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν τελευταίαν, τὴν ὁποίαν ἀποκαλεῖ σύγχρονον, ὁ συγγραφεὺς ἀφίνει εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς ἐξιστορήσεως τῶν ἐπιτευγμάτων της.

Καθαρῶς ἱστορικὸν εἶναι τὸ ἔργον ἑνὸς μαθητοῦ τοῦ Κομμαντίνου, Bernardino Baldi, γλωσσομαθεστάτου. Ἐγνώριζε (ἀναφέρομεν ὅσα ἀναγράφονται ἐπὶ τοῦ τάφου του) δώδεκα γλώσσας καὶ κατεῖχε διακεκριμένην

Κατὰ συνέπειαν, ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν:

$$BI = \frac{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})}{10}. \quad (2)$$

Ἐντεῦθεν, ἐκτελουμένων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, εὑρίσκομεν:

$$BI^2 = 3{,}1416...$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἐλήφθη μονάς, τὸ ἐμβαδὸν τούτου θὰ ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π. Κατὰ τὸν Viète λοιπὸν εἶναι π = 3,1416, τιμὴ ὄντως «κατὰ προσέγγισιν ἴση» πρὸς τὴν 3,14159...

Ὑποφώσκει ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν

267. Ἐνῷ εἰς τὸν τομέα τῆς πολιτικῆς εἶναι παραδεκτὸν ὡς ἀληθὲς τὸ γνωμικὸν «εὐτυχεῖς οἱ λαοὶ ποὺ δὲν ἔχουν Ἱστορίαν», ἡ ἐμφάνισις ἱστορικῶν πραγματειῶν εἰς ἕνα κλάδον τῆς γνώσεως ἀποτελεῖ ἀσφαλὲς σύμπτωμα τῆς εἰς αὐτὸν ἀποδιδομένης σπουδαιότητος. Εἴδομεν πράγματι (Τόμος I, § 33) ὅτι ἡ πρώτη ἱστορία τῆς γεωμετρίας τῆς ὁποίας διετηρήθη ἡ μνήμη ἐνεφανίσθη τὴν προτεραίαν τῆς ἡμέρας ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης ἐπεδόθη εἰς τὴν περισυλλογὴν καὶ κατάταξιν τοῦ συνόλου τῶν ἀληθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶχον γίνει κτῆμα μόνιμον τῆς ἐπιστήμης τοῦ διαστήματος. Ἀτυχῶς τὸ ἔργον ἐκεῖνο ἐξηφανίσθη χωρὶς ν' ἀφίσῃ κανένα ἴχνος καὶ πρέπει ν' ἀνέλθωμεν εἰς τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVI αἰῶνος προτοῦ συναντήσωμεν ἄλλα ἔργα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπιστήμη μας ν' ἀναπαρίσταται εἰς τὸν ἀναγνώστην ἐν συναφείᾳ μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐργάτας της.

Τὸ πρῶτον κείμενον αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ποὺ εἶχε τὴν τιμὴν νὰ ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος διὰ τοῦ τύπου εἶναι τὸ φέρον τὸν τίτλον Scholae mathematicae, τοῦ γνωστοῦ μας Petrus Ramus (§ 242). Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ προηγεῖται τῆς διδασκομένης ὕλης μία γενικὴ ἐπισκόπησις, ὅπου ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν κατανέμεται εἰς τέσσαρας περιόδους: Ἡ πρώτη ἀποκαλεῖται χαλδαϊκή, καλύπτουσα τὴν χρονικὴν περίοδον ἀπὸ τοῦ πρωτοπλάστου Ἀδὰμ μέχρι τοῦ γενάρχου Ἀβραάμ. Ἡ δευτέρα ἀποκαλεῖται αἰγυπτιακή, διὰ νὰ ὑπενθυμίζῃ τὴν εἰς Αἴγυπτον μεταλαμπάδευσιν ὑπὸ τοῦ Ἀβραὰμ τῆς ἀσσυρο - βαβυλωνιακῆς ἐπιστήμης. Ἡ τρίτη ὀνομάζεται ἑλληνικὴ περίοδος, ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν τελευταίαν, τὴν ὁποίαν ἀποκαλεῖ σύγχρονον, ὁ συγγραφεὺς ἀφίνει εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς ἐξιστορήσεως τῶν ἐπιτευγμάτων της.

Καθαρῶς ἱστορικὸν εἶναι τὸ ἔργον ἑνὸς μαθητοῦ τοῦ Κομμαντίνου, Bernardino Baldi, γλωσσομαθεστάτου. Ἐγνώριζε (ἀναφέρομεν ὅσα ἀναγράφονται ἐπὶ τοῦ τάφου του) δώδεκα γλώσσας καὶ κατεῖχε διακεκριμένην

θέσιν εἰς τὴν λογοτεχνίαν ὡς ποιητὴς καὶ ὡς ἱστορικός. Ἐγεννήθη εἰς τὸ Urbino τὴν 6 Ἰουνίου 1553. Μετέβη εἰκοσαετὴς πρὸς τελειοποίησιν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova, ἀλλ' ἡ ἐνσκήψασα ἐκεῖ ἐπιδημία χολέρας τὸν ἠνάγκασε νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν πόλιν καὶ νὰ συνεχίσῃ τὰς σπουδάς του εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν. Ἡ φήμη τὴν ὁποίαν δὲν ἐβράδυνε ν' ἀποκτήσῃ ὡς ἄνθρωπος ὑψηλῆς καὶ βαθείας μορφώσεως παρεκίνησε τὸν δοῦκα τῆς Guastalla (Ferrante II Gonzaga) νὰ τὸν καλέσῃ εἰς τὴν αὐλήν του. Ἐκεῖ ἀνηγορεύθη τὸ 1586 προκαθήμενος ἀββᾶς, διετήρησε δὲ τὸ ὑπούργημα τοῦτο μέχρι τοῦ 1612, ὅτε ἐζήτησε νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ Urbino, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 12 Ὀκτωβρίου 1617.

Εἰς τὴν παροῦσαν Ἱ σ τ ο ρ ί α ν ὁ Baldi δικαιοῦται μνείας δι' ἕνα μέγα ἔργον του, εἰς τὸ ὁποῖον ἐσκόπει νὰ συγκεντρώσῃ τὰς βιογραφίας ὅλων τῶν μαθηματικῶν ποὺ ἐνεφανίσθησαν μέχρι τότε καὶ τοὺς ὁποίους εἶχε κατατάξει εἰς ἕνα κατάλογον περιέχοντα 336 ὀνόματα. Ἐκ τούτων μόνον τὸν «Βίον τοῦ Κομμαντίνου» ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα. Μετὰ τὸν θάνατόν του ἐδημοσιεύθη ἕνα σχέδιον τῆς μεγάλης ἐκείνης προσπαθείας, ὑπὸ τὸν τίτλον Χ ρ ο ν ι κ ὰ (Cronica), ὅπου τῶν διανοουμένων ἐκείνων ἀναγράφονται μόνον τὰ ὀνόματα καὶ ἐλάχιστα ἐπιστημονικὰ χαρακτηριστικά. Ἀρχίζει δὲ μὲ ἕνα θρυλικὸν πρόσωπον, Εὐφόρβιον τὸν Φρύγιον, προγενέστερον τοῦ Θαλοῦ, καὶ κλείει μὲ ἕνα μαθηματικόν, ζῶντα ἀκόμη ὅταν ἔγραφεν ὁ Baldi, τὸν Guidobaldo del Monte, περὶ τοῦ ὁποίου ἐκάμαμεν ἤδη λόγον (§ 263). Εἶναι ἕνα ἔργον μὴ ἀπηλλαγμένον ἀνακριβειῶν ὡς πρὸς τὰ πρόσωπα, τὰ ἔργα καὶ τὰς χρονολογίας καὶ διὰ τοῦτο μετριώτατα χρήσιμον σήμερον, ἀφοῦ μάλιστα καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μὴ ἰταλῶν μαθηματικῶν, κατὰ τὴν συνήθειαν τῆς ἐποχῆς, διεστρεβλώθησαν τόσον πολὺ κατὰ τὴν ἰταλικὴν διατύπωσιν, ὥστε, εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, νὰ εἶναι δύσκολος ἡ ἀναγνώρισίς των.

Ὁ Baldi ἀποθνήσκων ἄφησε πλήρεις βιογραφίας 22 μαθηματικῶν*, τῶν βιογραφιῶν δὲ τούτων δύο ἀντίγραφα περιῆλθον εἰς τὴν κατοχὴν τοῦ B. Boncompagni. Πολλαὶ ἐξ αὐτῶν ἐδημοσιεύθησαν ὑπὸ τοῦ E. Narducci εἰς τὸ Bullettino di bibliografia e storia. Δὲν ἀναφέρομεν ἐδῶ, χάριν συντομίας, τὸν κατάλογον. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ τὸν ἀναζητήσῃ εἰς τὸν πίνακα, μὲ τὸν ὁποῖον τελειώνει ὁ XX Τόμος τοῦ ἀνωτέρω Δελτίου τοῦ Narducci.

Μᾶς εἶναι ἄγνωστον ποῖον ὑπῆρξε τὸ τέλος τῶν πρωτοτύπων αὐτῆς τῆς πολυτίμου συλλογῆς. Μολονότι εἰς τὴν κλίμακα τῶν ἀξιῶν τῶν προϊόντων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος ἡ βιογραφία κατέχει εὐλόγως θέσιν κατωτέραν τῆς ἱστορίας, ἐν τούτοις ἡ ἐμφάνισις κειμένων, ὅπως αὐτὰ ποὺ ἐγρά-

* Περὶ τῶν βιογραφιῶν τούτων γίνεται λόγος εἰς ἐπιστολὰς τοῦ 1673 δημοσιευθείσας ὑπὸ τοῦ Rigaud εἰς τὸν Τόμον I τοῦ γνωστοῦ ἔργου Correspondence of scientific men of the XVII century (Oxford, 1841, σελ. 206 καὶ 210).

φησαν ὑπὸ τοῦ Baldi, πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς ἀσφαλὲς σύμπτωμα τοῦ γεγονότος ὅτι, μέχρι τοῦ δευτέρου ἡμίσεως τοῦ XVI αἰῶνος, εἶχεν ἀναγνωρισθῆ ἡ μεγάλη σπουδαιότης τῶν μαθηματικῶν, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ διεγερθῇ ἡ ἐπιθυμία τῶν μορφωμένων ἀνθρώπων νὰ γνωρίσουν ἐξ ὁλοκλήρου τὴν ζωὴν καὶ τὰ ἔργα ἐκείνων, εἰς τοὺς ὁποίους τὰ μαθηματικὰ ὀφείλουν τὰ σημαντικώτερα βήματα τῆς προόδου των.

Τὸ παράδειγμα ποὺ ἔδωσεν ὁ Ramus, παρεμβάλλων ἱστορικὰς γνώσεις εἰς μίαν θεωρητικὴν ἔκθεσιν τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν, ἠκολουθήθη ἀπὸ ἄλλους, μεταξὺ τῶν ὁποίων αὐτὴν τὴν στιγμὴν ἀναφέρομεν τὸν Claudio Francesco Milliet Deschales (γεννηθέντα εἰς Chambery τὸ 1621, ἀποθανόντα εἰς Torino τὴν 28 Μαρτίου 1678), τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον Cursus seu mundus mathematicus (Μαθηματικὸς δρόμος ἢ μαθημ. κόσμος, Lugduni, 1674) περιέχει τὰ ὀνόματα πολλῶν διασήμων μαθηματικῶν. Εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν Ἰησουϊτῶν ἀνήκει, ὅπως καὶ ὁ προηγούμενος, ὁ συγγραφεὺς ἑνὸς οὐσιώδους ἱστορικοῦ ἔργου φέροντος τίτλον Aristotelis loca mathematica, ex universis ipsius operibus collecta et explicata (Μαθηματικὰ χωρία τοῦ Ἀριστοτέλους ἐξ ὅλων τῶν ἔργων αὐτοῦ περισυλλεγέντα καὶ ἑρμηνευθέντα, Bonon., 1615). Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ὁ συγγραφεὺς Giuseppe Biancani (γεννηθεὶς τὸ 1566 καὶ ἀποθανὼν τὴν 7 Ἰουνίου 1624 εἰς Parma) παρενέβαλεν ἕνα χρονολογικὸν πίνακα τῶν ἐξοχωτέρων μαθηματικῶν ποὺ ἔζησαν μέχρι τῆς ἐποχῆς του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIX

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ XVI ΑΙΩΝΑ

Βέρνερ, Κοπέρνικος, Ραιτικός, Πιτίσκος

268. Ἐξ ὅσων ἀνεπτύξαμεν εἰς τὰ προηγηθέντα Κεφάλαια συνάγεται ὅτι ὁ αἰὼν περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, ἐνῷ ἐγνώρισε θαυμαστὰς ἐξελίξεις εἰς τὴν ἄλγεβραν, εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας δὲν ἐσημείωσε παρὰ δευτερευούσης σημασίας βελτιώσεις τὰς ὁποίας ἀνεζήτουν ἐπιμόνως οἱ ζωγράφοι καὶ οἱ ἀρχιτέκτονες, διότι αἱ συζητήσεις γύρω ἀπὸ τὴν φύσιν τῆς γωνίας συνεπαφῆς (angolo di contigenza)[4], περὶ τῆς ὁποίας κάμνομεν τώρα συμπτωματικῶς λόγον, εἶχον θέσιν μᾶλλον εἰς τὴν φιλοσοφίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ μόνον ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας κατέστη φανερὸς ὁ σύνδεσμος αὐτῆς μὲ τὰ ἀπειροστὰ διαφόρων τάξεων.

Ἀληθὲς εἶναι ὅτι ὁ προφανὴς χαρακτὴρ τῶν προσπαθειῶν τοῦ XVI αἰῶνος νὰ δώσουν βάσεις ἐπιστημονικὰς εἰς ἕνα βοηθητικὸν κλάδον τῆς πράξεως, ὅπως εἶναι ἡ προοπτική, ἐπανευρίσκεται εἰς τὰς συμβολὰς ποὺ ἐδόθησαν, κατὰ τὸν αἰῶνα τοῦτον, εἰς ἕνα ἄλλο Κεφάλαιον τῆς ἐπιστήμης μας, τὴν τριγωνομετρίαν, ἡ ὁποία ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἱππάρχου καὶ τοῦ Πτολεμαίου, ἀπετέλει τὸ πολυτιμότερον ἐφόδιον διὰ τοὺς σπουδάζοντας τὰ οὐράνια φαινόμενα. Πράγματι, τὸ 1533 ἐδημοσιεύθη μὲ ἐπιμέλειαν τοῦ Johan Schöner (1477-1547) ἡ πρώτη συναφὴς ἐργασία ὀφειλομένη εἰς εὐρωπαϊκὸν κάλαμον. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸ γνωστὸν ἔργον τοῦ Regiomontano (Τόμος I, § 183) τὸ τιτλοφορούμενον De triangulis omnia modis libri quinque. Καὶ δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἀκριβῶς ἀπὸ τοῦ 1533 χρονολογεῖται ἡ ἐποχή, καθ' ἣν ἡ τριγωνομετρία ἐβάδισε κανονικῶς τὴν ὁδὸν πρὸς τὴν τελειότητα, τὴν ὁποίαν ἐδέησε τελικῶς νὰ φθάσῃ τὸν XVIII αἰῶνα.

Τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἔργον, τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν ἐκτύπωσίν του ἐπανέρχεται εἰς τὸν κύκλον τοῦ ἐνδιαφέροντός μας, εἶναι ἡ πρώτη τριγωνομετρία εἰς τὴν Εὐρώπην ποὺ στηρίζεται ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν «ἡμιτόνων». Μαζὶ μὲ τὸ ἡμίτονον διαδίδεται παντοῦ καὶ ἡ ἔννοια τοῦ «παρημιτόνου» (sinus-versus) τουτέστι τοῦ βέλους, ἐκφραζομένου ὑπὸ τῆς διαφορᾶς τοῦ συνη-

μιτόνου ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος. Ἡ τριγωνομετρικὴ ὅμως αὐτὴ γραμμὴ δὲν ἦτο προωρισμένη νὰ ἐπιζήσῃ καὶ διὰ τοῦτο ἐξέλιπε τελικῶς. Τὸ ἔργον ὅμως De triangulis δὲν ἐξαντλεῖ τὸ σύνολον τῶν τριγωνομετρικῶν ἔργων τοῦ Regiomontano. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἰδέαν περὶ τῶν ἄλλων ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ Giovanni di Gemunden καὶ Giorg von Peuerbach (Τόμος I, § 179) εἶχον ὑπολογίσει τὰς τομὰς τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων ἀνὰ 10' διὰ μίαν ἀκτῖνα 600.000 καὶ ὅτι ὁ ἀστρονόμος Giovanni Bianchini εἶχε κάμει τὸ αὐτὸ τὸ 1463 διὰ μίαν ἀκτῖνα 60.000. Ἀπὸ τῆς πλευρᾶς του ὁ Regiomontano ὑπελόγισε, πρὸς τὸν σκοπὸν βελτιώσεως τῶν διαθεσίμων εἰς τοὺς ἀστρονόμους βοηθητικῶν μέσων, τρεῖς πίνακας προβαίνοντας ἀπὸ 1' εἰς 1', δι' ἀκτῖνας 60.000, 6.000.000 καὶ 10.000.000*. Ὁ πίναξ ὁ ἀνταποκρινόμενος εἰς τὴν τελευταίαν τιμὴν τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰδιαιτέρως ἀξιοσημείωτος, διότι ἐκπροσωπεῖ, ἴσως μάλιστα καὶ προσδιορίζει, τὴν πλήρη χειραφέτησιν τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τοῦ ἑξηκονταδικοῦ συστήματος, καὶ τὴν ὁριστικὴν ἐπικράτησιν τῆς βάσεως 10 καὶ τῶν δυνάμεών της. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ πίνακες παρέμενον ἐπὶ μακρὸν χρόνον χειρόγραφοι, ἀφοῦ ἐνεφανίσθησαν μόνον εἰς παράρτημα τοῦ μεγάλου ἔργου De triangulis. Ἀκόμη περισσότερον χρόνον ἀνέμενον τὴν τιμὴν τῆς ἐκτυπώσεως τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ ἰδίου τοῦ Regiomontano πρὸς καθορισμὸν τῶν τιμῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων, μεταβαλλομένων κατὰ βαθμόν, δι' ἀκτῖνα 100.000. Οἱ ὑπολογισμοὶ αὐτοὶ εἶδον τὸ φῶς εἰς μίαν ἔκδοσιν τοῦ 1490, ἐξυπηρετοῦσαν ἀστρολογικοὺς σκοπούς, συγκεντρωμένοι ὑπὸ τὸ ὄνομα Tabula foecunda (Πίναξ γόνιμος).

Ὅτι τὸ μέγα ἔργον τοῦ Regiomontano ἤσκησε κάποιαν εὐεργετικὴν ἐπιρροὴν ἀκόμη καὶ πρὶν ἐπωφεληθῇ τοῦτο τῆς ἐφευρέσεως τοῦ Γουτεμβεργίου, φαίνεται ἀποδεικνυόμενον ἀπὸ ἕνα ἔργον σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ἔχοντος τίτλον[5] De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis Libri V, καὶ συγγραφέα ἕνα μετριόφρονα ἱεράρχην τῆς Νυρεμβέργης, τὸν Ἰωάννην Βέρνερ (Johan Werner 1468-1528). Ἀτυχῶς, ἡ ματαία ἀναζήτησις θαρραλέου ἐκδότου κατεδίκασε τὸ ἔργον τοῦτο νὰ παραμείνῃ ἀνέκδοτον, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ σύγχρονοί του ἐξέφερον εὐμενεῖς κριτικάς. Μὲ τὸν καιρὸν τὸ ἔργον ἐχάθη, σήμερον δὲ θεωρεῖται ὡς ἀνεπανορθώτως ἀπολεσθέν**.

---

* Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ εἴπωμεν εἰς σύγχρονον γλῶσσαν ὅτι αἱ ὑπολογισθεῖσαι τιμαὶ τῶν ἡμιτόνων εἶχον ὑπολογισθῆ μὲ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία.

** Εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Κρακοβίας ἀνεκαλύφθησαν μερικαὶ σελίδες φέρουσαι τίτλον Ioannis Verneri mathematici norimbergensis, De triangulis sphoericis Libri quatuor, De meteoreoscopiis Libri sex, Nunc primum studio et diligentia G. I. Rhetici in lucem edidit (Cracovia, MDLVII). Δὲν ὑπάρχει ὅμως ἐκεῖ τίποτε περισσότερον ἑνὸς προοιμίου, γραφέντος ὑπὸ τοῦ ἐκδότου. Ἀπὸ ἕνα χειρόγραφον ἀγνώστου προελεύσεως, περιελ-

Ὅτι δὲ τὸ γεγονὸς τοῦτο πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς κατ' ἐξοχὴν λυπηρὸν προκύπτει ἀπὸ τὰ ὀλίγα ἐκεῖνα ποὺ γνωρίζομεν ἐμμέσως γύρω ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου. Ἀνάγονται πράγματι εἰς τὸν Βέρνερ οἱ τύποι, ποὺ χρησιμεύουν διὰ τὸν μετασχηματισμὸν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἑνὸς γινομένου δύο συνημιτόνων ἢ δύο ἡμιτόνων:

$$\eta\mu\, x\ \eta\mu\, y = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(x-y) - \sigma\upsilon\nu(x+y)\right],$$

$$\sigma\upsilon\nu\, x\ \sigma\upsilon\nu\, y = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(x-y) + \sigma\upsilon\nu(x+y)\right].$$

Περιττὸν εἶναι νὰ τονίσωμεν ὅτι ἐπὶ τῶν τύπων αὐτῶν στηρίζεται τὸ τέχνασμα τὸ λεγόμενον π ρ ο σ θ α φ α ί ρ ε σ ι ς (τὴν ἐτυμολογίαν βλ. εἰς § 248), τὸ ὁποῖον καὶ πρέπει λοιπὸν ν' ἀναγάγωμεν εἰς τοὺς χρόνους τοῦ μαθηματικοῦ τούτου. Ἐξ ὅσων ἐλέχθησαν συνάγεται ὅτι ὁ ἴδιος ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων τῆς γῆς, ἐκ τῶν γεωγραφικῶν των συντεταγμένων.

269. Ἡ δικαία ἀναγνώρισις τῆς ἀξίας, τὴν ὁποίαν ἡ κακὴ μοῖρα ἠρνήθη εἰς τὸν μετριόφρονα ἱερωμένον τῆς Νυρεμβέργης, ἐξεχωρήθη πλουσιοπαρόχως εἰς ἕνα ἄλλον ἐκπρόσωπον τῆς ἐκκλησίας σχεδὸν σύγχρονον, τὸν Ν ι κ ό λ α ο ν Κ ο π έ ρ ν ι κ ο ν (Nicolas Koppernigk ἢ λατινικὰ Copernicus), τὸν ἄνθρωπον ὁ ὁποῖος ἐμπνεόμενος ἀπὸ τὰς ἰδέας τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (Τόμος I, § 65) ἀντικατέστησε τὴν γεωκεντρικὴν ἀντίληψιν τοῦ σύμπαντος μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πλανητικοῦ μας συστήματος. Ὑπόθεσις, ἡ ὁποία ἔθεσε τὴν ἀστρονομίαν ἐπὶ τῆς ὁδοῦ ἐκείνης, ποὺ ἐπέπρωτο νὰ ὁδηγήσῃ τὸν Kepler καὶ τὸν Newton εἰς τὴν δημιουργίαν τῆς οὐρανίου γεωμετρίας καὶ μηχανικῆς.

Ὁ Κοπέρνικος ἐγεννήθη εἰς Thorn τὴν 19 Φεβρουαρίου 1473, ἔκαμε δὲ τὰς σπουδάς του εἰς τὴν Κρακοβίαν ἀπὸ τοῦ 1491 μέχρι τοῦ 1494. Ἀλλὰ πολὺ γρήγορα, παρακινούμενος ἀπὸ τὴν φήμην ποὺ εἶχον τότε τὰ ἰταλικὰ Πανεπιστήμια, ἐπέρασε τὰς Ἄλπεις καὶ ἐπὶ μίαν δεκαετίαν παρετήρει τὴν πορείαν τῶν ἄστρων ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Domenico Maria Novara. Κατόπιν ἦλθεν εἰς τὴν Padova, εἰς τὴν Ρώμην καὶ τέλος εἰς τὴν Ferrara, ὅπου ἀπέκτησε (31 Μαΐου 1503) τὸν τίτλον τοῦ διδάκτορος τῆς νομικῆς. Κληθεὶς εἰς τὴν πατρίδα ἐχρίσθη πρωθιερεὺς τοῦ καθεδρικοῦ ναοῦ τοῦ Frauenberg, ὅπου

θὸν εἰς τὸ Βατικανὸν ἐκ τῆς Βιβλιοθήκης τῆς βασιλίσσης Χριστίνας τῆς Σουηδίας, ἐλήφθη ὑπὸ τοῦ A. A. Björnbo τὸ δημοσίευμα ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ παρόντος Κεφαλαίου.

καὶ ἀφωσιώθη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὰς μελέτας*. Ἐκ τῶν μελετῶν τούτων προῆλθεν ἕνα φωτεινὸν ἀποτέλεσμα, τὸ ἔνδοξον ἔργον De revolutionibus orbium coelestium (Νυρεμβέργη, 1543), τὸ ὁποῖον εἶχεν ὁ συγγραφεὺς τὴν ἱκανοποίησιν νὰ ἴδῃ τυπωμένον, καθ' ἣν στιγμὴν (24 Μαΐου 1543) τὸ ἀμείλικτον δρέπανον τοῦ θανάτου ἔθετε τέρμα εἰς τὴν ζωήν του.

Τὰ κεφάλαια XII-XIV τοῦ κλασσικοῦ τούτου ἔργου εἶναι ἀρκετὰ διὰ νὰ δώσουν εἰς τὸν Κοπέρνικον μίαν θέσιν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν. Δύο ἐξ αὐτῶν εἶχον ἤδη δημοσιευθῆ τὸ προηγούμενον ἔτος μὲ τὴν ἀξιέπαινον συμβολὴν ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐπέβλεψε καὶ διηύθυνε τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ μεγάλου κοπερνικείου συγγράμματος. Εἶναι πρόσωπον ἀγνώστου ἐπωνύμου, καλουμένου δὲ συνήθως μὲ τὸ ὄνομα Ἰωάννης Ἰωακεὶμ Ραιτικὸς (ἰταλικὰ Giovanni Gioachino Retico, λατινικὰ Rhaeticus), ἐπειδὴ ἐγεννήθη τὸ 1514 εἰς Feldkirh τοῦ Vorarlberg (Rezia). Ἐδίδαξε τὰ μαθηματικὰ ὡς καθηγητὴς εἰς Wittemberg τὸ 1537. Μετὰ δύο ἔτη ἐπέτυχε τὴν ἄδειαν νὰ μεταβῇ πλησίον τοῦ Κοπερνίκου ὅπου καὶ παρέμεινε μέχρι τὸ 1542. Ἐπιστρέφων εἰς τὴν πατρικήν του ἑστίαν, ἔφερε μαζί του τὸ χειρόγραφον τοῦ προαναφερθέντος συγγράμματος πρὸς τὸν σκοπὸν νὰ ἐπιμεληθῇ τῆς ἐκτυπώσεώς του.

Ἐκ τῆς τριγωνομετρίας, ὁ ἔνδοξος ἀστρονόμος διδάσκει μόνον ὅσα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἀφορώντων τὸ σύστημα τοῦ κόσμου. Μερικαὶ ἐν τούτοις περισωθεῖσαι χειρόγραφοι σελίδες δεικνύουν ὅτι ὁ Κοπέρνικος συναντᾶται μὲ τὸν Μαυρόλυκον (§ 258) ὡς πρὸς τὴν εἰσαγωγὴν συστηματικῆς χρήσεως τῆς τεμνούσης, ἔφθασε δὲ μέχρι τοῦ σημείου νὰ καταστρώσῃ ἕνα πίνακα τιμῶν τῆς νέας τριγωνομετρικῆς γραμμῆς.

270. Εἰς τὸν Ραιτικὸν ὀφείλεται ἡ πρώτη δημοσίευσις ἑνὸς τοιούτου πίνακος. Εἰς αὐτὸν πράγματι ὀφείλονται πίνακες τῶν ἓξ κυκλομετρικῶν συναρτήσεων μὲ τόξα μεταβαλλόμενα ἀνὰ 10 δεύτερα λεπτὰ ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 10^7. Οἱ πίνακες οὗτοι φέρουν τὸν τίτλον Canon doctrinae triangulorum, nunc primum a G. J. Rhaetico in lucem edidit[6] (Lipsiae, 1551). Σημειωτέον ὅτι εἰς τοὺς πίνακας αὐτούς, διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Εὐρώπην, αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ ὁρίζονται μέσῳ ὀρθογωνίου τριγώνου. Τοιουτοτρόπως ἀπεκαλύφθη ὁ σύνδεσμος αὐτῶν ὄχι μὲ τὰ τόξα τῆς περιφερείας, ἀλλὰ μὲ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας. Διὰ τὰς συναρτήσεις ἐφαπτομένην, συνεφαπτομένην καὶ συντέμνουσαν δὲν ἐπροτάθησαν ἰδιαίτερα ὀνόματα. Θεω-

* Μερικαὶ ἐξ αὐτῶν ἀναφέρονται εἰς τὴν δημοσίαν οἰκονομίαν καὶ ἔδωσαν ὡς καρπὸν ἕνα ἔργον του ἐπὶ τοῦ νομίσματος, ἀκόμη σήμερον ἐκθειαζόμενον καὶ μελετώμενον ἀπὸ τοὺς σπουδαστὰς τῆς πολιτικῆς οἰκονομίας.

ροῦνται ἁπλῶς, ὅπως καὶ ἡ τέμνουσα, συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου διὰ τῶν σχέσεων:

$$\frac{\text{εφ}\,x}{r} = \frac{\text{ημ}\,x}{\text{συν}\,x}, \quad \frac{\text{σφ}\,x}{r} = \frac{\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x},$$

$$\frac{\text{τεμ}\,x}{r} = \frac{r}{\text{συν}\,x}, \quad \frac{\text{συντ}\,x}{r} = \frac{r}{\text{ημ}\,x}.$$

Τὸ ἔργον τοῦτο ὡς καὶ ὁ ρόλος τὸν ὁποῖον ἔπαιξεν ὁ Ραιτικὸς εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ μεγάλου συγγράμματος τοῦ Κοπερνίκου δὲν ἐξαντλοῦν βεβαίως τὴν εὐεργετικὴν συμβολὴν του εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας. Εἰς Wittemberg, ὅπου εἶχεν ἐπιστρέψει τὸ 1542, δὲν παρέμεινεν ἐπὶ μακρὸν, διότι τὸ αὐτὸ ἔτος ἔλαβε καὶ ἀπεδέχθη πρόσκλησιν νὰ μετατεθῇ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Λειψίας. Ἐκεῖ ἐπεδόθη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἡμιτόνων, τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν τεμνουσῶν κατὰ τόξα αὐξάνοντα ἀνὰ 10 δεύτερα λεπτὰ ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 10^{10}, καὶ ἐπειδὴ ἐχρειάσθη νὰ προστρέξῃ εἰς μίσθωσιν ὑπολογιστῶν πρὸς βοήθειάν του, ὑπεβλήθη, ὡς ἔγραφεν, «εἰς δαπάνην πολλῶν χιλιάδων φλωρινίων»

Τὸ 1573, τέσσαρα ἔτη πρὸ τοῦ θανάτου του, ὁ Johan Richter (τὸν ὁποῖον γνωρίζομεν καὶ ὑπὸ τὸ ἐκλατινισθὲν ὄνομα Pretorius, § 265) τοῦ συνέστησεν ὡς συνεργάτην κάποιον Valentino Otho, γεννηθέντα εἰς Μαγδεμβοῦργον τὸ 1550, τὸν ὁποῖον καὶ ἐδέχθη ὁ Ραιτικὸς πρὸς μεγάλην εὐχαρίστησιν αὐτοῦ καὶ ἐκείνου. Ἂς σημειωθῇ τώρα ὅτι ὁ αὐτοκράτωρ Μαξιμιλιανός, ὁ ὁποῖος ἐδείχθη πρόθυμος ν' ἀναλάβῃ τὰ ἔξοδα τῆς ἐκτυπώσεως τοῦ ἔργου εἰς τὸ ὁποῖον κατεγίνετο ὁ Ραιτικός, ἀπέθανε τὸ 1576, ὁ δὲ διάδοχός του ἐδήλωσεν ὅτι δὲν διέθετε χρήματα διὰ μίαν ἐπιχείρησιν, τῆς ὁποίας δὲν ἦτο εἰς θέσιν ν' ἀντιληφθῇ τὴν σπουδαιότητα.

Κατόπιν αὐτοῦ, διδάσκαλος καὶ μαθητὴς ἀπεφάσισαν νὰ ἀναχωρήσουν εἰς Kaschen τῆς Οὑγγαρίας μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ συναντήσουν τὸν Johan Ruber, πλούσιον εὐγενῆ, ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ ὁποίου ἤλπιζον νὰ εὕρουν ἕνα Μαικήναν. Ἀλλὰ ὁ Ραιτικός, ποὺ εἶχεν ἤδη ἀδιαθετήσει κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως, δὲν ἐβράδυνε νὰ ὑποκύψῃ (1577) καθ' ὁδὸν εἰς τὴν ἀγκάλην τοῦ Otho, τὸν ὁποῖον ἀφῆκε κληρονόμον τῶν ἰδίων του ἔργων, μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τὰ ὑποβάλῃ εἰς μίαν τελευταίαν ἀναθεώρησιν προτοῦ τὰ δώσῃ πρὸς ἐκτύπωσιν. Αἱ ἐλπίδες αἱ στηριχθεῖσαι ἐπὶ τοῦ Ruber δὲν διεψεύσθησαν, κατόπιν τῆς δηλώσεώς του ὅτι ἦτο πρόθυμος ν' ἀναλάβῃ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ μεγάλου ἔργου. Ἐπειδὴ ὅμως ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Otho ἐκλήθη νὰ διδάξῃ εἰς Wittemberg, ὁ ἐκλέκτωρ Αὔγουστος τῆς Σαξωνίας προσεφέρθη ν' ἀναλάβῃ αὐτὸς τὴν ἐκτύπωσιν. Θρησκευτικαὶ ὅμως ἀναταραχαὶ ἠμπόδισαν νὰ λάβῃ τὸ πρᾶγμα συνέχειαν καὶ ὁ Otho ἐσκέφθη νὰ στραφῇ πρὸς

τὸν αὐλικὸν ἐκλέκτορα Φρειδερῖκον IV. Χάρις πράγματι εἰς τὴν γενναιοδωρίαν τοῦ τελευταίου, ἠδυνήθη ἐπὶ τέλους νὰ ἴδῃ τὸ φῶς (1596) τὸ περίφημον βασιλικὸν ἔργον, Opus palatinum de triangulis, ὀνομασθὲν τοιουτοτρόπως πρὸς τιμὴν ἀκριβῶς ἐκείνου τοῦ ἡγεμόνος.

Εἶναι ἕνα ἔργον τὸ ὁποῖον, ἐκτὸς τῶν προαναφερθέντων πινάκων, περιέχει ἀνάπτυξιν τῆς ὕλης τῆς ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, ὅπου διὰ πρώτην φορὰν γίνεται μνεία τῆς ἀμφιβόλου περιπτώσεως εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Ἀναφέρεται ἐπίσης ἡ ἐνδιαφέρουσα λεπτομέρεια ὅτι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων, ἐφηρμόσθησαν οἱ τύποι :

$$\eta\mu\, \nu x = 2\eta\mu(\nu-1)x \,.\, \sigma\upsilon\nu\, x - \eta\mu(\nu-2)x,$$
$$\sigma\upsilon\nu\, \nu x = 2\sigma\upsilon\nu(\nu-1)x \,.\, \sigma\upsilon\nu\, x - \sigma\upsilon\nu(\nu-2)x.$$

Ἡ ἐπιχείρησις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Ραιτικὸς ἀφιέρωσε πολλὰ ἔτη τῆς ζωῆς του, ἦτο τόσον ἐπιβλητικὴ καὶ σημαίνουσα, ὥστε ἠδύνατο εὐλόγως νὰ τοῦ παράσχῃ ἱκανοποίησιν. Ἀλλὰ συμβαίνει μὲ τοὺς ὑπολογιστὰς ἕνα φαινόμενον ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνο ποὺ παρατηρεῖται εἰς τοὺς αὐτοκινητιστάς· ὅπως οἱ τελευταῖοι δὲν αἰσθάνονται ποτὲ ἱκανοποίησιν ἀπὸ τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν τρέχουν, οὕτω καὶ οἱ ὑπολογισταὶ διακατέχονται μονίμως ἀπὸ τὸν πόθον μεγαλυτέρας προσεγγίσεως. Κυριευθεὶς ἀπὸ τὸν πόθον αὐτὸν ὁ Ραιτικὸς ἐπεδόθη μετὰ ζήλου, ὀλίγους μῆνας πρὸ τοῦ θανάτου του, εἰς ἐπανεκτίμησιν τῶν τριγωνομετρκῶν συναρτήσεων μὲ ἀκτῖνα περιφερείας 10^{15}. Ἀλλὰ τὸ τεράστιον αὐτὸ ἔργον δὲν συνετελέσθη ἀπὸ τὸν ἴδιον, οὔτε ἀπὸ τὸν πιστὸν συνεργάτην του Otho, ἀλλ' ἀπὸ ἕνα νέον πρόσωπον, τὸν Βαρθολομαῖον Πιτίσκον.

Γεννηθεὶς εἰς Grüneberg τῆς Σαξωνίας τὸ 1561, ὑπηρέτησεν ὡς ἱεροκῆρυξ εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ ἐκλέκτορος Φρειδερίκου IV, ἀπέθανε δὲ τὸ 1613. Μερικὰ δημοσιεύματά του, σχετικὰ πρὸς τὸ θέμα ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν ἡ λέξις «τριγωνομετρία», εἶναι ἄξια νὰ ἐφελκύσουν τὴν προσοχήν μας.

Ἡ μεγαλυτέρα του ὅμως συμβολὴ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι συνεπλήρωσεν, ἐβελτίωσε καὶ ἐξετύπωσε κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος τοῦ θανάτου του, τὸ μέγα ἔργον ποὺ εἶχεν ἀφίσει ἡμιτελὲς ὁ Ραιτικός. Σημειώνομεν τὴν σταθερὰν χρῆσιν τῶν ὅρων «ἐφαπτομένη» καὶ «τέμνουσα», οἱ ὁποῖοι εἶχον διαδοθῆ ὀλίγον προηγουμένως μεταξὺ τῶν ἐπιστημόνων διὰ τοῦ ἔργου Geometria rotundi (Βασιλεία, 1593), τοῦ ὀφειλομένου εἰς τὸν Thomas Finck (§ 275). Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον προκαλεῖ κατάπληξιν εἰς τὸ μέγα ἔργον εἶναι ὁ ἐπιβλητικὸς ὄγκος τῶν διεξαχθέντων ὑπολογισμῶν καὶ ἡ ἀκρίβεια τῶν ἐπιτευχθέντων ἀποτελεσμάτων. Φέρονται ἐγγεγραμμέναι ἄνω τῶν 32400 τιμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, μόνον 110 ἀνεγνωρί-

σθησαν ὡς χρήζουσαι διορθώσεως. Παρόμοιον ἔργον δὲν ὑπάρχει ἄλλο μὲ τοιαύτην ἀξίαν καὶ εὐρύτητα εἰς τρόπον, ὥστε πολὺ δικαίως ὁ Πιτίσκος ἠδυνήθη νὰ βεβαιώσῃ εἰς τὸν Πρόλογόν του, ὅτι τὸ ὑπ' αὐτοῦ δημοσιευόμενον ἔργον θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέσον διορθώσεως ὅλων τῶν ἀναλόγων πινάκων, ὑφισταμένων ἢ μελλοντικῶν *.

Tycho Brahe

271. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγεται ὅτι ἡ τριγωνομετρία κατὰ τὴν ἐποχήν, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος, ἐθεωρεῖτο πάντοτε ὡς μία θεραπαινὶς τῆς ἀστρονομίας. Διόλου παράδοξον λοιπόν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἐργατῶν τῆς τριγωνομετρίας ἀπαντῶμεν ἕνα ἄλλον ἀστρονόμον παγκοσμίου φήμης, τὸν Tycho Brahe. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Knudstorp τῆς Δανίας τὴν 14 Δεκεμβρίου 1546 καὶ ἀπέθανεν εἰς Πράγαν τὴν 13 Ὀκτωβρίου 1601. Ἡ εὔνοια τοῦ βασιλέως Φρειδερίκου II, τοῦ ἐπέτρεψε νὰ διευθύνῃ ὁ ἴδιος τὴν κατασκευὴν τοῦ διασήμου ἀστεροσκοπείου τοῦ Uraniburg, ὅπου εἰργάσθη κατὰ τὴν περίοδον 1576-1597. Αἱ πανουργίαι ζηλοτυπούντων αὐλικῶν, περιβληθέντων μὲ ἐξουσίαν, μετὰ τὸν θάνατον τοῦ βασιλέως, τὸν ἠνάγκασαν, κατὰ μίαν περίοδον ἀντιβασιλείας, νὰ μεταναστεύσῃ καὶ νὰ τερματίσῃ τὸν βίον ἐκτὸς τῶν ὁρίων τῆς πατρίδος του, εἰς τὴν Πράγαν, ὡς φιλοξενούμενος τοῦ αὐτοκράτορος Ροδόλφου.

Ἐὰν δὲν ἦτο ἐφευρέτης, ὑπῆρξε πάντως δραστήριος ὑποκινητὴς τῆς ἰδέας τῆς προσθαφαιρέσεως, τοῦ τεχνάσματος δηλαδὴ ἐκείνου — ἀληθῶς πολυτίμου πρὸ τῆς ἐπινοήσεως τῶν λογαρίθμων — δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ὁποίου τρέπεται ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν. Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ μίαν σύντομον πραγματείαν ἀναγομένην εἰς τὸ ἔτος 1591, ἀλλ' ἡ ὁποία μόλις τὸ 1896 διεδόθη εἰς τὸν κόσμον ὑπὸ μορφὴν λιθογραφικῆς ἀναπαραγωγῆς**.

Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέα τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον ἐφαρμόζει τὴν προσθαφαίρεσιν ὁ δανὸς ἀστρονόμος, ἄς ἴδωμεν πῶς κάμνει χρῆσιν αὐτῆς εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν του b, c καὶ τῆς

---

* Ἐλέχθη καὶ ἐπιστεύθη ὅτι ὁ Πιτίσκος ἐχρησιμοποίησε τὴν τελείαν πρὸς χωρισμὸν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου. Εἰς τὴν πραγματικότητα ἐχρησιμοποίησε τὴν τελείαν μὲ ἄλλον σκοπόν.

** Ἡ ἐν λόγῳ πραγματεία συνετάχθη ἀπὸ τὸν T. Brahe μὲ τὴν συμπαράστασιν τοῦ βοηθοῦ του P. Wittich πρὸς ἀποκλειστικὴν χρῆσιν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι εἰργάζοντο ὑπὸ τὴν διεύθυνσίν του. Μεταξὺ αὐτῶν ἦτο ὁ Nicolas Raymarus Ursus (§ 281), ὅστις, δυσηρεστημένος μὲ τὸν διδάσκαλόν του, παρεβίασε τὴν ἀναληφθεῖσαν ὑποχρέωσιν νὰ τηρήσῃ μυστικὴν τὴν προσθαφαίρεσιν, δημοσιεύσας τοὺς οὐσιώδεις τύπους εἰς τὸ ἔργον του Fundamentum astronomicum (Argentorati, 1588). Σημειωτέον ὅτι οἱ τύποι αὐτοὶ δὲν ἐφείλκυσαν ἀμέσως τὴν προσοχήν, τῆς ὁποίας ἦσαν ἄξιοι.

σθησαν ὡς χρήζουσαι διορθώσεως. Παρόμοιον ἔργον δὲν ὑπάρχει ἄλλο μὲ τοιαύτην ἀξίαν καὶ εὐρύτητα εἰς τρόπον, ὥστε πολὺ δικαίως ὁ Πιτίσκος ἠδυνήθη νὰ βεβαιώσῃ εἰς τὸν Πρόλογόν του, ὅτι τὸ ὑπ' αὐτοῦ δημοσιευόμενον ἔργον θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέσον διορθώσεως ὅλων τῶν ἀναλόγων πινάκων, ὑφισταμένων ἢ μελλοντικῶν *.

Tycho Brahe

271. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγεται ὅτι ἡ τριγωνομετρία κατὰ τὴν ἐποχήν, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος, ἐθεωρεῖτο πάντοτε ὡς μία θεραπαινὶς τῆς ἀστρονομίας. Διόλου παράδοξον λοιπόν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἐργατῶν τῆς τριγωνομετρίας ἀπαντῶμεν ἕνα ἄλλον ἀστρονόμον παγκοσμίου φήμης, τὸν Tycho Brahe. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Knudstorp τῆς Δανίας τὴν 14 Δεκεμβρίου 1546 καὶ ἀπέθανεν εἰς Πράγαν τὴν 13 Ὀκτωβρίου 1601. Ἡ εὔνοια τοῦ βασιλέως Φρειδερίκου II, τοῦ ἐπέτρεψε νὰ διευθύνῃ ὁ ἴδιος τὴν κατασκευὴν τοῦ διασήμου ἀστεροσκοπείου τοῦ Uraniburg, ὅπου εἰργάσθη κατὰ τὴν περίοδον 1576-1597. Αἱ πανουργίαι ζηλοτυπούντων αὐλικῶν, περιβληθέντων μὲ ἐξουσίαν, μετὰ τὸν θάνατον τοῦ βασιλέως, τὸν ἠνάγκασαν, κατὰ μίαν περίοδον ἀντιβασιλείας, νὰ μεταναστεύσῃ καὶ νὰ τερματίσῃ τὸν βίον ἐκτὸς τῶν ὁρίων τῆς πατρίδος του, εἰς τὴν Πράγαν, ὡς φιλοξενούμενος τοῦ αὐτοκράτορος Ροδόλφου.

Ἐὰν δὲν ἦτο ἐφευρέτης, ὑπῆρξε πάντως δραστήριος ὑποκινητὴς τῆς ἰδέας τῆς προσθαφαιρέσεως, τοῦ τεχνάσματος δηλαδὴ ἐκείνου — ἀληθῶς πολυτίμου πρὸ τῆς ἐπινοήσεως τῶν λογαρίθμων — δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ὁποίου τρέπεται ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν. Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ μίαν σύντομον πραγματείαν ἀναγομένην εἰς τὸ ἔτος 1591, ἀλλ' ἡ ὁποία μόλις τὸ 1896 διεδόθη εἰς τὸν κόσμον ὑπὸ μορφὴν λιθογραφικῆς ἀναπαραγωγῆς**.

Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέα τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον ἐφαρμόζει τὴν προσθαφαίρεσιν ὁ δανὸς ἀστρονόμος, ἂς ἴδωμεν πῶς κάμνει χρῆσιν αὐτῆς εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν του b, c καὶ τῆς

---

* Ἐλέχθη καὶ ἐπιστεύθη ὅτι ὁ Πιτίσκος ἐχρησιμοποίησε τὴν τελείαν πρὸς χωρισμὸν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου. Εἰς τὴν πραγματικότητα ἐχρησιμοποίησε τὴν τελείαν μὲ ἄλλον σκοπόν.

** Ἡ ἐν λόγῳ πραγματεία συνετάχθη ἀπὸ τὸν T. Brahe μὲ τὴν συμπαράστασιν τοῦ βοηθοῦ του P. Wittich πρὸς ἀποκλειστικὴν χρῆσιν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι εἰργάζοντο ὑπὸ τὴν διεύθυνσίν του. Μεταξὺ αὐτῶν ἦτο ὁ Nicolas Raymarus Ursus (§ 281), ὅστις, δυσηρεστημένος μὲ τὸν διδάσκαλόν του, παρεβίασε τὴν ἀναληφθεῖσαν ὑποχρέωσιν νὰ τηρήσῃ μυστικὴν τὴν προσθαφαίρεσιν, δημοσιεύσας τοὺς οὐσιώδεις τύπους εἰς τὸ ἔργον του Fundamentum astronomicum (Argentorati, 1588). Σημειωτέον ὅτι οἱ τύποι αὐτοὶ δὲν ἐφείλκυσαν ἀμέσως τὴν προσοχήν, τῆς ὁποίας ἦσαν ἄξιοι.

περιεχομένης γωνίας A. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον:

$$\text{συν}\, a = \frac{1}{2} [\,\text{συν}(b - c) + \text{συν}(b + c)\,] +$$

$$+ \frac{1}{2} [\,\text{συν}(A + \varphi) + \text{συν}(A - \varphi)\,],$$

ὅπου ἡ βοηθητικὴ γωνία δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{συν}\, \varphi = \frac{1}{2} [\,\text{συν}(b - c) - \text{συν}(b + c)\,].$$

Ὁ Tycho Brahe ἀξίζει ἐπίσης ἰδιαιτέρας μνείας ἐκ μέρους μας, διότι καὶ ἂν ἀκόμη δὲν εἰσήγαγεν ὁ ἴδιος πρῶτος εἰς τὴν ἐπιστήμην τὴν ἔννοιαν τοῦ «συμπληρωματικοῦ τριγώνου» ἑνὸς δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, εἰς αὐτὸν πάντως ἀνήκει ὁ τίτλος προδρόμου τοῦ Viète (§ 276) διὰ τὴν εὕρεσιν καὶ χρησιμοποίησιν τῆς σχέσεως:

$$\text{συν}\, A = \text{ημ}\, B\, \text{ημ}\, C\, \text{συν}\, a - \text{συν}\, B\, \text{συν}\, C,$$

ἡ ὁποία ἀπορρέει ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ συνημιτόνου, ἐφαρμοζομένου ἀκριβῶς εἰς τὸ συμπληρωματικὸν τρίγωνον.

Ἂς προσθέσωμεν ὅτι ἀπὸ τὸν N. R. Ursus ἔλαβε γνῶσιν τῆς προσθαφαιρέσεως ἕνας ἐλβετός, ὁ Jobst Bürgi, τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν ἀκόμη (§ 296) περαιτέρω, ὅταν εἰργάζετο μαζί του ὡς βοηθὸς εἰς τὸ Ἀστεροσκοπεῖον τοῦ Kassel, καὶ ἔδωσεν εἰς τοὺς τύπους ἀποδείξεις ἱκανοποιητικάς. Τούτων ἔλαβε γνῶσιν ὁ Κλάβιος (§ 283), ὁ ὁποῖος παρεμβάλλων αὐτὰς εἰς τὰ ἔργα του, συνετέλεσεν εἰς τὴν εὐρεῖαν διάδοσίν των.

Viète, Stévin, Snellius

272. Αἱ λεπτομερειακαὶ τελειοποιήσεις, τὰς ὁποίας ἐπέφερον οἱ ἀστρονόμοι εἰς μίαν ἐπιστήμην καθημερινῆς χρήσεως καὶ αἱ τεράστιαι ὑπολογιστικαὶ πράξεις, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεβάλλοντο διὰ νὰ δύνανται νὰ περιγράφουν καὶ νὰ προβλέπουν μὲ ἀκρίβειαν ὁλοὲν μεγαλυτέραν τὰ οὐράνια φαινόμενα, μολονότι θαυμασταὶ καὶ ἀξιέπαινοι, παρουσιάζουν μετριώτερον ἐνδιαφέρον ἐνώπιον τῶν προόδων, τὰς ὁποίας ὀφείλει ἡ τριγωνομετρία εἰς ἕνα μεγάλον ἐργάτην τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν, τὸν γνωστόν μας F. Viète (§ 249). Εἰς τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν ὁ Viète ἀφιέρωσε μέγα μέρος τῶν δυνάμεών του, θεωρῶν, ὅπως ἔλεγεν, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ μεγίστην δόξαν τῶν μαθηματικῶν, διότι καθιστᾷ αὐτοὺς ἱκανοὺς νὰ ὑποβάλουν εἰς ἕνα θαυμάσιον σύστημα λογισμοῦ οὐρανόν, γῆν καὶ θάλασσαν.

Ἀτυχῶς τὸ σύνολον τῶν ἔργων τοῦ Viète ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου δὲν

περιεχομένης γωνίας A. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον:

$$\text{συν}\, a = \frac{1}{2}\,[\,\text{συν}(b - c) + \text{συν}(b + c)\,] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[\,\text{συν}(A + \varphi) + \text{συν}(A - \varphi)\,],$$

ὅπου ἡ βοηθητικὴ γωνία δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{2}\,[\,\text{συν}(b - c) - \text{συν}(b + c)\,].$$

Ὁ Tycho Brahe ἀξίζει ἐπίσης ἰδιαιτέρας μνείας ἐκ μέρους μας, διότι καὶ ἂν ἀκόμη δὲν εἰσήγαγεν ὁ ἴδιος πρῶτος εἰς τὴν ἐπιστήμην τὴν ἔννοιαν τοῦ «συμπληρωματικοῦ τριγώνου» ἑνὸς δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, εἰς αὐτὸν πάντως ἀνήκει ὁ τίτλος προδρόμου τοῦ Viète (§ 276) διὰ τὴν εὕρεσιν καὶ χρησιμοποίησιν τῆς σχέσεως:

$$\text{συν}\, A = \text{ημ}\, B\, \text{ημ}\, C\, \text{συν}\, \alpha - \text{συν}\, B\, \text{συν}\, C,$$

ἡ ὁποία ἀπορρέει ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ συνημιτόνου, ἐφαρμοζομένου ἀκριβῶς εἰς τὸ συμπληρωματικὸν τρίγωνον.

Ἂς προσθέσωμεν ὅτι ἀπὸ τὸν N. R. Ursus ἔλαβε γνῶσιν τῆς προσθαφαιρέσεως ἕνας ἑλβετός, ὁ Jobst Bürgi, τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν ἀκόμη (§ 296) περαιτέρω, ὅταν εἰργάζετο μαζί του ὡς βοηθὸς εἰς τὸ Ἀστεροσκοπεῖον τοῦ Kassel, καὶ ἔδωσεν εἰς τοὺς τύπους ἀποδείξεις ἱκανοποιητικάς. Τούτων ἔλαβε γνῶσιν ὁ Κλάβιος (§ 283), ὁ ὁποῖος παρεμβάλλων αὐτὰς εἰς τὰ ἔργα του, συνετέλεσεν εἰς τὴν εὐρεῖαν διάδοσίν των.

Viète, Stévin, Snellius

272. Αἱ λεπτομερειακαὶ τελειοποιήσεις, τὰς ὁποίας ἐπέφερον οἱ ἀστρονόμοι εἰς μίαν ἐπιστήμην καθημερινῆς χρήσεως καὶ αἱ τεράστιαι ὑπολογιστικαὶ πράξεις, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεβάλλοντο διὰ νὰ δύνανται νὰ περιγράφουν καὶ νὰ προβλέπουν μὲ ἀκρίβειαν ὁλοὲν μεγαλυτέραν τὰ οὐράνια φαινόμενα, μολονότι θαυμασταὶ καὶ ἀξιέπαινοι, παρουσιάζουν μετριώτερον ἐνδιαφέρον ἐνώπιον τῶν προόδων, τὰς ὁποίας ὀφείλει ἡ τριγωνομετρία εἰς ἕνα μεγάλον ἐργάτην τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν, τὸν γνωστόν μας F. Viète (§ 249). Εἰς τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν ὁ Viète ἀφιέρωσε μέγα μέρος τῶν δυνάμεών του, θεωρῶν, ὅπως ἔλεγεν, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ μεγίστην δόξαν τῶν μαθηματικῶν, διότι καθιστᾷ αὐτοὺς ἱκανοὺς νὰ ὑποβάλουν εἰς ἕνα θαυμάσιον σύστημα λογισμοῦ οὐρανόν, γῆν καὶ θάλασσαν.

Ἀτυχῶς τὸ σύνολον τῶν ἔργων τοῦ Viète ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου δὲν

εὑρίσκεται εἰς τὴν διάθεσιν ὅλων. Πράγματι τὸ ἔργον Canon mathematicus seu ad triangula cum appendici, ποὺ ἐδημοσίευσε τὸ 1579 (ἡ ἐκτύπωσις διήρκεσεν ὀκτὼ ἔτη!) ἀπεκλείσθη ἀπὸ τὴν συλλογὴν τῶν Ἁπάντων του, διότι ὁ ἴδιος ὁ συγγραφεὺς τὸ ἐχαρακτήρισεν ὡς «ἀτυχῶς δημοσιευθέν» (infeliciter editus). Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν εἶναι τόσον πολλὰ τὰ ἀπαντώμενα τυπογραφικὰ λάθη, γίνεται πιστευτόν, ὅτι ἄλλα αἴτια, προωρισμένα νὰ μείνουν ἐς ἀεὶ ἄγνωστα, πρέπει νὰ ὤθησαν τὸν συγγραφέα εἰς τὴν ἀποκήρυξιν τοῦ δημιουργήματός του. Τὸ ἔργον, ἄλλωστε, ἀντιθέτως πρὸς τὴν γνώμην τοῦ Viète, ἐκρίθη ἀπὸ τὸ κοινὸν εὐμενῶς καὶ ἐθεωρήθη ἀντάξιόν του, πρᾶγμα ἀποδεικνυόμενον ἀπὸ τὴν πιστὴν ἀνατύπωσιν, ἡ ὁποία τοῦ ἐγένετο τὸ 1609, εἰς Παρισίους, πρὸς ἱκανοποίησιν μεγάλου ἀριθμοῦ ἀνθρώπων ἐπιθυμούντων νὰ τὸ μελετήσουν.

Ἡ ἐξέτασις τοῦ ἔργου τούτου δεικνύει ὅτι ὁ Viète ἐγνώριζε καὶ ἐφήρμοζε τὸν μικρότερον τῶν «κανόνων» τοῦ Ραιτικοῦ. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὴν κατανομὴν εἰς τρία ζεύγη τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀκτῖνος 10^5 ὡς ἐπίσης ἀπὸ τὴν γενικὴν διάταξιν τοῦ περιεχομένου τῶν πινάκων. Ἐν τούτοις αἱ μέθοδοι τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι ἀσφαλῶς πρωτότυποι καὶ ἂν δὲν ἐπιλαμβανώμεθα ἐδῶ τῆς ἐκθέσεώς των, δὲν σημαίνει ὅτι δὲν ἀποδίδομεν εἰς αὐτοὺς μεγάλην ἀξίαν, ἀλλὰ μόνον διότι δὲν μᾶς τὸ ἐπιτρέπουν τὰ ὅρια τῆς παρούσης Ἱστορίας.

273. Εἰς τοὺς προαναφερθέντας πίνακας ἐπισυνάπτεται, ὡς Δεύτερον Μέρος, ἕνα ἔργον μὲ τίτλον F. Vietaei universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis, (Γενικὴ ἐπισκόπησις τοῦ μαθηματικοῦ κανόνος εἰς βιβλίον ἕνα). Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εὑρίσκομεν τὰς πρώτας ἀποδείξεις τοῦ γεγονότος ὅτι εἰς τὸν Viète ὀφείλεται ἡ δημιουργία μιᾶς γωνιομετρίας αὐτοτελοῦς, ὡς ἐπίσης ἡ πρώτη συστηματικὴ ἔκθεσις, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν τῆς Δύσεως, τῶν μεθόδων ἐπιλύσεως ἑνὸς τριγώνου ἐπιπέδου ἢ σφαιρικοῦ. Ἐν τούτοις τὰ πλέον πειστικὰ τεκμήρια τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου ἀπαντῶνται εἰς τὸ γνωστόν μας ὑπόμνημα (§ 266), τὸ τιτλοφορούμενον Variorum de rebus mathematicis responsorum Lib. VIII (1593) (Διαφόρων ἀπαντήσεων εἰς μαθηματικὰ ζητήματα, Βιβλία VIII).

Μεταξὺ τῶν καινοτομιῶν, τὰς ὁποίας εἰσάγει ὁ Viète εἰς τὸν κλάδον ποὺ ἐξετάζομεν, περιλαμβάνεται καὶ ἡ χρῆσις εἰδικῶν ὀνομάτων διὰ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Θεωροῦμεν ὅμως περιττὴν τὴν ἀναγραφήν των ἐδῶ, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι δὲν ἔτυχον ἀποδοχῆς ἐκ μέρους τῶν ἁρμοδίων, οὔτε κατέλαβον μόνιμον θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην. Ἀναφέρομεν ὅμως

μερικὰς ἐκ τῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας εἶχεν ἤδη παρουσιάσει εἰς τὴν γραφὴν τοῦ 1579:

$$ημ\, x = ημ(60^o + x) - ημ(60^o - x)$$

$$συντ\, x + σφ\, x = σφ\, \frac{x}{2}$$

$$συντ\, x - σφ\, x = εφ\, \frac{x}{2}$$

$$ημ\, x - ημ\, y = 2ημ\, \frac{x-y}{2} \cdot συν\, \frac{x+y}{2}$$

$$συν\, y - συν\, x = 2ημ\, \frac{x-y}{2} \cdot ημ\, \frac{x+y}{2}$$

Δὲν εἶναι γνωστὸν διὰ ποίας ὁδοῦ ἔφθασεν ὁ συγγραφεὺς εἰς αὐτὰ τὰ ἐξαγόμενα. Γνωστοῦ ὅμως ὄντος ὅτι ὁ Viète ἦτο μέχρι μυελοῦ ὀστέων ἐμπεποτισμένος ἀπὸ τὰς ἀρχαίας μεθόδους, εἶναι φυσικὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔκαμε χρῆσιν γεωμετρικῶν σκέψεων. Σημειώνομεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ, ὅτι τὰ κενὰ ποὺ ἄφησεν ὁ Viète συνεπληρώθησαν ἀπὸ τὸν M. Bressieu, εἰς τὸ ἔργον, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν προηγουμένως (§ 242)

Ἄλλας σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπίσης ὁμοιάζουν μὲ μετεωρίτας ριφθέντας ἐξ οὐρανοῦ, συναντῶμεν ὁμαδὸν εἰς τὴν γραφὴν τοῦ 1593. Μία πρώτη ὁμὰς περιλαμβάνει τὰς θεμελιώδεις σχέσεις διὰ τὴν προσθαφαίρεσιν. Μία δευτέρα περιέχει σχέσεις μεταξὺ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων μιᾶς, δύο ἢ τριῶν γωνιῶν. Μεγαλυτέρας ἀξίας εἶναι ἡ τρίτη ὁμάς, διότι εἰς αὐτὴν ἀπαντᾶται, μεταξὺ ἄλλων, ἡ σήμερον πολὺ γνωστὴ σχέσις:

$$\frac{ημ\, x + ημ\, y}{ημ\, x - ημ\, y} = \frac{εφ\, \frac{x+y}{2}}{εφ\, \frac{x-y}{2}}$$

Θὰ εἶχον θέσιν ἐδῶ καὶ οἱ τύποι πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων, ἐπίσης εὑρεθέντες ὑπὸ τοῦ Viète, ἂν δὲν εἴχομεν ἀναφέρει αὐτοὺς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου του Notae priores ad logisticen speciosam (Πρῶται ἐνδείξεις πρὸς ἕνα κομψὸν λογισμόν, § 251). Αἱ σχέσεις αὐταὶ ἀπαντῶνται ἐκ νέου, ἄνευ ἀποδείξεως καὶ ἐκπεφρασμέναι διὰ λόγων, εἰς ἕνα κείμενον συνταχθὲν ἐπίσης ὑπὸ τοῦ Anderson, καὶ φέρον τὸν δίγλωσσον τίτλον Ad angulares sectiones theoremata καθολικώτερα demonstrata (Περὶ διαιρέσεως γωνιῶν γενικώτερα θεωρήματα μετ' ἀποδείξεως αὐτῶν).

Αἱ ἐν λόγῳ σχέσεις δὲν ἐκφωνοῦνται ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ποὺ εἰ-

ναι οἰκεία εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας, ἀλλὰ μὲ μίαν σειρὰν (εἰς δύο στήλας) συγγενῶν σχέσεων, τῶν ὁποίων εἶναι προφανὴς ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ. ἀξίζει νὰ τὰς ἀναφέρωμεν:

$$
\begin{array}{llll}
2\,\text{συν}\,x & = u & 2\,\text{ημ}\,x & = u \\
2\,\text{συν}\,2x & = u^2 - 2 & 2\,\text{ημ}\,2x & = \upsilon \\
2\,\text{συν}\,3x & = u^3 - 3u & 2u\,\text{ημ}\,3x & = \upsilon^2 u^2 \\
2\,\text{συν}\,4x & = u^4 - 4u^2 + 2 & 2u^2\,\text{ημ}\,4x & = \upsilon^3 - 2u^2\upsilon \\
2\,\text{συν}\,5x & = u^5 - 5u^3 + 5u & 2u^3\,\text{ημ}\,5x & = \upsilon^4 - 3u^2\upsilon^2 + 3u^4 \\
2\,\text{συν}\,6x & = u^6 - 6u^4 + 9u^2 - 2 & 2u^4\,\text{ημ}\,6x & = \upsilon^5 - 4u^2\upsilon^3 + 3u^4\upsilon \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Αἱ ἀποδείξεις ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἐπανειλημμένως μνημονευθεῖσαν ἔκδοσιν εἶναι τοῦ Anderson, πιστοῦ διερμηνέως τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ. Εἰς τὸν τελευταῖον ὅμως ὀφείλονται οἱ ὑπέροχοι λόγοι ποὺ ἀναγράφονται ἐν κατακλεῖδι καὶ τοὺς ὁποίους ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ: «ergo a nemine prius agnita Mysteria, tam in Atrithmeticis quam Geometricis, pandit Analytice sectionum Angularium» (ἡ διαίρεσις τῶν γωνιῶν διαφωτίζει λοιπὸν ἀναλυτικῶς τὰ ὑπὸ πάντων πρὶν ἀγνοούμενα μυστήρια τόσον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὅσον καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν). Γράφων αὐτὰς τὰς λέξεις διετέλει ἀσφαλῶς ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ γεγονότος, ὅτι εἶχε προηγηθῆ αὐτοῦ ἕνας διακεκριμένος μαθηματικός, ποὺ ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 271), ὁ Jobst Bürgi. Ὁ Viète ἐν τούτοις ἐβάδισεν ἀκόμη μακρύτερα, ἀποδεικνύων ὡς δεινὸς χειριστὴς τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, πῶς οἱ τύποι πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων ἠδύναντο νὰ χρησιμεύσουν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος. Ἀληθὲς εἶναι ὅτι περιωρίσθη εἰς τὴν διαίρεσιν διὰ 3, 5 καὶ 7, ἀλλ' ἐκ τῶν λεγομένων του συνάγεται ὅτι ἔβλεπε καθαρὰ τὴν δυνατότητα ἐφαρμογῆς τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς οἱανδήποτε περίπτωσιν.

274. Ἡ μεγάλη οἰκειότης τοῦ Viète μὲ τοὺς τύπους πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων τὸν κατέστησεν ἱκανὸν νὰ λύσῃ «ἀμέσως» («ut legi, ut solvi», ὅπως ἔγραφεν ὁ ἴδιος: μὲ τὴν ἀνάγνωσιν καὶ ἡ λύσις) τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπρότεινε πρὸς λύσιν εἰς ὅλους τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ κόσμου ὁ Adrianus Romanus. Τὸ πρόβλημα ἦτο τὸ ἑξῆς: «Ἐὰν ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος πρὸς ἐκεῖνον τοῦ x πρὸς

$$
\begin{aligned}
&45\,x - 3795\,x^3 + 95634x^5 - 1138500\,x^7 - 7811375\,x^9 - \\
&- 34512075\,x^{11} + 105306075\,x^{13} - 232676280\,x^{15} + \\
&+ 384942375\,x^{17} - 488494125\,x^{19} + 483841800\,x^{21} -
\end{aligned}
$$

$$- 378658800\,x^{23} + 236030652\,x^{25} - 117679100\,x^{27} +$$
$$+ 46955700\,x^{29} - 14945040\,x^{31} + 3764565\,x^{33} -$$
$$- 740259\,x^{35} + 111150\,x^{37} - 12300\,x^{39} + 945\,x^{41} -$$
$$- 45\,x^{43} + x^{45},$$

νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου, γνωστοῦ ὄντος τοῦ δευτέρου»*.

Ὁ προτείνων προσέθεσε τρία παραδείγματα, ἀπαιτοῦντα τελικῶς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ θεωρουμένου λόγου ἦτο ἴσος πρὸς

$$\sqrt{1\,{}^3/_4 - \sqrt{{}^5/_{16}} - \sqrt{1\,{}^7/_8 - \sqrt{{}^{45}/_{64}}}}$$

Ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος ἄγει προφανῶς εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{45x - 3795\,x^3 + \ldots + x^{45}},$$

ἔνθα b δεδομένον, καὶ κατὰ συνέπειαν εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἡ ἐξίσωσις παρέχει τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ a. Δικαίως λοιπὸν ὁ Viète ἐχαρακτήρισε τὸ πρόβλημα «γελοῖον». Ἀναγνωρίσας ὅμως εἰς τὸ πολυώνυμον, ποὺ ἔγραψεν ὁ Romanus, τὴν ἔκφρασιν ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς τόξου ἐπὶ 45, διώρθωσε τὴν ληφθεῖσαν ἐκφώνησιν, μετασχηματίζων τὸ τεθὲν πρόβλημα εἰς ἄλλο: νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$45\,x - 3795\,x^3 + \ldots + x^{45} = c,$$

ὅπου c μία καθοριζομένη σταθερά. Ἂν γίνῃ δεκτόν, ὅτι αὐτὴ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 2, τότε δύναται νὰ δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν 2 ημα. Καὶ τότε ὁ Viète δὲν ἐβράδυνε ν' ἀναγνωρίσῃ ὅτι εὑρίσκετο ἐνώπιον ἑνὸς προβλήματος διαιρέσεως μιᾶς γωνίας εἰς 45 ἴσα μέρη καὶ ἀμέσως ἐξέφρασεν ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν τὰς 23 θετικὰς ρίζας $\left(2\,\text{ημ}\,\frac{a}{45}\right)$ τῆς ἐξισώσεως ἐκείνης. Δὲν παρέλειψε μάλιστα νὰ σημειώσῃ ὅτι τὸ πρόβλημα ἠδύνατο νὰ λυθῇ εἰς τρεῖς χρόνους, τουτέστι μὲ δύο τριχοτομήσεις καὶ μίαν πεντηχοτόμησιν. Παρετήρησε τέλος, ὅτι ἡ προαναφερθεῖσα μερικὴ περίπτωσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ δοθεῖσα σταθερὰ εἶναι ἡ χορδὴ τῶν 24^0. Εἰς ἀνταπόδοσιν, ἐπρότεινεν ὁ Viète εἰς τὸν van Roomen τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κύκλου ἐφαπτομένου τριῶν ἄλλων καὶ μὴ λαβὼν παρὰ τὴν λύσιν τὴν στηριζομένην

* Αἱ λεπτομέρειαι γύρω ἀπὸ τὰς περιστάσεις, ὑπὸ τὰς ὁποίας ὁ Viète ἔλυσεν αὐτὸ τὸ πρόβλημα, ἔχουν ἐκτεθῆ ἀπὸ τοὺς ἱστορικοὺς τῆς ἐποχῆς καὶ ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ A. Quetelet εἰς τὸ βιβλίον του: Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges (Bruxelles, 1834).

ἐπὶ τῆς χρήσεως δύο ὑπερβολῶν, ἐπρότεινε τὴν ἰδικήν του, καθαρῶς κλασσικοῦ στύλ, τὴν ὁποίαν καὶ κατεχώρησεν εἰς τὸ ἔργον του Apollonius Gallus (§ 266).

275. Ἀφίνομεν τώρα τὴν θεωρίαν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων, διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τί ἀκριβῶς ὀφείλει εἰς τὸν Viète ἡ κυρίως εἰπεῖν τριγωνομετρία.

Ὡς πρὸς τὴν ἐπίπεδον, εὑρίσκομεν ἤδη τὰς θεμελιώδεις σχέσεις, ποὺ συνδέουν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰς τὸ ἔργον του Canon τοῦ 1579. Ἐκ τούτων μέσῳ ἑνὸς γνωστοτάτου συλλογισμοῦ (στηριζομένου ἐπὶ τῆς θεωρήσεως τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας) ἔφθασεν εἰς τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων διὰ τυχὸν τρίγωνον. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὁ Viète γράφει ὑπὸ μίαν μορφὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἑξῆς:

$$\frac{a}{\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{C}{2}}=\frac{b}{\sigma\varphi\frac{C}{2}+\sigma\varphi\frac{A}{2}}=\frac{c}{\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}}.$$

Ἀπὸ τοῦ 1579 ὁ Viète ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὸ ἔργον Var. de reb. math. resp. ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu A}.$$

Ἐκεῖ ἀπαντᾶται ἐπίσης καὶ ἡ σημαντικὴ ἀναλογία:

$$\frac{b+c}{b-c}=\varepsilon\varphi\frac{B+C}{2}:\varepsilon\varphi\frac{B-C}{2}.$$

Ὡς πρὸς τὴν τελευταίαν, παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ εἶχε δημοσιευθῆ εἰς ἕνα ἔργον εὐρυτάτης διαδόσεως, τὸ ὁποῖον παρεμπιπτόντως ἐμνημονεύσαμεν ἤδη (§ 270) ὑπὸ τὸν τίτλον Geometria rotundi (Βασιλεία, 1583) τοῦ Thomas Finck. Ὁ συγγραφεύς, γεννηθεὶς εἰς Flensburg τὸ 1561, ἀφοῦ διέμεινεν εἰς Ἑλβετίαν καὶ κατόπιν εἰς Ἰταλίαν, διὰ λόγους σπουδῶν, ἔγινεν ἰατρὸς τοῦ δουκὸς τοῦ Schleswig-Holstein, κατόπιν δὲ (1590) καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Κοπενχάγης, ὅπου καὶ ἀπέθανε, σχεδὸν ἑκατονταετής, τὸ 1656.

Ἐπιστρέφομεν εἰς τὸν Viète διὰ νὰ σημειώσωμεν ὅτι δύο ἐξισώσεις ποὺ ἔγραψε, κατόπιν ἀπαλοιφῆς μιᾶς βοηθητικῆς μεταβλητῆς, ἄγουν εἰς τὴν σχέσιν:

$$\varepsilon\varphi C=\frac{c\,\eta\mu B}{a-c\,\sigma\upsilon\nu B},$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον:

$$a=b\,\sigma\upsilon\nu C+c\,\sigma\upsilon\nu B,$$

ἡ ὁποία, ἂν καὶ εὑρεθεῖσα ὀλίγον προηγουμένως ἀπὸ τὸν Tycho Brahe,

ἐνεφανίσθη διὰ πρώτην φορὰν τυπωμένη εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον τοῦ γάλλου μαθηματικοῦ.

276. Δὲν εἶναι μικροτέρας σημασίας αἱ συμβολαὶ τοῦ ἰδίου εἰς τὸν κλάδον τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας. Ἤδη εἰς τὸ βιβλίον του Canon ἐπραγματεύθη τὴν θεωρίαν ἐπιλύσεως τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων κατὰ τρόπον τόσον ἄρτιον, ὥστε δύναται μόνον νὰ συγκριθῇ μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ Nasir ed Din δοθεῖσαν θεωρίαν (Τόμος I, § 152). Πράγματι εἰς τοὺς ὑπὸ τούτου καταστρωθέντας πίνακας εὑρίσκονται αἱ θεμελιώδεις σχέσεις ποὺ ὑπεισέρχονται μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, καθὼς καὶ ἄλλαι αἱ ὁποῖαι εἶναι συνέπειαι τούτων καὶ ἄλλαι ἀκόμη (τὸ ἐξαίρομεν ἐπειδὴ εἶναι καθῆκον τοῦ ἱστορικοῦ νὰ σημειώσῃ ἀκόμη καὶ τὰς ἐλλείψεις), αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἁπλᾶς ταυτότητας (παρατήρησις τοῦ Delambre). Εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν σφαιρικῶν μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων, ὁ Viète ἔκαμε χρῆσιν τοῦ «συμπληρωματικοῦ τριγώνου» συζευγνύων τὰς περιπτώσεις ἐπιλύσεως, αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν πλευρῶν μὲ τὰς γωνίας. Τὴν ἀλληλεξάρτησιν αὐτὴν ὠνόμασε μὲ μίαν ἑλληνικὴν λέξιν, ἰδικῆς του κατασκευῆς, πλευρογίκη, ἀλλὰ ὥρισε τὸ δοθὲν τρίγωνον μὲ ὅρους τόσον σκοτεινούς, ὥστε κατέστη δυνατὸν τελικῶς νὰ κατανοηθοῦν μόνον ὅταν ἔφθασαν δι' ἄλλης ὁδοῦ εἰς τὴν αὐτὴν ἔννοιαν.

Παρόμοιον τέχνασμα χρησιμοποιεῖ ὁ Viète, ὅταν ἀντικαθιστᾷ ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχον μίαν τῶν γωνιῶν ἀμβλεῖαν ἢ μίαν πλευρὰν μεγαλυτέραν τεταρτημορίου, μὲ ἄλλο τρίγωνον προσκείμενον μὴ πληροῦν τὴν ἀνωτέρω συνθήκην, ἡ ὁποία ἠδύνατο νὰ ἐμβάλῃ εἰς ἀμηχανίαν οἱονδήποτε μὴ ὄντα εἰς θέσιν νὰ ἐφαρμόσῃ τὰς κυκλικὰς συναρτήσεις εἰς τόξα μεγαλύτερα τεταρτημορίου*.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μὲ δοθείσας πλευράς, ὁ Viète, χρησιμοποιεῖ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, γνωστὸν ἤδη εἰς τὸν Regiomontano (Τόμος I, § 183), τὸ ὁποῖον γράφει ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$\frac{\text{ημ}\, a \cdot \text{ημ}\, b}{\text{συν}\, c \mp \text{συν}\, a\ \text{συν}\, b} = \frac{1}{\text{συν}\, C},$$

ἐνῷ διὰ ν' ἀντιμετωπίσῃ τὸ σύστοιχον πρόβλημα κατέφυγεν εἰς τὴν σχέσιν:

$$\frac{\text{ημ}\, A \cdot \text{ημ}\, B}{\text{συν}\, A\ \text{συν}\, B \pm \text{συν}\, C} = \frac{1}{\text{συν}\, c},$$

ἡ ὁποία, ὑπ' αὐτὴν τὴν μορφήν, ἔκαμε τοιουτοτρόπως τὴν εἴσοδόν της εἰς τὴν ἐπιστήμην, ὅπου ἦτο προωρισμένη νὰ παραμείνῃ. Εἶναι ἐν τούτοις

* Τοιαύτη ἀβεβαιότης ἐξηγεῖ τὴν παρουσίαν τῶν διπλῶν σημείων εἰς τοὺς τύπους ποὺ ἀκολουθοῦν.

καθῆκον μας νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ περὶ οὗ πρόκειται τύπος εἶχε καταστῆ δημοσίας χρήσεως πρὸ τοῦ Viète. Πράγματι ἀναγράφεται, μὲ ρητὴν διαβεβαίωσιν τῆς πρωτοτυπίας του, εἰς τὸ ἔργον Triangulorum geometriae libri quatuor (Τριγωνομετρίας βιβλία 4, Lugduni Bat., 1591) τοῦ βέλγου γεωμέτρου Filippo van Landsberg (1561-1632). Ἡ μόνη διαφορὰ συνίσταται εἰς τὴν γραφήν, ἡ ὁποία ἐκεῖ ἔχει τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\sin \operatorname{ver} C}{\sin \operatorname{ver} C - \sin \operatorname{ver}(180^\circ - A - B)}$$

Ὁμοίως διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας C σφαιρικοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ b, a καὶ ἡ περιεχομένη γωνία A, ὁ Viète χρησιμοποιεῖ τὴν σχέσιν:

$$\frac{\eta\mu\, A\, \sigma\upsilon\nu\tau\, b}{\sigma\varphi\, c \mp \sigma\upsilon\nu\, A\, \sigma\varphi\, b} = \frac{1}{\sigma\varphi\, C},$$

ἡ ὁποία, γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\eta\mu\, A\, \sigma\varphi\, C \pm \sigma\upsilon\nu\, A\, \sigma\upsilon\nu\, b = \eta\mu\, b\, \sigma\varphi\, C$$

προδίδει τὴν ταυτότητά της μὲ ἄλλον βασικὸν τύπον τῆς σημερινῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας.

Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ προθέσωμεν ὅτι, διὰ νὰ χειρισθῇ τὴν περίπτωσιν ἐπιλύσεως ποὺ εὑρίσκεται εἰς συσχέτισιν μὲ τὴν προηγουμένην, ὁ Viète προσφεύγει εἰς τὸν νέον ἀντίστοιχον τύπον:

$$\frac{\eta\mu\, a \cdot \sigma\upsilon\nu\tau\, B}{\varepsilon\varphi\, C \pm \sigma\upsilon\nu\, a \cdot \sigma\varphi\, B} = \frac{1}{\sigma\varphi\, c}.$$

Δὲν ἀρκοῦν ὅλα αὐτὰ διὰ ν' ἀποδείξουν, ὅτι ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Viète ὁ ἐργάτης τῆς τριγωνομετρίας δὲν εἶναι διόλου κατώτερος τοῦ μεγάλου ἀλγεβριστοῦ, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ Κεφ. XVII;

277. Καὶ ἐπειδὴ διὰ ν' ἀξιολογήσωμεν ἕνα διανοούμενον, τίποτε δὲν μᾶς εἶναι χρησιμώτερον ἀπὸ τοῦ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἐπιρροήν, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν οὗτος, δυνάμεθα, εἰς ἐπίρρωσιν τῆς κρίσεώς μας, ν' ἀναφέρωμεν ἕνα ἔργον (Diclides coelometrica, Λονδῖνον 1632), ὀφειλόμενον εἰς ἕνα ἄγγλον, τὸν Nathanael Torpeley (ἀποθ. 1632), ὁ ὁποῖος, ἀπὸ νεαρᾶς ἡλικίας, ἔζη εἰς τὴν οἰκίαν τοῦ Viète ἐκτελῶν χρέη γραμματέως (famulus). Πρόκειται περὶ ἔργου ἐμπεποτισμένου ἀπὸ τὰς ἰδέας τοῦ μεγάλου ἐκείνου, ἀλλ' εἰς τὸ ὁποῖον ἐσημειώθησαν μερικοὶ ἔνδοξοι τύποι, ἀνακαλυφθέντες κατόπιν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἀπὸ τὸν Napier, τοῦ ὁποίου φέρουν καὶ τὸ ὄνομα.

Τῶν γραπτῶν τοῦ Viète, ὅπως καὶ ὅλης τῆς γραμματείας τῆς ἐποχῆς του, ἐπωφελήθη ἀποτελεσματικῶς ὁ ἀρκετὰ γνωστὸς ἀστρονόμος Giovanni Antonio Magini (γεννηθεὶς εἰς Padova τὴν 13 Ἰουνίου 1555, ἀποθανὼν εἰς

Βολωνίαν τὴν 11 Φεβρουαρίου 1617) ἀπὸ τὸ ἐξαίρετον σύγγραμμά του τὸ τιτλοφορούμενον Primum mobile duodecim libris contentum, δημοσιευθὲν εἰς Βολωνίαν τὸ 1609 καὶ περιέχον πίνακας τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ποὺ εἶχον ὑπολογισθῆ περίπου μίαν δεκαετίαν προηγουμένως. Εἶναι ἔργον κατοπτρίζον τὴν λογιστικὴν δεξιοτεχνίαν τοῦ συγγραφέως. Εἰς τὸ βιβλίον του ὀνομάζει τὸ συνημίτονον «sinus secundus», τὴν συνεφαπτομένην «tangens secunda» καὶ τὴν συντέμνουσαν «secans secunda».

Ἄλλο δεῖγμα τῆς εὐεργετικῆς ἐπιδράσεως τοῦ Viète κατὰ τοὺς χρόνους ποὺ δὲν ἀπέχουν πολὺ ἀπὸ τοὺς χρόνους τῆς δράσεώς του μᾶς παρέχουν τὰ Ἅπαντα τοῦ Stévin, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκεται ἡ τριγωνομετρία ἐκτιθεμένη κατὰ τρόπον ἀκολουθοῦντα τὰ ἴχνη τοῦ συγγραφέως τῆς Εἰσαγωγῆς (§ 250). Προσθέτομεν ὅτι ὁ κλάδος αὐτὸς ἐμφανίζεται ἐδῶ ὡς ἁπλοῦν βοήθημα τῆς Κοσμογραφίας, ἐκ τῆς ὁποίας γέμουν τὰ τρία πρῶτα Βιβλία. Τὸ Βιβλίον I πραγματεύεται «περὶ κατασκευῆς τῶν ἡμιτόνων», τὸ II «περὶ ἐπιπέδων τριγώνων», καὶ τὸ III «περὶ σφαιρικῶν τριγώνων». Ἕνα παράρτημα ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ διορθώσῃ κάποιαν ἀνακρίβειαν γενομένην ὑπὸ προγενεστέρων συγγραφέων, ὄχι ὅλων, διότι, ὅπως λέγει, «δὲν εἶναι καθόλου ἀνάγκη νὰ διασκεδάζῃ κανεὶς τὴν ἀνίαν του καὶ νὰ χάνῃ τὸν καιρόν του διορθώνων τὰ σφάλματα τῶν ἄλλων», ἀλλὰ μόνον ἐκείνων, τοὺς ὁποίους ἔκρινεν ὁ ἴδιος ὡς σημαντικούς. Τὸ IV Βιβλίον τῆς «Κοσμογραφίας» πραγματεύεται προβλήματα σφαιρικῆς ἀστρονομίας λυόμενα μὲ τὴν χρῆσιν σφαιρικῶν τριγώνων. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον μιᾶς συγγραφῆς καθόλου βεβαίως ἀναξίας τοῦ ἐξόχου μαθηματικοῦ τῶν Κάτω Χωρῶν, ἀλλὰ μὴ παρουσιαζούσης πρωτοτυπίαν.

278. Σύγχρονος τοῦ Stévin εἶναι ὁ Michel Coignet, γεννηθεὶς εἰς Ἀμβέρσαν τὸ 1549, καὶ ἀποθανὼν τὴν 24 Δεκεμβρίου 1623. Μία ἐπιστολή του γραφεῖσα πρὸς τὸν Γαλιλαῖον τὴν 31 Μαρτίου 1588, ἀποδεικνύει ὅτι ἦτο ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους θαυμαστὰς τοῦ μεγάλου τέκνου τῆς Φλωρεντίας. Ἐχρημάτισε μαθηματικὸς καὶ μηχανικὸς τῶν ἀρχιδουκῶν Ἀλβέρτου καὶ Ἰσαβέλλας καὶ φαίνεται ὅτι εἰς τὴν αὐλήν των κατέλαβε μίαν θέσιν ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην τοῦ Stévin εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ Nassau. Εἰς τὴν πατρίδα του ἔχαιρεν ἀρίστης ὑπολήψεως ὡς διδάσκαλος ἱκανώτατος, ἐκτὸς ὅμως τῆς πατρίδος του παρέμενεν ἐντελῶς ἄγνωστος, διότι, παρὰ τὰς ἐπιδοτήσεις τὰς ὁποίας ἐλάμβανεν ἀπὸ τὴν Κυβέρνησιν τῆς ἐποχῆς του εἰς περιπτώσεις ἀνάγκης, τὰ συγγράμματά του δὲν ἔτυχον τῆς τιμῆς τῆς ἐκτυπώσεως. Μόλις ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας, κάποιος βέλγος λόγιος ἔφερεν εἰς φῶς ἕνα μικρὸν ἔργον, φέρον χρονολογίαν 19 Δεκεμβρίου 1612, τοῦ ὁποίου προορισμὸς ἦτο νὰ καταστήσῃ γνωστοὺς τοὺς ἀκολουθητέους κανόνας διὰ τὴν κατάστρωσιν ἑνὸς πίνακος ἡμιτόνων (μὲ ἀκτῖνα 100.000) καὶ συνεπῶς τοὺς

τρόπους ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν ἐφαπτομένων καὶ τεμνουσῶν. Πρόκειται περὶ ἔργου ἑνὸς πεπειραμένου διδασκάλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία ἔγκειται περισσότερον εἰς τὴν διαυγῆ ἔκθεσιν, παρὰ εἰς τὰς καινοτομίας τῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν μεθόδων του.

Πολὺ μεγαλυτέρας διασημότητος ἔχαιρεν ὁ Willebrod Snellius. Γεννηθεὶς εἰς Leiden περὶ τὸ 1581, ἐταξείδευσεν ἐπὶ μακρὸν εἰς τὴν Εὐρώπην καὶ τὸ 1613 διεδέχθη τὸν πατέρα του εἰς τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τῶν μαθηματικῶν, τὴν ὁποίαν κατεῖχεν εἰς Leiden. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν καὶ ἀπέθανε τὴν 30 Ὀκτωβρίου 1626. Εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται ἡ ἀνακάλυψις τοῦ νόμου τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτὸς καὶ ὁ ρόλος τοῦ δημιουργοῦ τῆς γεωδαισίας, χάρις εἰς τὸ θεμελιῶδες ἔργον του, τὸ ἔχον τίτλον: Eratosthenes Batavus, De terrae ambitus vera quantitate[7], ποὺ ἐδημοσίευσε τὸ 1614*.

Ἡμᾶς ἐνδιαφέρει κυρίως ὁ μετὰ θάνατον δημοσιευθεὶς τόμος τοῦ ἔργου του Doctrinae triangulorum canonicae Libri quatuor[8] (Lugd. Bat., 1627) τοῦ ὁποίου ἡ ἐκτύπωσις ἔγινε μὲ ἐπιμέλειαν τοῦ μαθητοῦ του Martino Hortensius. Μολονότι δὲν εἶναι δύσκολον νὰ διαγνώσῃ κανεὶς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Viète, πολλὰ σημεῖα τοῦ συγγράμματος αὐτοῦ παρουσιάζουν ἀδιαφιλονίκητον πρωτοτυπίαν. Πράγματι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν χορδῶν καὶ τῶν ἐφαπτομένων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀκολούθων νέων τύπων:

$$1 : \eta\mu \frac{a}{2} = 2\eta\mu\,(90^0 - na) : \left[\eta\mu\,\frac{(2n+1)\,a}{2} - \eta\mu\,\frac{(2n-1)\,a}{2}\right],$$

$$1 + 2\eta\mu\, a + 2\eta\mu\, 2a + \ldots + 2\eta\mu\, na = \varepsilon\varphi\left(90^0 - \frac{a}{2}\right)$$

ἐὰν $(n+1)a = 90^0$, καὶ

$$2\eta\mu\,\frac{a}{2} + 2\,\eta\mu\,\frac{3a}{2} + \ldots + 2\,\frac{\eta\mu\,(2n-1)a}{2} = \eta\mu\left(90^0 - \frac{a}{2}\right)$$

ἐὰν $na = 90^0$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον, ἐκτὸς τοῦ γνωστοῦ τύπου προσεγγίσεως ποὺ εἴδομεν εἰς ἕνα κείμενον τοῦ καρδιναλίου τῆς Cusa (Τόμος I, § 180):

$$a = \frac{3\,\eta\mu\, a}{2 + \sigma\upsilon\nu\, a},$$

εὑρίσκομεν ἕνα ἄλλον νέον:

$$a = \varepsilon\varphi\,\frac{a}{3} + 2\,\eta\mu\,\frac{a}{3}.$$

* Διορθώσεις εἰς τὸ ἔργον αὐτό, γενόμεναι μὲ προοπτικὴν μιᾶς νέας ἐκδόσεως (ποὺ δὲν εἶδε τὸ φῶς, λόγῳ αἰφνιδίου θανάτου τοῦ συγγραφέως) ἐδημοσιεύθησαν ὑπὸ τοῦ H. Bosmans εἰς ὑπόμνημα τιτλοφορούμενον Le degré du meridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-zoom et de Malines τοῦ W. Snellius (Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, T. XXIV, 1900).

Ὁ Snellius χρησιμοποιεῖ, ὅπως καί ὁ Viète, τό συμπληρωματικόν τρίγωνον ἑνός δοθέντος, ὁριζόμενον ὅμως μέ ἀκρίβειαν καί διαύγειαν πού ματαίως θ' ἀνεζητοῦντο εἰς τόν γάλλον γεωμέτρην. Σημειοῦμεν τέλος ὅτι εἰς τό ὑπό συζήτησιν ἔργον ἀπαντῶνται διά πρώτην φοράν ἐκεῖνα τά προβλήματα τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας, τά ὁποῖα φέρουν συνήθως τά ὀνόματα τῶν Pothénot καί Hansen.

Τό πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου κατά τόν XVI αἰῶνα

279. Εὔλογος ἦτο ἡ ἐλπίς, ὅτι μετά τήν ἐκ τῆς λήθης ἔξοδον καί τήν ἐπανακυκλοφορίαν τοῦ γνωστοῦ μας ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ φέροντός τίτλον Κύκλου μέτρησις, θά εἶχον ἐξαφανισθῆ οἱ διάφοροι τετραγωνισταί οἱ ἰσχυριζόμενοι ὅτι ἐπενόησαν λύσιν τοῦ αἰωνίου προβλήματος ἤ τοὐλάχιστον θά εἶχον περιορισθῆ εἰς φρόνιμον σιωπήν. Τά γεγονότα διέψευσαν τήν αἰσιόδοξον αὐτήν προσδοκίαν, ἀλλ' ἀπό τάς ἀναφυείσας ἀντιφάσεις πολλά ὠφελήθη ἡ ἐπιστήμη μας, ὅπως θά ἴδωμεν εὐθύς ἀμέσως.

Ἡ σειρά τῶν ἐπιδόξων τετραγωνιστῶν τοῦ κύκλου ἄρχεται μέ τόν Ἰωσήφ Σκαλίγερον (Joseph Scaliger), γεννηθέντα εἰς Agen τῆς Γαλλίας τήν 5 Αὐγούστου 1540, καί μετοικήσαντα εἰς Ὁλλανδίαν, ὅπου ἐκλήθη νά ὑπηρετήση ὡς καθηγητής τῆς Ἀκαδημίας τῆς πόλεως Leiden. Ἐκεῖ καί ἀπέθανε 24 Ἰανουαρίου 1609. Εἰς τό ἔργον του Cyclometrica elementa duo (Lugd. Bat., 1584) νομίζει ὅτι ἀπέδειξε τό θεώρημα «quadratum ab ambitu circuli decuplum est quadrati a diametro» (δηλαδή : τό τετράγωνον πού ἔχει πλευράν τό ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἔχοντος πλευράν τήν διάμετρον). Ἐπειδή τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μέ τήν παραδοχήν $\pi = \sqrt{10}$, βλέπομεν ὅτι τό ζήτημα ἀνάγεται εἰς τήν ἰνδικήν προσέγγισιν (Τόμος I, § 136). Ἐνδιαφέρον ἔχουν οἱ λόγοι, τούς ὁποίους ἐπικαλεῖται ὁ Σκαλίγερος πρός ἐξήγησιν τῆς διαφωνίας του μέ τόν Ἀρχιμήδη. Κατ' αὐτόν, ὁ τετραγωνισμός τοῦ κύκλου πρέπει νά στηριχθῆ ἐπί γεωμετρικῶν ἀρχῶν, πρᾶγμα τό ὁποῖον ὁ συρακούσιος μαθηματικός δέν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν. Καί ἐπειδή ὁ τελευταῖος ἐργάζεται ἀριθμητικῶς, χωρίς νά στηρίζεται ἐπί κάποιας γεωμετρικῆς ἀρχῆς, ὁ Σκαλίγερος, πλήρης ὑπερηφάνου ἱκανοποιήσεως, ἐξαγγέλει ὅτι ἡ ἀρχιμήδειος ἀπόδειξις πρέπει νά θεωρῆται ὡς ἀνύπαρκτος!

Γάλλος εἶναι ἐπίσης ὁ Simon Chêne γεννηθείς εἰς Dômes· διά ν' ἀποφύγη τάς διώξεις, τῶν ὁποίων θύματα ἦσαν εἰς τήν ἐποχήν του οἱ Καλβινισταί, μετώκησεν εἰς Ὁλλανδίαν, ὅπου μετέβαλε τό ὄνομά του εἰς van Eycke, ὑπό τό ὁποῖον καί ἀναφέρεται συχνότερον. Τό ἔργον, εἰς τό ὁποῖον ἐνόμισεν ὅτι ἀπέδειξε μέ ἀκρίβειαν τήν τιμήν τοῦ $\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2$, φέρει τόν τίτλον Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné

Ὁ Snellius χρησιμοποιεῖ, ὅπως καὶ ὁ Viète, τὸ συμπληρωματικὸν τρίγωνον ἑνὸς δοθέντος, ὁριζόμενον ὅμως μὲ ἀκρίβειαν καὶ διαύγειαν ποὺ ματαίως θ' ἀνεζητοῦντο εἰς τὸν γάλλον γεωμέτρην. Σημειοῦμεν τέλος ὅτι εἰς τὸ ὑπὸ συζήτησιν ἔργον ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν ἐκεῖνα τὰ προβλήματα τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας, τὰ ὁποῖα φέρουν συνήθως τὰ ὀνόματα τῶν Pothénot καὶ Hansen.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου κατὰ τὸν XVI αἰῶνα

279. Εὔλογος ἦτο ἡ ἐλπίς, ὅτι μετὰ τὴν ἐκ τῆς λήθης ἔξοδον καὶ τὴν ἐπανακυκλοφορίαν τοῦ γνωστοῦ μας ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ φέροντός τίτλον Κύκλου μέτρησις, θὰ εἶχον ἐξαφανισθῆ οἱ διάφοροι τετραγωνισταὶ οἱ ἰσχυριζόμενοι ὅτι ἐπενόησαν λύσιν τοῦ αἰωνίου προβλήματος ἢ τοὐλάχιστον θὰ εἶχον περιορισθῆ εἰς φρόνιμον σιωπήν. Τὰ γεγονότα διέψευσαν τὴν αἰσιόδοξον αὐτὴν προσδοκίαν, ἀλλ' ἀπὸ τὰς ἀναφυείσας ἀντιφάσεις πολλὰ ὠφελήθη ἡ ἐπιστήμη μας, ὅπως θὰ ἴδωμεν εὐθὺς ἀμέσως.

Ἡ σειρὰ τῶν ἐπιδόξων τετραγωνιστῶν τοῦ κύκλου ἄρχεται μὲ τὸν Ἰωσὴφ Σκαλίγερον (Joseph Scaliger), γεννηθέντα εἰς Agen τῆς Γαλλίας τὴν 5 Αὐγούστου 1540, καὶ μετοικήσαντα εἰς Ὀλλανδίαν, ὅπου ἐκλήθη νὰ ὑπηρετήσῃ ὡς καθηγητὴς τῆς Ἀκαδημίας τῆς πόλεως Leiden. Ἐκεῖ καὶ ἀπέθανε 24 Ἰανουαρίου 1609. Εἰς τὸ ἔργον του Cyclometrica elementa duo (Lugd. Bat., 1584) νομίζει ὅτι ἀπέδειξε τὸ θεώρημα «quadratum ab ambitu circuli decuplum est quadrati a diametro» (δηλαδή : τὸ τετράγωνον ποὺ ἔχει πλευρὰν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν διάμετρον). Ἐπειδὴ τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν παραδοχὴν $\pi = \sqrt{10}$, βλέπομεν ὅτι τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἰνδικὴν προσέγγισιν (Τόμος I, § 136). Ἐνδιαφέρον ἔχουν οἱ λόγοι, τοὺς ὁποίους ἐπικαλεῖται ὁ Σκαλίγερος πρὸς ἐξήγησιν τῆς διαφωνίας του μὲ τὸν Ἀρχιμήδη. Κατ' αὐτόν, ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου πρέπει νὰ στηριχθῇ ἐπὶ γεωμετρικῶν ἀρχῶν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ὁ συρακούσιος μαθηματικὸς δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν. Καὶ ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος ἐργάζεται ἀριθμητικῶς, χωρὶς νὰ στηρίζεται ἐπὶ κάποιας γεωμετρικῆς ἀρχῆς, ὁ Σκαλίγερος, πλήρης ὑπερηφάνου ἱκανοποιήσεως, ἐξαγγέλει ὅτι ἡ ἀρχιμήδειος ἀπόδειξις πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς ἀνύπαρκτος!

Γάλλος εἶναι ἐπίσης ὁ Simon Chêne γεννηθεὶς εἰς Dômes· διὰ ν' ἀποφύγῃ τὰς διώξεις, τῶν ὁποίων θύματα ἦσαν εἰς τὴν ἐποχήν του οἱ Καλβινισταί, μετώκησεν εἰς Ὀλλανδίαν, ὅπου μετέβαλε τὸ ὄνομά του εἰς van Eycke, ὑπὸ τὸ ὁποῖον καὶ ἀναφέρεται συχνότερον. Τὸ ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐνόμισεν ὅτι ἀπέδειξε μὲ ἀκρίβειαν τὴν τιμὴν τοῦ $\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2$, φέρει τὸν τίτλον Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné

(τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου ἢ τρόπος εὑρέσεως τετραγώνου ἴσου πρὸς δοθέντα κύκλον, Delft, 1584). Αἱ κριτικαὶ ποὺ ἐστράφησαν ἐναντίον τοῦ ἔργου τὸν ὤθησαν εἰς μίαν ἀναθεώρησιν τῆς θέσεώς του, κατόπιν τῆς ὁποίας ἐδέχθη εἰς δευτέραν ἔκδοσιν τῆς ἀτυχοῦς ἐργασίας του (1586), ὡς τιμὴν τοῦ

$$\pi=\sqrt{\sqrt{300}-8}$$

280. Ἐναντίον τῶν δῆθεν ἀνακαλύψεων τοῦ van Eycke, ἀντεπεξῆλθεν ἕνας γερμανὸς ἐγκατεστημένος ἐπίσης εἰς τὴν Ὀλλανδίαν, ὁ Ludolph van Ceulen. Ἐκ τοῦ ὀνόματός του προῆλθεν ἡ ἄστοχος ὀνομασία τοῦ π : ἀριθμὸς τοῦ Ludolph (Ludolph's Zahl). Ὁ Ceulen ἐγεννήθη εἰς Hildesheim τῆς Σαξωνίας τὴν 28 Ἰανουαρίου 1540, ἀπὸ οἰκογένειαν τόσον ταπεινῆς καταστάσεως, ὥστε καθ' ὅλην του τὴν ζωὴν ἐκυριαρχεῖτο ἀπὸ τὸ δυσάρεστον συναίσθημα ὅτι παρέμεινεν ἄμοιρος λατινικῆς καὶ ἑλληνικῆς γλωσσομαθείας. Ἐδίδαξε μαθηματικὰ ἐκ διαλειμμάτων, διότι κύριον αὐτοῦ ἐπάγγελμα ἦτο ἡ ξιφασκία καὶ ἡ γυμναστική, ἐπάγγελμα τὸ ὁποῖον ἤσκησε διαδοχικῶς εἰς Breda, Amsterdam, Delft, Arnheim καὶ Leiden. Ἡ αἴθουσα ὁπλομαχητικῆς ἐσυχνάζετο ἀπὸ πλουσίους ὀλλανδοὺς ἐμπόρους καὶ διὰ ν' ἀναπαύεται κατὰ τὰ διαλείμματα τῶν ἀσκήσεων ἐπεδίδετο εἰς τὴν λύσιν, μὲ θαυμαστὴν εὐστροφίαν, περιπλόκων ἀριθμητικῶν προβλημάτων ποὺ τοῦ ἐπροτείνοντο. Ὑπῆρξε δὲ τόσον μεγάλη ἡ φήμη, τὴν ὁποίαν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀπέκτησεν ὡς δεινὸς ὑπολογιστής, ὥστε ὅταν ὁ Μαυρίκιος τοῦ Nassau ἀπεφάσισε νὰ ἱδρύσῃ εἰς Leiden μίαν σχολὴν μηχανικοῦ, δὲν ἐδίστασε νὰ καλέσῃ εἰς αὐτὴν τὸν van Ceulen. Ἐκεῖ καὶ ἀπέθανε τὴν 31 Δεκεμβρίου 1610.

Τοῦ συνοπτικοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους, δι' οὓς λόγους εἴπομεν ἤδη, δὲν ἠδυνήθη νὰ λάβῃ γνῶσιν ὁ van Ceulen, παρὰ μόνον ὅταν ἕνας διάσημος δήμαρχος τοῦ Delft, ὁ Grotius, τὸ μετέφρασεν εἰς ὀλλανδικὴν γλῶσσαν. Τότε ἔθεσεν ὡς σκοπόν του ν' ἀνασκευάσῃ τὸ ἔργον τοῦ van Eycke. Ὑπολογιστὴς ἐμφορούμενος ἀπὸ θάρρος ἀνάλογον τῆς ἐπιδεξιότητός του, ἐπανέλαβε τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐπεκτείνων αὐτὴν εἰς πολύγωνα μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ πλευρῶν: ἔφθασε τοιουτοτρόπως μέχρι τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ἀριθμὸν πλευρῶν 2^{62}, ἐπιτυχὼν τιμὴν τοῦ π μὲ 35 δεκαδικὰ ψηφία, τὴν ὁποίαν, κατ' ἐπιθυμίαν του, ἀνέγραψαν ἐπὶ τοῦ τάφου του. Τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησε, περιέλαβεν εἰς ἕνα μικρὸν ἔργον «Περὶ κύκλου», γραφὲν εἰς Ὀλλανδικὴν (Delft, Α' ἔκδοσις 1596, Β' ἔκδοσις 1615), τὸ ἔργον ὅμως αὐτὸ δὲν ἔλαβε τὴν εὐρεῖαν διάδοσιν, τῆς ὁποίας πράγματι τοῦτο ἤξιζε, παρὰ μόνον ὅταν ὁ W. Snellius ἐδημοσίευσε λατινικήν του μετάφρασιν (ὅπως φαίνεται ἀρκετὰ ἐλευθέραν).

Τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως τῶν ὑπολογισμῶν ποὺ ἐξετέλεσεν ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικὸς συνίσταται εἰς μίαν «μεγάλην ἀνακάλυψιν» (εἶναι

ἰδικός του ὁ χαρακτηρισμός), τὴν ὁποίαν ἔκαμεν ὁ ἴδιος τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1586. Συνίσταται δὲ ἡ ἀνακάλυψις αὕτη εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν θεμελιωδῶν τύπων τοῦ ἡμίσεος τόξου, οἱ ὁποῖοι σήμερον γράφονται ὡς ἑξῆς :

$$\eta\mu \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\, a}{2}}\,, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\, a}{2}}\,,$$

Ἐκκινῶν ἀπὸ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ ἐφαρμόζων τοὺς τύπους τούτους διὰ διαδοχικῶν διχοτομήσεων, ἔφθασεν εἰς πολύγωνον μὲ 10 485 760 πλευρὰς καὶ οὕτω ἔλαβε τὸν ἀριθμὸν π μὲ ἕνδεκα ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία. Μὴ ἱκανοποιημένος μὲ αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, ἐπανέλαβε τὴν ἐργασίαν ἐξ ἀρχῆς, ἐκκινῶν ἀπὸ τὸ τετράγωνον καὶ ἐφαρμόζων τοὺς ἰδίους τύπους, ἔφθασε δὲ τοιουτοτρόπως μέχρι τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 1 073 741 824 πλευράς. Ὁ ἀριθμὸς π προέκυψε τώρα μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία. Ἀναχωρῶν ἔπειτα ἀπὸ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔφθασεν εἰς πολύγωνον μὲ 6 442 450 944 πλευρὰς καὶ εἰς τιμὴν τοῦ π μὲ 17 δεκαδικὰ ψηφία. Τέλος ἀναχωρῶν ἀπὸ τὸ κανονικὸν 15γωνον ἔφθασεν, ἐργαζόμενος ἐντελῶς ἀναλόγως, εἰς τὸ πολύγωνον τῶν 32 512 254 720 πλευρῶν καὶ εἰς μίαν τιμὴν τοῦ π περιλαμβάνουσαν 19 δεκαδικὰ ψηφία.

Καθῆκον μας εἶναι νὰ σημειώσωμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω κείμενον «περὶ κύκλου» περιλαμβάνει, ἐκτὸς τῶν προαναφερθέντων, καὶ ἄλλα πράγματα ἀξιόλογα, ὅπως εἶναι μία πρακτικὴ μέθοδος ἐκτελέσεως προσεγγιστικῶν διαιρέσεων μὲ μεγάλους ἀριθμούς, ἡ πρώτη τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν, καὶ πίνακες τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν διὰ κύκλον ἀκτῖνος 10^7. Οἱ πίνακες αὐτοὶ προωρίζοντο διὰ τοὺς ἀγρονόμους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἦτο δυνατὸν ν' ἀνατρέχουν εἰς τοὺς ὀγκώδεις πίνακας τοὺς προοριζομένους διὰ τοὺς ἀστρονόμους. Ὀλιγώτερον ἀνεξήγητος φαίνεται ἡ παρουσία πινάκων τόκου, τῶν ὁποίων ὁ συγγραφεὺς ἐξαίρει τὴν σπουδαιότητα καὶ τὴν πρωτοτυπίαν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι εἶχεν ἤδη προηγηθῆ ἡ δημοσίευσις τῶν σχετικῶν πινάκων τοῦ Stévin (§ 247). Πιθανὴ ἐξήγησις εἶναι ἡ ὑπόθεσις ὅτι τοὺς πίνακας ἴσως κατέστρωσε πρῶτος ὁ Stévin διὰ ν' ἀνταποκριθῇ εἰς τὰ προβλήματα ποὺ τοῦ ἐπρότειναν οἱ συχνάζοντες τὴν αἴθουσαν ὁπλομαχητικῆς, ὅταν ἤσκει τὸ ἐπάγγελμα τοῦ γυμναστοῦ.

Τὸ μέρος ὅμως τοῦ ἰδίου ἔργου, ποὺ παρουσιάζει τὸ μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον, εἶναι ἐκεῖνο ὅπου ὁ συγγραφεὺς ἔλυσε τὰ ζητήματα τῆς διαιρέσεως γωνιῶν, τὰ ὁποῖα τόσην φήμην προσεπόρισαν εἰς τὸν Viète. Τὰ γραφέντα ὑπὸ τοῦ van Ceulen ἐπὶ τοῦ θέματος ὑπερέχουν τῶν σελίδων τοῦ Viète κατὰ τοῦτο, ὅτι τὰ πάντα παρέχονται ἀποδεδειγμένα. Ἀξίζει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ Viète καὶ ὁ van Ceulen δὲν εὑρίσκοντο εἰς ἄμεσον ἀλληλογραφίαν, ἀλλὰ εἶχον ἕνα κοινὸν φίλον ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ A. van Roomen

(§ 281). Ὁ γάλλος μαθηματικὸς ἔμαθε λοιπὸν διὰ τοῦ τελευταίου, ὅτι ὁ van Ceulen εἶχεν ἐπιτύχει τὴν λύσιν τῆς περιφήμου ἐξισώσεως τοῦ 45ου βαθμοῦ (§ 274) καὶ ὅτι ἐσχεδίαζε νὰ δημοσιεύσῃ ἕνα ἔργον του ἐπὶ τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Τότε ἀκριβῶς ὁ Viète ὑποχωρῶν εἰς τοὺς ἐξορκισμοὺς τοῦ Pierre Aléaume (§ 249) τότε δικηγόρου εἰς τὸ Κοινοβούλιον τῶν Παρισίων, ὁ ὁποῖος δὲν ἔπαυε νὰ τὸν μέμφεται διότι ἄφινε νὰ τοῦ ἀποσπάσῃ τὴν δόξαν ἕνας βέλγος, ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα τὴν ἀπάντησιν ποὺ ἐνεπνεύσθη διὰ τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ζήτημα.

281. Ὁ van Eycke εὗρε (παράδοξον ἀληθῶς!) ἕνα θαυμαστὴν καὶ ὀπαδὸν ἐν τῷ προσώπῳ ἑνὸς ἀστρονόμου, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 271), ἤτοι τὸν Raymarus Ursus (ἀποθανόντα εἰς Πράγαν τὴν 15 Αὐγούστου 1600), ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ἔργον του Fundamentum Astronomicum (Argentorati, 1588) δὲν ἐδίστασε ν' ἀποκαλέσῃ τὴν μέθοδον τῆς εὐθειοποιήσεως «θεῖον εὕρημα» (divinum artificium). Εἶχεν ὅμως ἀντίμαχον ἕνα μαθηματικόν, τὸν ὁποῖον πολλάκις ἐμνημονεύσαμεν: τὸν Adrian van Roomen (ἢ Adrianus Romanus ἢ Adrien Romam (§ 248).

Τοῦτο πληροφορούμεθα ἀπὸ ἕνα ἔργον του, τοῦ ὁποίου τὸν τίτλον ἀναγράφομεν ὁλόκληρον, διότι παρέχει ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ περιεχομένου: ideae mathematicae, pars prima, sive methodus polygonorum, qua laterum, perimetrorum et arcarum cujuscumque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima· una cum circuli quadratura continentur[9] (Amberes, 1593). Τὸ ἔργον αὐτὸ ἐκτὸς τῆς πολεμικῆς ἔχει καὶ ἱστορικὴν ἀξίαν, διότι περιέχει τὴν ἐκφώνησιν τοῦ περιφήμου ζητήματος, τοῦ ὁποίου τὴν λύσιν ἔδωσεν ὁ Viète (§ 274) καὶ ὁ van Ceulen (§ 280), ἐπὶ πλέον δὲ καὶ μαθηματικήν, διότι ἀποδεικνύει ὅτι ἀκριβῶς τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ὡδήγησεν εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν τύπων διαιρέσεως τῶν τόξων. Χρησιμοποιῶν δὲ πράγματι τοὺς σχετικοὺς τύπους ὁ van Roomen ἔφθασεν εἰς πολύγωνον μὲ $3 \cdot 5 \cdot 2^{24} = 251\,658\,240$ πλευράς, καὶ εὗρε τιμὴν τοῦ

$$\pi = 3,14\,159\,265\,358\,979\,31.$$

Μεταξὺ τῶν ἀτυχῶν τετραγωνιστῶν τοῦ κύκλου θὰ ἔπρεπε νὰ συγκαταλεχθῇ καὶ ὁ Filippo van Landsberg (§ 276), ἀλλὰ (σπάνιον πτηνόν!) ἀντιθέτως πρὸς τοὺς ἄλλους, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, οὗτος ἀνεγνώρισε τὸ σφάλμα του κατόπιν παρατηρήσεων τοῦ W. Snellius.

Διάφορον στάσιν ἐτήρησεν ἕνας ἄλλος Ὀλλανδός, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ κλείσωμεν πρὸς τὸ παρὸν τὸν κατάλογον τῶν ἀντιτιθεμένων εἰς τὸν van Eycke. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Adriano Anthonisz (1527-1607 περίπου). Ἐπειδὴ ἡ οἰκογένειά του κατήγετο ἀπὸ τὸ Metz, τὸ παιδί του, ποὺ εἶχεν ἐπίσης τὸ ὄνομα Adriano (γεννηθεὶς εἰς Alkmaar τὴν 9 Δεκεμβρίου 1557, ἀποθανὼν

εἰς Francker τὴν 6 'Οκτωβρίου 1635) ἔλαβεν ἀπὸ τοὺς συμμαθητάς του τὸ ἐπώνυμον Metius, τὸ ὁποῖον καὶ ἐπέπρωτο νὰ διατηρήσῃ.

Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἡ κοινοποίησις τῆς ὑπὸ τοῦ πατρός του εὑρεθείσης ἀξιολόγου προσεγγίσεως $\pi = 355/113$, τὴν ὁποίαν ἐδημοσίευσεν ὁ Metius υἱὸς τὸ 1646 εἰς ἕνα ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Manuale arithmeticae et geometriae practicae (ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς καὶ πρακτικῆς γεωμετρίας). Καίτοι δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶχε δώσει προηγουμένως τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν καὶ ὁ 'Αρχιμήδης (Τόμος Ι, § 41) παραμένει ἄθικτος ἡ ὀφειλὴ τῆς τιμῆς εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος τὴν ἐπανεῦρε, ἀλλὰ καὶ τῆς ἀναγνωρίσεως εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἀνεγνώρισε τὴν ἀξίαν της καὶ τὴν ἔθεσε πάλιν εἰς κυκλοφορίαν.

282. Αἱ ἐκτενεῖς καὶ καρποφόροι μελέται τοῦ Viète ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων τὸν ὡδήγησαν, σχεδὸν ἀθελήτως, εἰς τὴν ἀνάγκην ν' ἀσχοληθῇ κατ' ἐπανάληψιν μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. 'Εμνημονεύσαμεν μάλιστα προηγουμένως (§ 266) μίαν ἀξιόλογον κατασκευὴν τετραγώνου κατὰ προσέγγισιν ἰσοδυνάμου πρὸς κύκλον. Προσθέτομεν τώρα ὅτι, ἀκολουθῶν τὰ ἴχνη τοῦ 'Αρχιμήδους, καὶ προωθῶν τὴν ἔρευναν μέχρι τοῦ πολυγώνου μὲ 393 216 πλευράς, ἐπέτυχε τὴν ἀξιοσημείωτον τιμήν:

$$\pi = 3{,}1415926536.$$

'Εξ ἄλλου, τελειοποιῶν κάποιαν ἀόριστον νύξιν τοῦ 'Αντιφῶντος (Τόμος Ι, § 27) ὁ Viète (εἰς τὸ Κεφ. XVIII τοῦ βιβλίου του Var. de reb. math.) συνέκρινε τὰ ἐμβαδὰ τῶν πολυγώνων μὲ n, 2n, $2n^2$ πλευράς, μὲ μίαν μέθοδον στηριζομένην ἐπὶ τῶν τύπων τῆς διχοτομήσεως καὶ ἡ ὁποία δύναται νὰ συνεχισθῇ ἀπεριορίστως, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ οἱασδήποτε τιμῆς τοῦ n. 'Ορμώμενος ἀπὸ τὴν περίπτωσιν $n = 4$ ἠδυνήθη νὰ συναγάγῃ τὴν ἀκόλουθον ἀξιολογωτάτην ἔκφρασιν:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἀπορρέει τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἀπειρομερὲς γινόμενον τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι συγκλῖνον. 'Η ἀνωτέρω ἀναλυτικὴ ἔκφρασις εἶναι ἡ πρώτη δοθεῖσα διὰ τὸν ἀριθμὸν π. Μὲ τὴν ἀνακάλυψιν αὐτῆς ὁ Viète ἔθεσεν ὑπὸ νέαν ὄψιν τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. 'Ενῷ οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἀρχαιότητος ἐπεχείρουν τὴν *κατασκευὴν* εὐθείας ἰσομήκους πρὸς τὴν περιφέρειαν ἢ τετραγώνου ἰσοεμβαδικοῦ πρὸς δοθέντα κύκλον, ἐνῷ ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους ἐπεζητήθη ὁ *ὑπολογισμὸς* τοῦ π μὲ ἀκρίβειαν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν, ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς ἀνοίγεται μία νέα ἐποχὴ ἡ ὁποία, ἂν χαρακτηρίσωμεν τὰς δύο πρώτας «γεωμετρικὴν» καὶ «ἀριθμητικήν», πρέπει δικαίως νὰ χαρακτη-

ρισθῇ ὡς «ἀναλυτική», ὑπὸ τὴν ἔποψιν ὅτι προέχον γνώρισμα αὐτῆς εἶναι ἡ ἀναζήτησις μιᾶς ἐκφράσεως τοῦ π, μέσῳ συμβόλων τῆς ἀναλύσεως, ἔστω καὶ ἐπαναλαμβανομένων ἐπ' ἄπειρον. Ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ Viète τὸ γεγονός, ὅτι ἔστρεψε τοὺς μαθηματικοὺς πρὸς μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ὡδήγησεν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εἰς λαμπρὰ ἀποτελέσματα.

Ἐπίλογος : Κλάβιος

283. Τώρα ποὺ ἐφθάσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς ἐξετάσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου ποὺ συνετελέσθη κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVI αἰῶνος, εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν, θεωροῦντες τὴν πρόοδον εἰς τὸ σύνολον, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὑπῆρξε κατ' ἐξοχὴν σημαντικὸν ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἄλγεβραν. Ὄχι μόνον διεπέρασε τὸ φράγμα, τὸ ὁποῖον πολλοὶ ἐθεώρουν ἀδιαπέρατον, ἀλλ' ὑπέστη σοβαρὰς τελειοποιήσεις εἰς τὸν συμβολισμόν της, ὥστε νὰ διαφαίνωνται αἱ ἐλπίδες, ὅτι πλησίον εἶναι ὁ καιρὸς κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἄλγεβρα θὰ παύσῃ νὰ χαρακτηρίζεται πλέον συγκεκομμένη.

Μεγάλης σημασίας ὑπῆρξαν ἐπίσης αἱ πρόοδοι αἱ σημειωθεῖσαι εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἡ ὁποία ἔφθασεν εἰς ἕνα βαθμὸν τελειότητος ἀκόμη ἀνώτερον ἐκείνου εἰς τὸν ὁποῖον εἶχον ἀναβιβάσει αὐτὴν οἱ Ἄραβες καὶ (χάρις εἰς τὰς ἀξιεπαίνους προσπαθείας ἡρωϊκῶν πράγματι ὑπολογιστῶν) καὶ ἐπὶ πλέον ἔδωσεν εἰς τοὺς ἀστρονόμους ἀριθμητικοὺς πίνακας ἀνελπίστου ἀκριβείας.

Προόδους τόσον σημαντικὰς δὲν ἐσημείωσε κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν ἡ γεωμετρία. Διότι ἡ λύσις προβλημάτων μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου δὲν ἦτο κάτι τὸ τελείως νέον, οὔτε τὸ πολὺ σημαντικόν, αἱ δὲ προσπάθειαι μαντεύσεως ἀρχαίων ἀπολεσθέντων ἔργων πιστοποιοῦν μᾶλλον λογίαν θεωρητικὴν διάθεσιν παρὰ δημιουργικὸν πνεῦμα. Μόνον ἡ προοπτική, περιελθοῦσα εἰς χεῖρας ἀξίων γεωμετρῶν, κατέστη τελειοτέρα καὶ τοιουτοτρόπως παρεσκεύασεν ἐκ τοῦ μακρόθεν τὴν δημιουργίαν τῆς προβολικῆς γεωμετρίας.

Παρὰ ταῦτα, ἡ διὰ τοῦ τύπου εὐρεῖα διάδοσις τῶν κλασσικῶν ἔργων τῆς ἀρχαιότητος, κατὰ τὴν ὑπ' ὄψει ἱστορικὴν περίοδον, πρέπει ν' ἀναγνωρισθῇ ὡς πολύτιμος παράγων, ἔστω καὶ ἔμμεσος, τῆς ἀφυπνίσεως τοῦ ἐρευνητικοῦ πνεύματος εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας.

Εἰς τὴν διάδοσιν τῶν κλασσικῶν ἔργων τῆς ἀρχαιότητος συνετέλεσαν οἱ πεπαιδευμένοι ἄνδρες, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον Κεφάλαιον. Μεταξὺ τούτων πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν, εἰς ἐξέχουσαν θέσιν, καὶ τὸν ἰησουΐτην Χριστόφορον Κλάβιον (γεννηθέντα εἰς Bamberg τὸ 1537 μὲ τὸ ὄνομα Schluessel, ἀποθανόντα τὸ 1612 εἰς Ρώμην, ὅπου ἐδίδασκεν ἐπὶ δωδεκαετίαν εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ τάγματός του). Ἡ ἀποτελεσματικὴ συμμε-

ρισθῇ ὡς «ἀναλυτική», ὑπὸ τὴν ἔποψιν ὅτι προέχον γνώρισμα αὐτῆς εἶναι ἡ ἀναζήτησις μιᾶς ἐκφράσεως τοῦ π, μέσῳ συμβόλων τῆς ἀναλύσεως, ἔστω καὶ ἐπαναλαμβανομένων ἐπ' ἄπειρον. Ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ Viète τὸ γεγονός, ὅτι ἔστρεψε τοὺς μαθηματικοὺς πρὸς μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ὡδήγησεν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εἰς λαμπρὰ ἀποτελέσματα.

Ἐπίλογος : Κλάβιος

283. Τώρα ποὺ ἐφθάσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς ἐξετάσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου ποὺ συνετελέσθη κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVI αἰῶνος, εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν, θεωροῦντες τὴν πρόοδον εἰς τὸ σύνολον, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὑπῆρξε κατ' ἐξοχὴν σημαντικόν ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἄλγεβραν. Ὄχι μόνον διεπέρασε τὸ φράγμα, τὸ ὁποῖον πολλοὶ ἐθεώρουν ἀδιαπέρατον, ἀλλ' ὑπέστη σοβαρὰς τελειοποιήσεις εἰς τὸν συμβολισμόν της, ὥστε νὰ διαφαίνωνται αἱ ἐλπίδες, ὅτι πλησίον εἶναι ὁ καιρὸς κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἄλγεβρα θὰ παύσῃ νὰ χαρακτηρίζεται πλέον συγκεκομμένη.

Μεγάλης σημασίας ὑπῆρξαν ἐπίσης αἱ πρόοδοι αἱ σημειωθεῖσαι εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἡ ὁποία ἔφθασεν εἰς ἕνα βαθμὸν τελειότητος ἀκόμη ἀνώτερον ἐκείνου εἰς τὸν ὁποῖον εἶχον ἀναβιβάσει αὐτὴν οἱ Ἄραβες καὶ (χάρις εἰς τὰς ἀξιεπαίνους προσπαθείας ἡρωϊκῶν πράγματι ὑπολογιστῶν) καὶ ἐπὶ πλέον ἔδωσεν εἰς τοὺς ἀστρονόμους ἀριθμητικοὺς πίνακας ἀνελπίστου ἀκριβείας.

Προόδους τόσον σημαντικὰς δὲν ἐσημείωσε κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν ἡ γεωμετρία. Διότι ἡ λύσις προβλημάτων μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου δὲν ἦτο κάτι τὸ τελείως νέον, οὔτε τὸ πολὺ σημαντικόν, αἱ δὲ προσπάθειαι μαντεύσεως ἀρχαίων ἀπολεσθέντων ἔργων πιστοποιοῦν μᾶλλον λογίαν θεωρητικὴν διάθεσιν παρὰ δημιουργικὸν πνεῦμα. Μόνον ἡ προοπτική, περιελθοῦσα εἰς χεῖρας ἀξίων γεωμετρῶν, κατέστη τελειοτέρα καὶ τοιουτοτρόπως παρεσκεύασεν ἐκ τοῦ μακρόθεν τὴν δημιουργίαν τῆς προβολικῆς γεωμετρίας.

Παρὰ ταῦτα, ἡ διὰ τοῦ τύπου εὐρεῖα διάδοσις τῶν κλασσικῶν ἔργων τῆς ἀρχαιότητος, κατὰ τὴν ὑπ' ὄψει ἱστορικὴν περίοδον, πρέπει ν' ἀναγνωρισθῇ ὡς πολύτιμος παράγων, ἔστω καὶ ἔμμεσος, τῆς ἀφυπνίσεως τοῦ ἐρευνητικοῦ πνεύματος εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας.

Εἰς τὴν διάδοσιν τῶν κλασσικῶν ἔργων τῆς ἀρχαιότητος συνετέλεσαν οἱ πεπαιδευμένοι ἄνδρες, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον Κεφάλαιον. Μεταξὺ τούτων πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν, εἰς ἐξέχουσαν θέσιν, καὶ τὸν ἰησουΐτην Χριστόφορον Κλάβιον (γεννηθέντα εἰς Bamberg τὸ 1537 μὲ τὸ ὄνομα Schluessel, ἀποθανόντα τὸ 1612 εἰς Ρώμην, ὅπου ἐδίδασκεν ἐπὶ δωδεκαετίαν εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ τάγματός του). Ἡ ἀποτελεσματικὴ συμμε-

τοχή του εἰς τὴν γρηγοριανὴν μεταρρύθμισιν δὲν πρόκειται νὰ δώσῃ λαβὴν εἰς ἡμᾶς νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐπὶ τῆς συμβολῆς του εἰς αὐτήν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον πρέπει ὅμως νὰ ἐξάρωμεν εἶναι ἡ ὑπ' αὐτοῦ γενομένη λατινικὴ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τῶν ὁποίων ἐσημειώθησαν ἓξ τοὐλάχιστον ἐκδόσεις ὑπὸ τοῦ ἰδίου (1574, 1589, 1591, 1603, 1607, 1612) ἐντὸς μιᾶς βραχείας χρονικῆς περιόδου. Ἡ ἐκ μέρους τοῦ μαθηματικοῦ κοινοῦ ἐκδηλωθεῖσα εὔνοια ἦτο πολὺ δικαιολογημένη, ὄχι μόνον διὰ τὸ ἐξαιρετικὸν στὺλ τῆς μεταφράσεως, ἀλλὰ κυρίως διὰ τὸν πλοῦτον τῶν σχολίων, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλα ἦσαν πρωτότυπα καὶ ἄλλα ἀνεφέροντο μετὰ σχετικῶν σχολιασμῶν. Σημειοῦνται μάλιστα καὶ προσπάθειαι βελτιώσεως καὶ διορθώσεως ἀρχαίων σφαλμάτων. Σχετικῶς μὲ τὰ τελευταῖα πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἰς τὸν Κλάβιον ὀφείλεται ἡ ὁριστικὴ ἐξαφάνισις τῆς ἐσφαλμένης ταυτίσεως τοῦ συγγραφέως τῶν Στοιχείων μὲ τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν. Μεταξὺ τῶν διαφόρων προτάσεών του πρὸς βελτίωσιν ὡρισμένων σημείων τοῦ ἐνδόξου βιβλίου ἀναφέρομεν ἐδῶ τὴν ἀφορῶσαν τὴν ἀναδιαμόρφωσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἔννοιαν τῶν «ἰσαπεχουσῶν εὐθειῶν».

Εἰς τὸν Κλάβιον ὅμως, συγγραφέα γονιμώτατον, ὀφείλονται ἐπίσης ἔργα ἐξεχούσης πρωτοτυπίας. Εἰς τὸ ἔργον του π.χ. τὸ τιτλοφορούμενον Ἀστρόλαβος (Astralabio, Roma, 1593) * ὁ Κλάβιος, χρησιμοποιῶν τὴν στερεογραφικὴν προβολήν, μὴ ἄγνωστον εἰς τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον, ἐδίδαξε πρῶτος τὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κατασκευὴν τῶν στοιχείων ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Μολονότι μία τοιαύτη διαδικασία δὲν προσφέρει τίποτε τὸ χρήσιμον εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῆς ἀστρονομίας, κατέχει ὅμως ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως ἀναμφισβήτητον ἀξίαν, τὴν ὁποίαν εἶναι δίκαιον ν' ἀναγνωρίσωμεν. Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον ἐκτίθεται διὰ πρώτην φορὰν μὲ διαύγειαν ἡ προσθαφαίρεσις, τὴν ὁποίαν ὁ Κλάβιος ἐδιδάχθη ἀπὸ ἕνα γνωστόν μας ἔργον (§ 271) τοῦ Raymaro Ursus. Μετὰ τὸν Κλάβιον, οἱ σχετικοὶ τύποι ἐτελειοποιήθησαν εἰς τὴν Astronomia danica (Ἀμστελόδαμον, 1640) τοῦ Cristiano Longomontano (1564-1647)

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ βιβλίον του Geometria practica (Ρώμη, 1606) ἐπεδίωξε καὶ ἐπέτυχε νὰ κατατάξῃ μεθοδικῶς ὅ,τι ἦτο γνωστὸν τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐπὶ ἑνὸς ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον εἰς ὅλας τὰς ἐποχὰς ἀνεγνωρίσθη ὡς ἔχον σημαντικὸν ἐνδιαφέρον. Ἔπειτα ἀπὸ μίαν ἀξιέπαινον λατινικὴν μετάφρασιν τῆς Σφαιρικῆς τοῦ Θεοδοσίου, συνέγραψε μίαν πραγματείαν ἐπὶ τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων μὲ ἐκτεταμένους ἀριθμητικοὺς πίνακας καὶ μίαν

* Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο παρετηρήθη ἡ πρώτη χρῆσις τῆς τελείας πρὸς διαχωρισμὸν τοῦ ἀκεραίου ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἡ σχετικὴ σελὶς ἀναπαράγεται πανομοιότυπος εἰς τὸ τεῦχος Αὐγούστου - Σεπτεμβρίου 1928 τοῦ The American mathematical Monthly.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XX

ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΜΕΣΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΘΕΝΤΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ XVII ΑΙΩΝΑ

Ἐπιστημονικὴ ἀλληλογραφία καὶ περιοδικὸς τύπος

284. Ὁ αἰών, τῆς μελέτης τοῦ ὁποίου ἐπιλαμβανόμεθα, ὑπῆρξε τόσον γόνιμος διὰ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας, ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν ἄλλην ἐποχὴν ποὺ νὰ δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ αὐτήν, πρέπει, χωρὶς ἄλλο, νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤκμασαν οἱ κορυφαῖοι γεωμέτραι τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος. Ὅτι μὲ τὴν ἀνατολὴν τοῦ αἰῶνος τούτου ἤρχισε νὰ διαγράφεται μία νέα ἐποχή, φαίνεται νὰ πιστοποιεῖται ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν αἰφνιδίαν ἐμφάνισιν μερικῶν ἐξαιρετικῶν προσωπικοτήτων, ἀλλ᾽ ἀκόμη ἀπὸ τὴν αὔξησιν τοῦ πλήθους τῶν ἐλασσόνων ἐρευνητῶν, οἱ ὁποῖοι συνεργάζονται ἀποτελεσματικῶς παρὰ τὸ πλευρὸν τῶν μεγάλων ἡγετικῶν φυσιογνωμιῶν.

Ἐξετάζοντες μερικὰ ἔργα τοῦ Tartaglia καὶ τοῦ Benedetti, εἴδομεν καὶ ἐμνημονεύσαμεν ἤδη ἐπιστολὰς τρίτων ὡς τεκμήρια αὐθεντίας καὶ κύρους ὁλοὲν εὐρύτερον διαδιδομένου, τοῦ ὁποίου ἔχαιρον οἱ παραλῆπται ἐπιστήμονες καί, ἐξ ἄλλου, ὡς ἀποδείξεις τοῦ γεγονότος ὅτι ὁλοὲν ζωηροτέρα ἐγίνετο ἡ ἀνάγκη τῶν ἐπαφῶν μεταξὺ τῶν ἐργατῶν τῆς ἰδίας ἐπιστήμης. Ἀλλ᾽ αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐρευνητῶν, ἡ ἐπιστημονικὴ ἀλληλογραφία ἐξεδηλοῦτο διαρκῶς χρησιμωτέρα καὶ μάλιστα ἀναγκαιοτέρα εἰς ὅσους ἐπεθύμουν νὰ εἶναι ἐνήμεροι τῶν ὅσων συνέβαινον εἰς τὸν κόσμον τῶν διανοουμένων. Δὲν ἦτο μόνον χρήσιμον νὰ γνωρίζουν τὰς ἀνακαλύψεις ἐκείνων μὲ τοὺς ὁποίους διετήρουν ἀμέσους σχέσεις, ἀλλ᾽ ἐπίσης τὰ ἐπιτεύγματα ἐκείνων μὲ τοὺς ὁποίους δὲν εὑρίσκοντο εἰς ἀγαθὰς σχέσεις ἢ μὲ τοὺς ὁποίους εἶχον ἀρχίσει φιλονικίας.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους, αἱ ἐπιστολαὶ ἐπιστημονικοῦ περιεχομένου ἔβαινον συνεχῶς αὐξανόμεναι κατὰ τὸ πλῆθος καὶ τὴν σπουδαιότητα, παίζουσαι τὸν ρόλον, τὸν ὁποῖον ἐκπληροῦν σήμερον αἱ προκαταρκτικαὶ ἀνακοινώσεις. Ἐντεῦθεν ἡ ἐξήγησις τοῦ γεγονότος ὅτι εἰς ἐκδόσεις πραγμα-

τικῶς πλήρεις τῶν πρωτοπόρων ἐπιστημόνων τοῦ XVII αἰῶνος πολλοὶ τόμοι περιλαμβάνουν τὴν ἀλληλογραφίαν.

Τὸ φαινόμενον αὐτὸ κατέστη δυνατὸν ἀπὸ τὴν ἐμφάνισιν προσώπων ποὺ ἀνέλαβον αὐθορμήτως τὸ ἔργον τῆς περισυλλογῆς καὶ διαδόσεως πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν κυοφορουμένων ἐπιστημονικῶν ἀνακαλύψεων. Μεταξὺ τῶν προσώπων τούτων, ὅσον ἀφορᾷ τὰ μαθηματικά, τὴν πρώτην θέσιν κατέχει ὁ Marin Mersenne. Γεννηθεὶς εἰς La Soultière (Maine) τὴν 8 Σεπτεμβρίου 1588, φαίνεται ὅτι ὑπῆρξεν εἰς τὸ Κολλέγιον La Flèche συμμαθητὴς τοῦ Descartes. Ἐσυνέχισε τὰς σπουδάς του εἰς τὴν Σορβόννην καὶ τὴν 17 Ἰουλίου 1611 περιεβλήθη τὸ σχῆμα τῶν ἐλαχίστων τοῦ Ἁγίου Φραγκίσκου τῆς Paola. Ἀφοῦ ἐδίδαξεν εἰς διαφόρους πόλεις τῆς Γαλλίας (μεταξὺ ἄλλων εἰς Nevers τὰ ἔτη 1615-17) ἐγκατεστάθη τὸ 1619 εἰς Παρισίους. Μετέβη κατ' ἐπανάληψιν εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ ἀνεμίχθη εἰς ὅλας τὰς σοβαρωτέρας ἐπιστημονικὰς φιλονικίας ποὺ ἔλαβον χώραν ἐπὶ τῶν χρόνων του, παίζων τὸν ρόλον μᾶλλον μεσάζοντος, ὄχι πάντοτε ἀμερολήπτου. Πρὸς τιμήν του σημειοῦται ὅτι, ἂν καὶ ἄνθρωπος τῆς ἐκκλησίας, μετέφρασεν εἰς τὰ γαλλικά, δύο ἔτη μετὰ τὴν καταδίκην τοῦ Γαλιλαίου, τὸ ἔργον τοῦ τελευταίου Dialoghi sui massimi sistemi, καταστήσας τοιουτοτρόπως εἰς τὴν Γαλλίαν δημοφιλῆ τὸν μεγάλον στοχαστήν. Ἀπέθανε τὴν 1 Σεπτεμβρίου 1648.

Τὸ ἔργον του ὡς πληροφοριοδότου ἀνέλαβεν ἔπειτα ὁ Carcavy (καταγόμενος ἀπὸ τὸ Coliers, γεννηθεὶς ὅμως εἰς τὴν Λυὼν τὰ πρῶτα ἔτη τοῦ XVII αἰῶνος). Ὁ πατήρ του ἦτο τραπεζίτης, ἔστρεψεν ὅμως τὸν υἱόν του πρὸς τὴν δικαστικὴν σταδιοδρομίαν, διορισθέντα τὴν 20 Ἰουλίου 1632 εἰς τὴν θέσιν συμβούλου τοῦ Κοινοβουλίου τῆς Τουλούσης. Ἐκεῖ ὁ τελευταῖος ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Fermat, ὁ ὁποῖος καὶ τὸν ἔστρεψε πρὸς τὰ μαθηματικά. Διὰ νὰ ἐγκατασταθῇ εἰς Παρισίους, ἠγόρασε μίαν θέσιν μέλους τοῦ Μεγάλου Συμβουλίου τοῦ Βασιλείου, ἀλλ' ἠναγκάσθη τὸ 1648 νὰ τὴν μεταπωλήσῃ διὰ νὰ πληρώσῃ τὰ χρέη τοῦ πατρός του. Ἀφιερώθη ἐπί τινα χρόνον εἰς τὸ ἐμπόριον σπανίων βιβλίων, ἀποκτήσας δὲ τὴν εὔνοιαν τοῦ Colbert, ἤσκησε σημαντικὰ κυβερνητικὰ καθήκοντα, εἰδικῶς μάλιστα εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βασιλέως. Ἀποθανόντος τοῦ Mersenne, ἐπρότεινε νὰ τὸν ἀντικαταστήσῃ ὁ Descartes, πρᾶγμα γενόμενον δεκτόν, ὁ τελευταῖος ὅμως ταχθεὶς ὑπὲρ τοῦ τοῦ Roberval, ἐτέθη πολὺ γρήγορα κατὰ μέρος. Μὲ τὸν Huygens διετήρησε, τοὐναντίον, ἀλληλογραφίαν ἐπὶ 4 ἔτη περίπου. Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Colbert, περιέπεσεν εἰς τὴν δυσμένειαν τοῦ Λουδοβίκου XIV. Ἀπέθανε τὸ 1684.

Ἐπιστημονικὸν πρακτορεῖον πληροφοριῶν εἶχεν ἐπίσης καὶ ἡ Ἀγγλία, περίπου κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχήν, ἐκπροσωπούμενον ἀπὸ ἕνα γερμανὸν ἐγκατεστημένον εἰς τὴν χώραν αὐτήν, τὸν Heinrich Oldenburg. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Βρέμην περὶ τὸ 1615, ἔζησεν εἰς Λονδῖνον κατὰ τὴν περίοδον 1640-1648

Ἐπαναπατρισθεὶς ἀπεστάλη τὸ 1657 ὑπὸ τῆς χανσεατικῆς γενεθλίου του πόλεως ὡς πρέσβυς πλησίον τοῦ Cromwell. Ἐνεγράφη τότε ὡς φοιτητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford, ὅπου καὶ παρέμεινε μέχρι τοῦ 1657. Ὑπὸ τὴν ἰδιότητα παιδαγωγοῦ ἐταξίδευσε κατόπιν εἰς τὴν Ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην, ἀλλ' ἐπέστρεψεν εἰς τὴν Ἀγγλίαν τὸ 1660. Ὑπῆρξεν ἐκ τῶν πρώτων μελῶν τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου (διάταγμα 26ης Δεκεμβρίου 1660), τῆς ὁποίας ἔγινεν ἀμέσως γραμματεύς. Ὑπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἀνέπτυξεν εὐρείας σχέσεις δι' ἀλληλογραφίας μὲ ἐπιστήμονας τῆς νήσου καὶ τῆς ἠπειρωτικῆς Εὐρώπης. Ἐξ αἰτίας ἀμφιβολιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐγεννήθησαν εἰς μίαν φιλύποπτον κυβέρνησιν, ὅτι ἡ ἀλληλογραφία του ὑπεισήρχετο ἐπίσης εἰς πολιτικὰ ζητήματα, συνελήφθη καὶ ἐνεκλείσθη εἰς φυλακὴν (20 Ἰουνίου 1667). Ὅταν ἐξῆλθε τῆς φυλακῆς, εὑρέθη εἰς δύσκολον οἰκονομικὴν θέσιν καὶ ἠναγκάσθη νὰ ἐπιδοθῇ εἰς μεταφράσεις διαφόρων ἔργων εἰς ἀγγλικὴν καὶ λατινικὴν γλῶσσαν. Ἀπέθανεν αἰφνιδίως τὸ 1677.

Παρομοία ὑπῆρξεν ἡ δρᾶσις τοῦ John Collins, ὁ ὁποῖος, χάρις εἰς τὴν τεραστίαν ἐπιστημονικὴν ἀλληλογραφίαν τὴν ὁποίαν διεξήγαγε μὲ τοὺς Newton, Leibniz, Gregory, Barrow, Flamsteed (τὸν ἀστρονόμον) καὶ de Sluse ἀπεκλήθη «ὁ Mersenne τῆς Ἀγγλίας». Ἐγεννήθη εἰς τὴν κομητείαν τοῦ Oxford τὴν 5ην Μαρτίου 1625, ἐγένετο δεκτὸς εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν τὴν 24ην Ὀκτωβρίου 1666 καὶ ἀπέθανε τὴν 10ην Νοεμβρίου 1683. Εἶναι ἄξιος θαυμασμοῦ ὄχι μόνον διὰ τὸν ἀκούραστον ζῆλον του νὰ περισυλλέξῃ καὶ νὰ διαδώσῃ τὰς νέας κατακτήσεις τῆς ἐπιστήμης, ἀλλ' ἐπίσης διὰ τὴν ἔντονον προσπάθειαν, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ἵνα ἐπιτύχῃ τὴν δημοσίευσιν ἐργασιῶν ἀπειλουμένων ἀπὸ τὴν ἀφάνειαν. Εἶναι γενικὴ ἡ γνώμη ὅτι καὶ εἰς τὴν μίαν περίπτωσιν καὶ εἰς τὴν ἄλλην συνέβαλεν ἀποτελεσματικῶς εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης.

285. Τὰ μειονεκτήματα τοῦ συστήματος περισυλλογῆς πληροφοριῶν δι' ἀνταλλαγῆς ἰδιωτικῶν ἐπιστολῶν δὲν ἐβράδυναν νὰ ἐκδηλωθοῦν (εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὀφείλονται πολυάριθμοι φιλονικίαι κατὰ τὸν XVI αἰῶνα), ὁπότε ἀνεζητήθησαν ἀποτελεσματικώτερα μέσα. Τότε ἀνεφάνη ὁ περιοδικὸς ἐπιστημονικὸς τύπος.

Ἡ ἐποχὴ αὐτὴ δύναται νὰ χρονολογηθῇ ἀπὸ τοῦ 1665, διότι τὴν πρώτην ἡμέραν τοῦ ἔτους τούτου ἐγκαινιάσθη ἡ κυκλοφορία τῆς «Ἐφημερίδος τῶν λογίων» (Journal des Sçavants), μὲ πρωτοβουλίαν καὶ ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Denis Sallo. Ἀλλ' εἰς τὴν ἀκαταμάχητον ἀντίθεσιν τοῦ πανισχύρου τάγματος τῶν Ἰησουϊτῶν ἠναγκάσθη ὁ Sallo νὰ παραχωρήσῃ τὴν θέσιν του εἰς τὸν ἀββᾶ Jean Gallois (γεννηθέντα τὴν 14ην Ἰουνίου 1632 εἰς Παρισίους, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 19ην Ἀπριλίου 1707), τὸν ὁποῖον ἀπὸ τοῦ 1674 ἠκολούθησαν ἄλλοι δύο ἐκκλησιαστικοί, ὁ de la Roque (1675) καὶ ὁ Bignon

(1702). Ἡ ἐφημερὶς ἐκείνη, ἀνταποκρινομένη εἰς μίαν γενικῶς ἀναγνωριζομένην ἀνάγκην, ἐπέσυρε τὴν εὔνοιαν τοῦ κοινοῦ. Ἀπόδειξις εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι, μὲ μερικὰς διακοπάς, ἐξηκολούθησε τὴν ἔκδοσίν της, ἡ ὁποία καὶ συνεχίζεται μέχρι σήμερον, ἔστω καὶ μὲ σκοποὺς ἀρκετὰ ἀποκλίνοντας τῶν ἀρχικῶν.

Ἄλλη ἀπόδειξις τῆς εὐνοίας τοῦ κοινοῦ πρὸς τὸ μέσον αὐτὸ τῆς ἐνημερώσεως εἶναι ἡ δημιουργία καὶ ἄλλων περιοδικῶν τοῦ αὐτοῦ χαρακτῆρος· ἀναφέρομεν πράγματι τὴν ἵδρυσιν εἰς Ρώμην ἄλλης παρομοίας ἐφημερίδος, ἐν μέρει μεταφραζομένης ἐκ τῆς γαλλικῆς, ἐν μέρει δὲ πρωτοτύπου, ὑπὸ τὸν αὐτὸν τίτλον Ἐ φ η μ ε ρ ὶ ς τ ῶ ν λ ο γ ί ω ν (Giornale dei letterati). Ἡ δημοσίευσις ἤρχισε τὸ 1668 καὶ ἐσυνεχίσθη μέχρι τοῦ 1681 ὑπὸ τοῦ ἀββᾶ Nazari. Ἐπηκολούθησεν ἡ ἔκδοσις ἄλλων μὲ τὸν αὐτὸν τίτλον εἰς τὴν Parma, Modena κ.λ.π. Τὰ περιοδικὰ αὐτά, τῶν ὁποίων τὰ μειονεκτήματα προδίδονται ἀπὸ τὸν ἐφήμερον βίον των, ἐχρησίμευσαν, ἐκτὸς ἄλλων, εἰς τὸ νὰ καταστήσουν ἔκδηλον τὴν ὑπερτάτην χρησιμότητα μιᾶς ἐφημερίδος περιεχούσης πιστὸν ἀπολογισμὸν τῆς ἐπιστημονικῆς κινήσεως ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τῆς Ἰταλίας. Διόλου παράδοξον λοιπόν, ὅτι ἕνας λόγιος μεγάλης φήμης (ἑλληνικῆς καταγωγῆς ἐκ γονέων Κρητῶν) ὁ Ἀ π ό σ τ ο λ ο ς Ζ ῆ ν ο ς (1669-1750), ἐκυριεύθη ἀπὸ τὴν ἰδέαν νὰ τεθῇ ἐπὶ κεφαλῆς μιᾶς τοιαύτης ἐπιχειρήσεως! Τοιουτοτρόπως ἐγεννήθη εἰς τὴν Βενετίαν ἡ Ἐ φ η μ ε ρ ὶ ς τ ῶ ν λ ο γ ί ω ν τ ῆ ς Ἰ τ α λ ί α ς, ἡ ὁποία ἐξηκολούθησε νὰ ἐκδίδεται ἐπὶ χρονικὸν διάστημα πλέον τῆς τριακονταετίας, ἀκόμη καὶ μετὰ τὴν ἐγκατάστασιν τοῦ δημιουργοῦ της εἰς τὴν Βιέννην. Ὁλοκληρωθεῖσα ἡ ἔκδοσις αὐτὴ μὲ κατάλληλα Π α ρ α ρ τ ή μ α τ α καὶ μὲ μίαν Σ υ λ λ ο γ ὴ ν ἐ π ι σ τ η μ ο ν ι κ ῶ ν κ α ὶ φ ι λ ο λ ο φ ι κ ῶ ν π ο ν η μ ά τ ω ν, ὀφειλομένων εἰς ἐπιπόνους φροντίδας τοῦ Ἕλληνος λογίου Ἀ γ γ έ λ ο υ Κ α λ ο γ ε ρ ᾶ (1699-1768), ἀποτελεῖ σήμερον μίαν μὴ εὐκαταφρόνητον πηγὴν πληροφοριῶν γύρω ἀπὸ τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν δημοσιευθέντα πίνακα τῶν ἔργων, τῶν σχετικῶν πρὸς τὴν ὕλην ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει.

Εἰς τὴν Γερμανίαν δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐκδηλωθῇ ἡ ἀνάλογος ἀνάγκη πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἦλθον νὰ καλύψουν αἱ προαναφερθεῖσαι περιοδικαὶ ἐκδόσεις, ἐπροχώρησαν δὲ ἐκεῖ πρὸς θεραπείαν αὐτῆς, κατὰ τρόπον ἀνώτερον παντὸς ἐγκωμίου. Πράγματι τὸ 1682, ὑπὸ τὴν αἰγίδα τοῦ Δουκὸς τῆς Σαξωνίας, ἱδρύθη τὸ περιοδικὸν Π ρ α κ τ ι κ ὰ τ ῶ ν λ ο γ ί ω ν (Acta eruditorum), εἰς τὸ ὁποῖον συνειργάζοντο, μὲ πρωτοτύπους ἐργασίας καὶ μὲ κριτικὰς ἀναλύσεις, οἱ ἐξοχώτεροι διανοούμενοι τῆς ἐποχῆς. Βραδύτερον ἱδρύθησαν καὶ ἄλλαι ἀνάλογοι ἐπιθεωρήσεις εἰς τὴν Πρωσσίαν, καθ' ἣν ἐποχὴν ἡ γαλλικὴ γλῶσσα ἐχρησιμοποιεῖτο ἐκεῖ γενικῶς ὑπὸ τῶν λογίων, φέρουσαι τίτλους: «Γερμανικὴ Βιβλιοθήκη», «Ἐφημερὶς τῶν γραμμάτων τῆς Γερμανίας» καὶ «Νέα γερμανικὴ Βιβλιοθήκη». Αἱ ἐπιθεωρήσεις αὗται εἶναι καὶ

σήμερον πολύτιμοι διὰ τὸν πλοῦτον τῶν πληροφοριῶν ποὺ περιέχουν ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν.

Ὡς πρὸς τὴν εὐρύτητα τῆς κυκλοφορίας, τὴν «Ἐφημερίδα τῶν Λογίων» δύναται ν' ἀνταγωνισθῇ τὸ περιοδικὸν «Νέα τῆς δημοκρατίας τῶν γραμμάτων» (Nouvelles de la republique des lettres), τὸ ὁποῖον ἤρχισε νὰ δημοσιεύεται ἀπὸ τοῦ 1684 ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ γάλλου Pierre Bayle, ὁ ὁποῖος ἐδίδασκεν ἱστορίαν καὶ φιλοσοφίαν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Rotterdam. Τὸ περιοδικὸν ἐσυνεχίσθη ὑπὸ τοῦ H. Basnage de Beauval ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἱστορία τῶν ἔργων τῶν ἐπιστημόνων» (Histoire des oeuvres des savants, 1687-1704), κατόπιν δὲ ὑπὸ τοῦ Leclerc εἰς τὴν «Παγκόσμιον καὶ ἱστορικὴν βιβλιοθήκην» (Bibliothèque universelle et historique).

Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἐσυνεχίσθησαν, εἰς διαρκῶς εὐρυνομένην κλίμακα, κατὰ τοὺς μετέπειτα χρόνους. Ἐκφεύγει ὅμως τοῦ σκοποῦ μας ἡ ἀπαρίθμησις τούτων καὶ ἡ πλήρης ἐξιστόρησις τῆς περαιτέρω ἐξελίξεως τοῦ περιοδικοῦ τύπου τοῦ ἀποβλέποντος εἰς σκοποὺς πληροφοριακοὺς καὶ ἐπιστημονικούς. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, αἱ ἀρχαὶ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ παρέλθουν ἀπαρατήρητοι ἐκ μέρους μας, λόγῳ τῆς ἐπιρροῆς, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν εἰς τὴν καθόλου ἐπιστημονικὴν ἐξέλιξιν. Θὰ σημειώσωμεν ὅμως ὅτι εἰς τὴν προηγηθεῖσαν βραχεῖαν ἐπισκόπησιν δὲν ἀνεφέρθη ἡ Ἀγγλία, διὰ λόγους τοὺς ὁποίους θ' ἀντιληφθῇ ὁ ἀναγνώστης ἐξ ὅσων πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν εὐθὺς ἀμέσως.

Ἀκαδημίαι καὶ ἐπιστημονικαὶ ἑταιρεῖαι

286. Ὁ ἔχων πρὸ ὀφθαλμῶν τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας συντελεῖται σήμερον ἡ ἐπιστημονικὴ δραστηριότης καὶ γνωρίζων ὅτι κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους κοιτίδες τῶν μεγαλυτέρων ἀνακαλύψεων καὶ ἐφευρέσεων ὑπῆρξαν τὰ Πανεπιστήμια, εἶναι δυνατὸν νὰ νομίσῃ ὅτι ἀνάλογος κατάστασις πραγμάτων ἐπεκράτει καὶ κατὰ τοὺς αἰῶνας ποὺ προηγήθησαν τοῦ ἰδικοῦ μας. Τοὐναντίον τὰ Πανεπιστήμια, ἐλεγχόμενα ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ τῆς Ἐκκλησίας, διετήρησαν γενικῶς ἐπὶ μακρὸν χρόνον τοὺς χαρακτῆρας τῆς μισαλλοδοξίας μὲ τοὺς ὁποίους ἐγεννήθησαν*. Ἐντεῦθεν ἡ ἐξήγησις τοῦ γεγονότος ὅτι πολλοὶ ἐκ τῶν μεγαλυτέρων μαθηματικῶν τοῦ XVII αἰῶνος —Viète, Napier, Descartes, Fermat, Leibniz, κλπ.— καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν μικροτέρων, οὐδεμίαν εἶχον σχέσιν μὲ τὰ Πανεπιστήμια τῆς ἐποχῆς των.

Πάντως μὲ τὴν σταθερὰν αὔξησιν τοῦ πλήθους τῶν ἐργατῶν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος, κατέστη πρόδηλος ἡ ἀνάγκη καὶ ἡ ὠφέλεια συχνῆς ἀνταλλαγῆς ἰδεῶν μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκαλλιέρ-

* Φυσικὰ αὐτὸ τὸ φαινόμενον παρουσιάζει περιφανεῖς ἐξαιρέσεις, ὅπως εἶναι τὰ παραδείγματα τῆς Βολωνίας καὶ Παδούης.

σήμερον πολύτιμοι διὰ τὸν πλοῦτον τῶν πληροφοριῶν ποὺ περιέχουν ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν.

Ὡς πρὸς τὴν εὐρύτητα τῆς κυκλοφορίας, τὴν «Ἐφημερίδα τῶν Λογίων» δύναται ν' ἀνταγωνισθῇ τὸ περιοδικὸν «Νέα τῆς δημοκρατίας τῶν γραμμάτων» (Nouvelles de la republique des lettres), τὸ ὁποῖον ἤρχισε νὰ δημοσιεύεται ἀπὸ τοῦ 1684 ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ γάλλου Pierre Bayle, ὁ ὁποῖος ἐδίδασκεν ἱστορίαν καὶ φιλοσοφίαν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Rotterdam. Τὸ περιοδικὸν ἐσυνεχίσθη ὑπὸ τοῦ H. Basnage de Beauval ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἱστορία τῶν ἔργων τῶν ἐπιστημόνων» (Histoire des oeuvres des savants, 1687-1704), κατόπιν δὲ ὑπὸ τοῦ Leclerc εἰς τὴν «Παγκόσμιον καὶ ἱστορικὴν βιβλιοθήκην» (Bibliothèque universelle et historique).

Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἐσυνεχίσθησαν, εἰς διαρκῶς εὐρυνομένην κλίμακα, κατὰ τοὺς μετέπειτα χρόνους. Ἐκφεύγει ὅμως τοῦ σκοποῦ μας ἡ ἀπαρίθμησις τούτων καὶ ἡ πλήρης ἐξιστόρησις τῆς περαιτέρω ἐξελίξεως τοῦ περιοδικοῦ τύπου τοῦ ἀποβλέποντος εἰς σκοποὺς πληροφοριακοὺς καὶ ἐπιστημονικούς. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, αἱ ἀρχαὶ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ παρέλθουν ἀπαρατήρητοι ἐκ μέρους μας, λόγῳ τῆς ἐπιρροῆς, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν εἰς τὴν καθόλου ἐπιστημονικὴν ἐξέλιξιν. Θὰ σημειώσωμεν ὅμως ὅτι εἰς τὴν προηγηθεῖσαν βραχεῖαν ἐπισκόπησιν δὲν ἀνεφέρθη ἡ Ἀγγλία, διὰ λόγους τοὺς ὁποίους θ' ἀντιληφθῇ ὁ ἀναγνώστης ἐξ ὅσων πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν εὐθὺς ἀμέσως.

Ἀκαδημίαι καὶ ἐπιστημονικαὶ ἑταιρεῖαι

286. Ὁ ἔχων πρὸ ὀφθαλμῶν τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας συντελεῖται σήμερον ἡ ἐπιστημονικὴ δραστηριότης καὶ γνωρίζων ὅτι κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους κοιτίδες τῶν μεγαλυτέρων ἀνακαλύψεων καὶ ἐφευρέσεων ὑπῆρξαν τὰ Πανεπιστήμια, εἶναι δυνατὸν νὰ νομίσῃ ὅτι ἀνάλογος κατάστασις πραγμάτων ἐπεκράτει καὶ κατὰ τοὺς αἰῶνας ποὺ προηγήθησαν τοῦ ἰδικοῦ μας. Τοὐναντίον τὰ Πανεπιστήμια, ἐλεγχόμενα ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ τῆς Ἐκκλησίας, διετήρησαν γενικῶς ἐπὶ μακρὸν χρόνον τοὺς χαρακτῆρας τῆς μισαλλοδοξίας μὲ τοὺς ὁποίους ἐγεννήθησαν *. Ἐντεῦθεν ἡ ἐξήγησις τοῦ γεγονότος ὅτι πολλοὶ ἐκ τῶν μεγαλυτέρων μαθηματικῶν τοῦ XVII αἰῶνος —Viète, Napier, Descartes, Fermat, Leibniz, κλπ. — καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν μικροτέρων, οὐδεμίαν εἶχον σχέσιν μὲ τὰ Πανεπιστήμια τῆς ἐποχῆς των.

Πάντως μὲ τὴν σταθερὰν αὔξησιν τοῦ πλήθους τῶν ἐργατῶν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος, κατέστη πρόδηλος ἡ ἀνάγκη καὶ ἡ ὠφέλεια συχνῆς ἀνταλλαγῆς ἰδεῶν μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκαλλιέρ-

* Φυσικὰ αὐτὸ τὸ φαινόμενον παρουσιάζει περιφανεῖς ἐξαιρέσεις, ὅπως εἶναι τὰ παραδείγματα τῆς Βολωνίας καὶ Παδούης.

γουν τὸν αὐτὸν κλάδον, καί, ἐνδεχομένως, μιᾶς ἐγκαρδίου συνεργασίας. Καὶ εἶναι πρὸ πάντων μεταξὺ τῶν σπουδαζόντων πειραματικὰς ἐπιστήμας ποὺ ἐξεδηλώθη ἔντονος μία τοιαύτη ἀνάγκη καὶ ἡ Ἰταλία πρώτη εὗρε τὸν τρόπον πρὸς ἱκανοποίησιν αὐτῆς τῆς ἀνάγκης. Ἐκτὸς μιᾶς Ἀκαδημίας τῶν Σχολαζόντων (Accademia degli Oziosi), ἐμφανισθείσης εἰς Νεάπολιν καὶ τῆς ὁποίας ψυχὴ ὑπῆρξεν ὁ γνωστὸς φυσικὸς G. B. della Porta (1538-1615), τὸ ἀρχαιότερον σωματεῖον τοῦ τύπου τούτου εἶναι ἡ Ἀκαδημία τῶν Λυγκέων, ἱδρυθεῖσα ἐν Ρώμῃ τὸ 1601 ὑπὸ τοῦ Πρίγκηπος Φρειδερίκου Τσέζη (F. Cesi), δουκὸς τῆς Ἀκουασπάρτας. Μὲ τὴν ἔκδοσιν Λυγκέων Πράξεις (Gesta lyncaeorum), εἰς τὴν ὁποίαν συγκεντροῦνται αἱ πρῶται ἐργασίαι, ἡ ἐν λόγῳ Ἀκαδημία ἔδωσε τὸ πρῶτον παράδειγμα ἑνὸς τακτικοῦ ἀπολογισμοῦ τῶν ἀκαδημαϊκῶν πεπραγμένων. Μὲ τὴν δημοσίευσιν δύο μεγάλων ἔργων τοῦ Γαλιλαίου (ἀνήκοντος εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Λυγκέων), τὸ ἵδρυμα τοῦτο περιεβλήθη κῦρος, τὸ ὁποῖον οὐδέποτε ἐλησμονήθη. Ἀλλά, ἴσως ἡ στενὴ ἀκριβῶς σχέσις τῆς Ἀκαδημίας πρὸς τὸν κορυφαῖον ἐπιστήμονα, καθ' ὃν χρόνον ἐξεδηλώθη ἡ διάστασίς του πρὸς τὴν Ἐκκλησίαν, ἀπέβη εἰς ζημίαν τοῦ ἱδρύματος. Πρώτη σοβαρὰ ἀπειλὴ κατὰ τῆς ὑπάρξεώς της ὑπῆρξεν ἡ ἐκ τῆς Ρώμης ἔξοδος τοῦ ἱδρυτοῦ της, λαβοῦσα χώραν τὸ 1618 ἐκ λόγων μεγάλων οἰκονομικῶν δυσχερειῶν τῆς οἰκογενείας. Δύναται δὲ νὰ λεχθῇ ὅτι μὲ τὸν θάνατον αὐτοῦ (2 Αὐγούστου 1630) καὶ τὴν διακοπὴν τῶν ἐργασιῶν της, ἡ Ἀκαδημία τῶν Λυγκέων ἠκολούθησε τὸν ἱδρυτὴν εἰς τὸν τάφον του. Τὸν ἑπόμενον αἰῶνα ἀνεφάνη ἐπί τινα χρόνον εἰς Rimini· τὸ δὲ 1801, ἐνῷ ὁ τρόμος τοῦ φιλελευθερισμοῦ προερχόμενος ἐκ Γαλλίας προεκάλει εἰς τὴν Ρώμην τὴν ἀφύπνισιν τοῦ λατινικοῦ πνεύματος, ἕνας ἄλλος ρωμαῖος πατρίκιος, ὁ δοὺξ Francesco Caetani di Sermoneta, τῆς ἔδωσε νέαν ζωήν. Τοιουτοτρόπως ἔλαβεν ἀρχὴν ἡ Παπικὴ Ἀκαδημία τῶν Νέων Λυγκέων (Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei), ἡ ὁποία ἀκόμη σήμερον εὑρίσκεται ἐν ζωῇ πλησίον τῆς Ἐθνικῆς Ἀκαδημίας τῶν Λυγκέων (Acc. Nazionale dei Lincei).

Καθ' ὃν χρόνον ἡ πολύτιμος αὐτὴ ἑστία τῆς γνώσεως ἔσβηνεν εἰς τὴν Ρώμην, μία ἄλλη ἥναπτεν εἰς Φλωρεντίαν διὰ πρωτοβουλίας δύο φωτισμένων πριγκήπων, τοῦ Φερδινάνδου II, μεγάλου δουκὸς τῆς Τοσκάνης, καὶ τοῦ Λεοπόλδου τῶν Μεδίκων. Δυστυχῶς οὔτε καὶ αὐτὴ ἡ Ἀκαδημία (Acc. del Cimento) εἶχε μακρὰν ζωήν, ἀλλὰ κατὰ τὴν δεκαετίαν τῆς ὑπάρξεώς της ἔγινεν ἀφορμὴ προόδων εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας τόσων σημαντικῶν, ὥστε νὰ καταστῇ ἀθάνατος.

287. Εἴτε διότι αἱ ἐπιστημονικαὶ ἀνάγκαι, ποὺ ἔγιναν αἰσθηταὶ εἰς τὴν Ἰταλίαν, ἐξεδηλώθησαν ἐπίσης καὶ πέραν τῶν Ἄλπεων, εἴτε διότι οἱ ξένοι ποὺ ἐφοίτων εἰς τὰ ἰταλικὰ Πανεπιστήμια μετέδωσαν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν

τὰ σχετικὰ πρὸς τὰς ἐπιστημονικὰς ἀκαδημίας τῆς Ἰταλίας, βέβαιον εἶναι ὅτι δὲν ἐβράδυνον νὰ ἱδρυθοῦν καὶ ἀλλαχοῦ παραπλήσιοι ὀργανισμοὶ μὲ ὁμοίους σκοπούς. Χρονολογοῦνται πράγματι ἀπὸ τοῦ 1645 μερικαὶ συνεδριάσεις γενόμεναι εἰς Λονδῖνον καὶ Oxford ὑπὸ προσώπων ἐνδιαφερομένων διὰ φυσικὰς ἐρεύνας (ὑπὸ τὴν εὐρυτάτην ἔννοιαν τοῦ ὅρου). Ἡ σοβαρότης καὶ ἡ σπουδαιότης των προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι μεταξὺ τῶν συνελθόντων περιελαμβάνοντο οἱ G. Wallis, C. Wren καὶ ὁ λόρδος Brouncker, περὶ τῶν ἐργασιῶν τῶν ὁποίων θὰ λάβωμεν τὴν εὐκαιρίαν νὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὴν παροῦσαν Ἱ σ τ ο ρ ί α ν. Τὰ συνέδρια αὐτὰ ἐλάμβανον χώραν ἐκ διαλειμμάτων ἐπὶ μίαν δεκαπενταετίαν. Ἀλλ' ἀπὸ τῆς 11 Νοεμβρίου 1660 χρονολογεῖται ἕνα πρακτικὸν μεταξὺ τῶν μετεχόντων εἰς τὰς ἐργασίας τοῦ συνεδρίου, τὸ ὁποῖον πρακτικὸν καθώριζε τακτικὰς συνεδριάσεις εἰς Λονδῖνον κάθε Τρίτην εἰς μίαν αἴθουσαν τοῦ Κολλεγίου τοῦ Gresham. Μία τοιαύτη ἀπόφασις ἀπῄτει τὴν ἔγκρισιν τῆς ἀγγλικῆς Κυβερνήσεως, ὁ δὲ βασιλεὺς Κάρολος II, διὰ Διατάγματος τῆς 15ης Ἰουλίου 1662, ἀπένειμεν εἰς τὴν ἰδιωτικὴν ἐκείνην πρωτοβουλίαν ἕνα χαρακτῆρα μόνιμον καὶ ἐπισήμως ἀνεγνωρισμένον ὑπὸ τοῦ Κράτους, ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν Β α σ ι λ ι κ ὴ Ἑ τ α ι ρ ε ί α τ ο ῦ Λ ο ν δ ί ν ο υ (Royal Society of London), τὴν ὁποίαν καὶ φέρει ἀκόμη σήμερον. Μεταξὺ τῶν καθηκόντων, τὰ ὁποῖα ἀνετέθησαν εἰς τὰ μέλη της (φέροντα τὸν τίτλον «fellow», δηλαδὴ «ἑταίρου», καὶ συντετμημένως F.R.S), ἐκτὸς ἐκείνου τῆς ἐκτελέσεως, προωθήσεως ἢ διευθύνσεως πρωτοτύπων ἐρευνῶν καὶ δημοσιεύσεως αὐτῶν, ἦτο ἀκόμη καὶ ἡ ὑποχρέωσις νὰ πληροφοροῦν τὸ εὐρύτερον κοινὸν περὶ ὅλων τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιτευγμάτων, τὰ ὁποῖα διὰ τὸν ἄλφα ἢ βῆτα λόγον εἶχον ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον. Τοιουτοτρόπως ἀπεφασίσθη ἡ κανονικὴ ἔκδοσις τῶν Φ ι λ ο σ ο φ ι κ ῶ ν Π ρ α κ τ ι κ ῶ ν (Philosophical Transactions, ἀναφερόμενα συνηθέστερον μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα P.T.). Τούτων ἡ διεύθυνσις ἀνετέθη εἰς τὸν Oldenburg, ὁ ὁποῖος συνέταξε τὰ πρῶτα 136 τεύχη κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐτῶν 1664-1677. Τὰ P.T. εἶναι περίπου σύγχρονα μὲ τὴν Ἐ φ η μ ε ρ ί δ α τ ῶ ν Λ ο γ ί ω ν καὶ μόνον ἀπὸ ἁπλῆν τύχην φέρονται ἐκεῖνα εἰς τὴν δευτέραν ἀντὶ εἰς τὴν πρώτην θέσιν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιθεωρήσεων. Διὰ ν' ἀνταποκριθῇ καλύτερον εἰς τὰς κυβερνητικὰς ἀπόψεις, ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία προέβη εἰς τὴν ἔκδοσιν σπουδαίων ἔργων τῶν μελῶν της καὶ διὰ λατινικῶν μεταφράσεων διέδωσεν εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἄλλα ἔργα, τὰ ὁποῖα δὲν θὰ ἐγένοντο ἄλλως γνωστὰ ἐκεῖ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐξελιχθῇ εἰς κυριαρχοῦσαν πνευματικὴν δύναμιν τῆς ἐπιστήμης τόσον εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὅσον καὶ εἰς τὰς Ἀποικίας. Ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν, εἰς ἀπόδειξιν τούτου, τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἐγγραφὴ μιᾶς ἀνακαλύψεως εἰς τὰ πρακτικά της ἦτο ἐπαρκὴς διὰ τὴν ἀπόλυτον διασφάλισιν τῶν δικαιωμάτων πνευματικῆς ἰδιοκτησίας

τοῦ συγγραφέως. Ἐξ ἄλλου ἐκθαμβωτικὸν ἦτο τὸ φῶς τῆς δόξης ποὺ ἐρρίφθη ἐπὶ τῆς ἐπιστημονικῆς αὐτῆς ὀργανώσεως ἐκ τῆς παρουσίας εἰς τοὺς κόλπους της τοῦ Isaac Newton, ὁ ὁποῖος ἐνεγράφη ἑταῖρος τὴν 11ην Ἰανουαρίου 1672 καὶ διετέλεσε πρόεδρός της ἐπὶ μακρὰν σειρὰν ἐτῶν. Σημειωτέον ἀκόμη ὅτι, ἂν καὶ ἡ ἑταιρεία ἀπετέλει κυβερνητικὴν ἐκβλάστησιν, δὲν ἐπεχορηγεῖτο ὑπὸ τοῦ Κράτους. Τοὐναντίον ὁ κύριος αὐτῆς πόρος ἦτο καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι αἱ συνδρομαὶ τῶν ἑταίρων, οἱ ὁποῖοι εἶχον τὴν ὑποχρέωσιν νὰ καταβάλλουν τότε ἕνα σελίνιον ἑβδομαδιαίως, καὶ σήμερον τέσσαρας λίρας στερλίνας ἐτησίως. Διὰ τοῦτο ὁ προϋπολογισμὸς τῆς ἑταιρείας πολὺ συχνὰ εὑρίσκετο εἰς δυσανάλογον ὕψος ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέγεθος τῶν δαπανῶν, τὰς ὁποίας συνεπήγετο ἡ ἀνάπτυξις τῆς δραστηριότητός της ἐπ' ὠφελείᾳ τῆς ἐπιστήμης.

288. Εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς συγκεντρώσεις αἱ ὁποῖαι ἔδωσαν γένεσιν εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν, ἀντιπαραβάλλονται αἱ συγκεντρώσεις ποὺ ἐγίνοντο εἰς τὸ διαμέρισμα τοῦ Mersenne ἢ εἰς τὸ ἀνάκτορον τοῦ Hubert de Montmort, ἀνωτάτου κυβερνητικοῦ ὑπαλλήλου. Αἱ συγκεντρώσεις αὐταὶ δὲν ὑπηγορεύοντο μόνον ἀπὸ τὴν γενικὴν ἐπιθυμίαν νὰ βοηθήσουν τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, ἀλλ' ἐπίσης ἀπὸ τὴν εἰδικωτέραν πρόθεσιν νὰ σχολιάσουν καὶ ἐκλαϊκεύσουν τὴν καρτεσιανὴν φιλοσοφίαν. Ἐν τέλει κατέληξαν εἰς τὸ νὰ ἑφελκύσουν τὴν προσοχὴν τῆς γαλλικῆς Κυβερνήσεως καὶ τοῦ ὑπουργοῦ Colbert, ὁ ὁποῖος πάντοτε πρόθυμος εἰς αὔξησιν τοῦ γοήτρου τοῦ Λουδοβίκου XIV, δὲν ἐβράδυνε νὰ δώσῃ νόμιμον ὑπόστασιν εἰς τὰς συνεδριάσεις ἐκείνας τῶν λογίων, μὲ τὴν ἵδρυσιν (1666) τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν, ἱδρύματος διδύμου τῆς Γαλλικῆς Ἀκαδημίας τῶν γραμμάτων, ἡ ὁποία ὑφίστατο ἤδη ἀπὸ ἐτῶν. Ἐκλήθησαν νὰ γίνουν μέλη τῆς νέας ἀκαδημίας ἀκόμη καὶ ἐξοχότητες τοῦ ἐξωτερικοῦ, πολλοὶ τῶν ὁποίων ἐγκατεστάθησαν εἰς Παρισίους ἐπωφελούμενοι τῶν χορηγηθεισῶν ὑψηλῶν ἀποδοχῶν. Ἀρχικῶς ἔλαβον μέρος οἱ Carcavy, Huygens, Roberval, Frénicle, Anzut, Picard καὶ ἄλλοι.

Εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν βιολογικῶν ἐπιστημῶν δὲν ὑπῆρξε μικρὰ ἡ συμβολὴ τοῦ νέου ἱδρύματος μὲ τὸ νὰ δώσῃ τὴν ὤθησιν περισυλλογῆς καὶ ταξινομήσεως τῶν φυτῶν καὶ τῶν ζώων, ἐργασίας σημαντικῆς, καρποῦ κατὰ μέγα μέρος προγραμματισμένων περιηγήσεων εἰς μακρινὰς χώρας.

Ὑπενθυμίζομεν ἐπίσης ὅτι εἰς τὴν ἐν λόγῳ Ἀκαδημίαν ἀνήκει ἡ τιμὴ τῆς ἱδρύσεως τοῦ Ἀστεροσκοπείου τῶν Παρισίων καὶ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ Ἐκκρεμοῦς ὡρολογίου (Horologium oscillatorium), ἑνὸς ἐξαιρέτου ἔργου ὀφειλομένου εἰς ἕνα ἐκ τῶν διασημοτέρων μελῶν τῶν προερχομένων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ. Μὲ τὴν ἀνάληψιν τῆς ἐξουσίας ὑπὸ τοῦ ὑπουργοῦ Louvois (1683) ἤρχισε μία περίοδος παρακμῆς τῆς Ἀκαδημίας, διότι

ἐπεβλήθη εἰς αὐτὴν ὑπὸ τῆς Κυβερνήσεως ν' ἀσχοληθῇ ἀποκλειστικῶς μὲ θέματα ἔχοντα κάποιαν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν καὶ νὰ παραιτηθῇ «παντὸς θέματος μὴ ἐξυπηρετοῦντος παρὰ τὴν ἁπλῆν περιέργειαν καὶ τὴν διασκεδαστικὴν τρόπον τινὰ ἀσχολίαν τοῦ χημικοῦ». Εὐτυχῶς ἡ κατάστασις αὐτὴ δὲν εἶχε μακρὰν διάρκειαν· διότι τὸ 1699 ἐδόθη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν νέον καταστατικόν, τὸ ὁποῖον τῆς ἐξησφάλισεν ἐπὶ ἕνα αἰῶνα (δηλαδὴ μέχρι τῆς γαλλικῆς ἐπαναστάσεως) μίαν ὕπαρξιν ἠρεμίας καὶ γονιμότητος. Ἡ Ἱστορία ποὺ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας μὲ τὰ προσηρτημένα Ὑπομνήματα δίδει πληροφορίας περὶ τῶν ἔργων τῶν μελῶν, ἀμυδρὰν ὅμως ἰδέαν παρέχει τῶν συζητήσεων, ποὺ διεξήγοντο ἐνίοτε μὲ βιαιότητα, μεταξὺ τῶν ὑποστηρικτῶν τοῦ κλονιζομένου καρτεσιανισμοῦ καὶ τῶν ὀπαδῶν τοῦ ἐπιφαινομένου ρεύματος τῶν ἰδεῶν τοῦ Newton.

289. Ἡ νέα Ἀκαδημία, ἱδρυθεῖσα ἐπὶ τῆς ἐποχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἕνας μέγας βασιλεὺς μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς πνευματώδους ὑπουργοῦ ὡδήγησε τὴν Γαλλίαν εἰς τὰ ἀκρότατα ὅρια τῆς ἰσχύος, ἤσκησεν ἐπίσης μεγάλην καὶ εὐεργετικὴν ἐπίδρασιν ἐκτὸς τῆς χώρας καὶ προεκάλεσε τὴν δημιουργίαν ἄλλων παρομοίων θεσμῶν.

Εἰς τὴν Γερμανίαν, τὰ ἐπιστημονικὰ σωματεῖα, ποὺ ἀνεφάνησαν ἐκεῖ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος, διεμορφώθησαν κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν ἰταλικῶν ἀκαδημιῶν (Lincei καὶ Cimento) καὶ συνεπῶς ἠκολούθησαν ἀποκλειστικῶς πρόγραμμα ἀναπτύξεως τῶν πειραματικῶν ἐπιστημῶν καὶ μάλιστα μὲ ἀποτελέσματα μετριότητος, διὰ τὸν λόγον δὲ τοῦτον καὶ δὲν ἀξίζουν ἐκ μέρους μας περιγραφὴν μεγαλυτέραν τῆς ἁπλῆς μνείας. Μόνον μὲ τὴν ἐκπνοὴν τοῦ αἰῶνος ἐνεφανίσθη ἡ Ἑταιρεία τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, ἱδρυθεῖσα ὑπὸ τὴν κυρίαν ὤθησιν τοῦ Leibniz, τὴν 11ην Ἰουλίου 1700. Τὸ καταστατικόν της παρουσιάζει καταφανῆ ἀπόκλισιν ἀπὸ τὰ καταστατικὰ τὰ διέποντα τὰς συγγενεῖς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου καὶ τῶν Παρισίων, τὰς ὁποίας ὁ φιλόσοφος τῆς αἰσιοδοξίας εἶχε γνωρίσει ἐν λειτουργίᾳ κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ταξειδίων του.

Ἡ διαφορὰ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου συνίστατο κυρίως εἰς τοῦτο, ὅτι μεταξὺ τῶν ἄλλων σκοπῶν της ἐτίθετο καὶ ἡ ἐπιμέλεια τῆς πατρῴας γλώσσης. Διέφερεν ὅμως καὶ κατὰ τοῦτο· ὅτι τὰ εἰσοδήματά της δὲν προήρχοντο ἐκ συνδρομῶν τῶν μελῶν οὔτε ἐκ κρατικῶν ἐπιχορηγήσεων, ἀλλ' ἐκ τοῦ προϊόντος τῆς πωλήσεως τῶν ἡμερολογίων, τὰ ὁποῖα διέθετε μονοπωλιακῶς ἡ Ἀκαδημία κατὰ ἐκχωρηθὲν εἰς αὐτὴν δικαίωμα ἀποκλειστικότητος.

Τὰ πρῶτα ἔτη τοῦ βίου τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου ὑπῆρξαν ὀλίγον εὐτυχῆ καὶ ἀκόμη ὀλιγώτερον ἔνδοξα. Μόνον ἀπὸ τοῦ 1710 ἔδωσε δημοσίως δείγματα τῆς δραστηριότητός της, δημοσιεύουσα ἐτησίως τὰ Miscellanea

Berolinensia ad incrementum scientiarum (Βερολίνεια ἀνάλεκτα πρὸς ἀνάπτυξιν τῶν ἐπιστημῶν). Τὰ βιογραφικὰ δεδομένα τῶν πολυαρίθμων μαθηματικῶν —μὴ ὅλων γερμανῶν— οἱ ὁποῖοι ὑπῆρξαν μέλη κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVIII αἰῶνος θὰ χρησιμεύσουν εἰς τὸ νὰ δώσουν μίαν ἰδέαν τῶν περιπετειῶν των κατὰ τὴν περίοδον ἐκείνην.

Θὰ τελειώσωμεν μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι αἱ βραδύτερον δημιουργηθεῖσαι Ἀκαδημίαι τῆς Πετρουπόλεως καὶ τῆς Βιέννης δὲν εἶναι ἄσχετοι πρὸς τὴν προσωπικότητα τοῦ Leibniz, ὁ ὁποῖος ἐκτὸς τοῦ ὅτι διετήρει ζωηρὰν ἐπιστολικὴν ἀλληλογραφίαν μὲ τὸν Μέγαν Πέτρον, διέμεινεν ἐπὶ μακρόν, χάριν ἐπιστημονικῶν μελετῶν, καὶ εἰς τὴν αὐστριακὴν πρωτεύουσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXI

ΠΡΩΤΑ ΕΤΗ ΕΝΟΣ ΕΝΔΟΞΟΥ ΑΙΩΝΟΣ

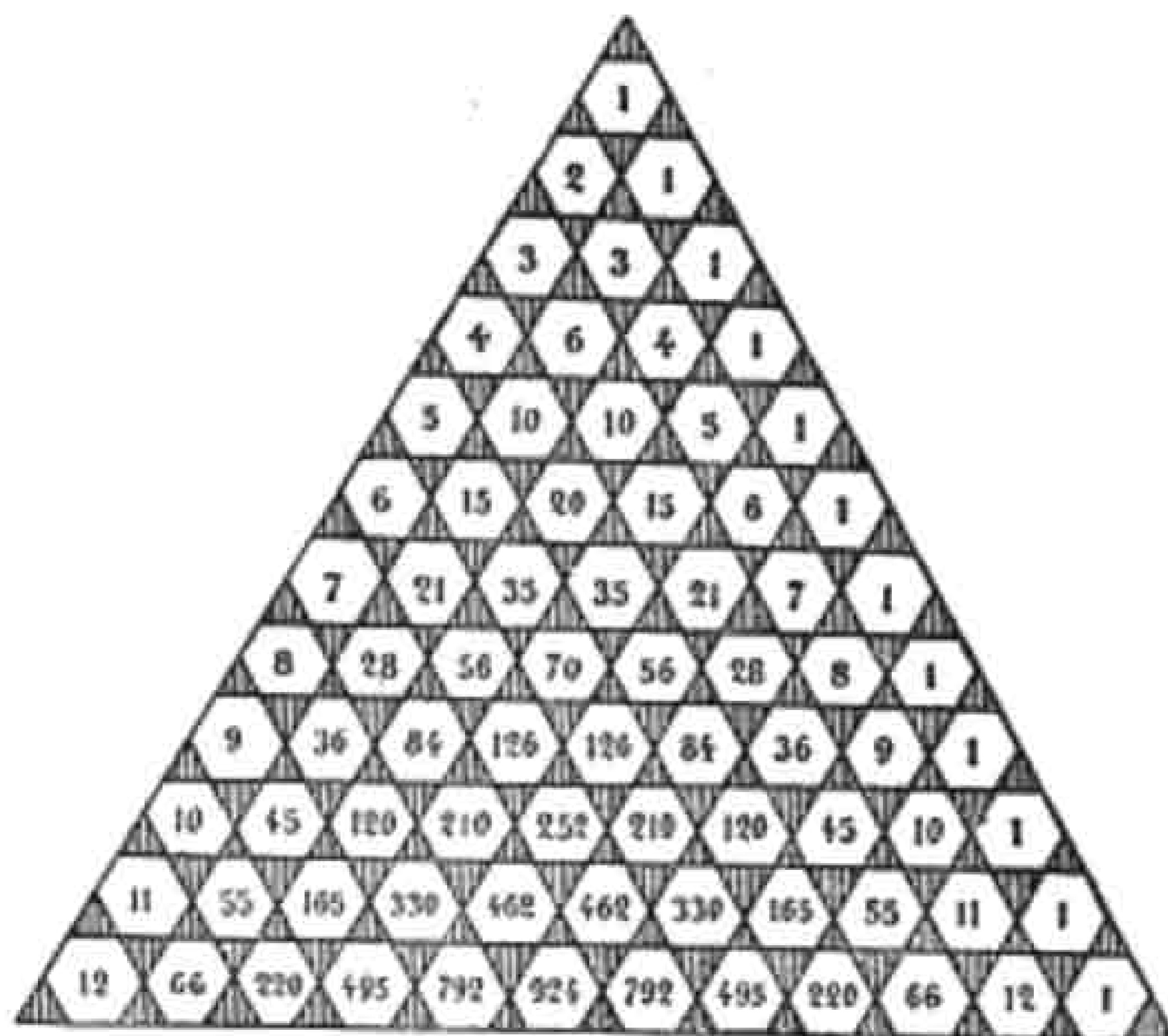
John Napier

290. Πολὺ ὀλίγα πράγματα γνωρίζομεν γύρω ἀπὸ τὰ περιστατικὰ τῆς ζωῆς τοῦ John Napier (κοινῶς Νέπερ). Καταγόμενος ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν σκώτων διαμαρτυρομένων, ἐγεννήθη εἰς τὸν κληρονομικὸν πύργον τοῦ Merchiston (πλησίον τοῦ Ἐδιμβούργου) τὸ 1550. Ἀπὸ τοῦ 1563 ἐνεγράφη εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ St. Salvator, τὸ ὁποῖον ἦτο προσηρτημένον εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ St. Andrews, ἀλλὰ δὲν ἐπεδίωξε τὸ δίπλωμα. Κατὰ μίαν εὐρύτατα διαδεδομένην γνώμην, ἐταξίδευσεν εἰς Ὀλλανδίαν καὶ Ἰταλίαν, ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει τεκμήριον δυνάμενον νὰ καθορίσῃ ὁριστικῶς, ἂν πρόκειται περὶ θρύλου ἢ ἱστορίας. Ἐνυμφεύθη εἰς ἡλικίαν μόλις εἴκοσι ἐτῶν καὶ ἐμοίρασε τὸν χρόνον του μεταξὺ τῆς διαχειρίσεως τῆς σεβαστῆς πατρικῆς του κληρονομίας καὶ τῆς ἐκπληρώσεως δημοσίων καθηκόντων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸν ἐκάλει ἡ ἐμπιστοσύνη τῶν συμπολιτῶν του. Καρπὸς τῶν θεολογικῶν του μελετῶν ὑπῆρξεν ἕνα ἔργον μὲ τίτλον A plaine discovery of the whole revelation of St. John (Μία ἁπλῆ ἀνακάλυψις, ἐξ ὁλοκλήρου τῆς ἀποκαλύψεως τοῦ Ἁγίου Ἰωάννου, 1593), τοῦ ὁποίου σκοπὸς ἦτο νὰ καταδείξῃ τὴν ταυτότητα τοῦ Ἀντιχρίστου μὲ τὸν Πάπαν. Αἱ πολυάριθμοι ἐκδόσεις καὶ μεταφράσεις τοῦ ἔργου τούτου ἀποτελοῦν ἰσάριθμα τεκμήρια τῆς μεγάλης καὶ μακρᾶς ἐπιτυχίας του. Ὁ Napier ἀπέθανε τὴν 3ην Ἀπριλίου 1617.

Τὸ ἐπικρατοῦν σκότος ὅσον ἀφορᾷ τὰς σπουδάς του καθιστᾷ ἀδύνατον πᾶσαν προσπάθειαν νὰ δοθῇ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα: διατί καὶ κατὰ ποίαν ἐποχὴν τῆς ζωῆς του τὸ πνεῦμα του ἐστράφη πρὸς τὰ μαθηματικά; Σῴζεται ἕνα ἀπόσπασμα χειρογράφου του μὲ τὸν τίτλον De arte logistica (Περὶ λογιστικῆς τέχνης), τοῦ ὁποίου ἀντίγραφον, διὰ χειρὸς τοῦ υἱοῦ του Robert, ἀπευθυνόμενον πρὸς τὸν πιστότερον συνεργάτην του (ἐννοοῦμεν τὸν Briggs) καὶ περισωθὲν θαυματουργικῶς, ἐδημοσιεύθη τὸ 1839, ἂν ἡ λέξις ἐδημοσιεύθη εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἐκτυπώσεως, γενομένης ὑπὸ

τὴν αἰγίδα μιᾶς ἀγγλικῆς Λέσχης πρὸς ἀποκλειστικὴν διανομὴν τῶν ἀντιτύπων εἰς τὰ μέλη της *.

Τὸ κείμενον αὐτὸ περιλαμβάνει 5 Βιβλία, ἐκ τῶν ὁποίων τρία ἀναφέρονται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ δύο εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Δὲν εἶναι ὅλα πλήρη, οὔτε καὶ διδάσκουν κάτι τὸ οὐσιωδῶς νέον εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος γνωρίζει τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν τοῦ XVI αἰῶνος. Οὕτω τὸ ἀριθμητικὸν τρίγωνον ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Napier (σχ. 11) ἔχει μίαν διάταξιν



Σχ. 11

καθ' ὅλα ὁμοίαν πρὸς ἐκείνην ποὺ εἶχε δώσει ὁ Tartaglia (σχ. 2, § 223), ἐκεῖνος δὲ ὁ ὁποῖος ἀποδίδει εἰς τὸν Napier πραγματικὴν πρωτοτυπίαν ἀπόψεων ὅσον ἀφορᾷ τὴν φύσιν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν λησμονεῖ ὅσα περιέχονται εἰς τὴν Ἄ λ γ ε β ρ α ν τοῦ Bombelli (δημοσιευθεῖσαν, πρέπει νὰ ὑπενθυμίσωμεν, ὅταν ἦτο περίπου εἰκοσαετής). Ἂς προσθέσωμεν ὅτι ὁ σκῶτος διανοούμενος ἐσταμάτησεν εἰς τὸ κατώφλιον μιᾶς θεωρίας μυστηριώδους, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἰταλὸς εἶχεν εἰσδύσει μετὰ θάρρους. Δὲν θὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν διαφόρων συμβολισμῶν του, πρὸς παράστασιν τῶν διαφόρων ριζῶν, ἀφοῦ παρέμειναν θνησιγενεῖς. Ἀναφέρομεν μόνον τὴν ὕπαρξιν αὐτῶν ὡς ἕνα ἀκόμη σύμπτωμα τῆς ἀνάγκης —ποὺ ἦτο διάχυτος ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμίσεος τοῦ XVI αἰῶνος— πρὸς διευκόλυνσιν

* Αἱ ἀκολουθοῦσαι πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὸ De arte logistica ἐλήφθησαν ἀπὸ τὸ ἄρθρον τοῦ J. E. A. Steggall: A short account of the treatise «De arte logistica» in Napier Tercentenary Memorial (London, 1915)

τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀλγεβρικῶν ὑπολογισμῶν μέσῳ σημείων ἐπίτηδες (ad hoc) θεσπιζομένων.

291. Τὸ ἴδιον σκότος ποὺ περιβάλλει τὴν γένεσιν τοῦ ἀνωτέρω κειμένου «Περὶ λογιστικῆς τέχνης», ἀντιμετωπίζει καὶ ὁ ἐπιθυμῶν νὰ ἐρευνήσῃ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Napier ἐσκέφθη ν' ἀνακαλύψῃ τρόπους πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ἔργου τῶν ὑπολογιστῶν. Κατὰ δήλωσιν τοῦ ἰδίου, ἔλαβεν ἀφορμὴν ν' ἀσχοληθῇ μὲ αὐτὸ τὸ ζήτημα, ὅταν ἀνεγνώρισεν ὅτι τίποτε δὲν εἶναι κοπιαστικώτερον καὶ ἀνιαρώτερον εἰς τὰ πρακτικὰ μαθηματικὰ ὅσον ἡ ἐκτέλεσις πολλαπλασιασμῶν καὶ διαιρέσεων, ὡς καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν, πράξεων αἱ ὁποῖαι ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἀπαιτοῦν πολὺν χρόνον, εἶναι ἐκτεθειμέναι εἰς τὸν κίνδυνον τῶν σφαλμάτων.

Τὸ πρῶτον τέχνασμα ποὺ ἐπενόησε πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἐγνώρισε μεγάλην καὶ δυσανάλογον ἴσως φήμην ὑπὸ τὸ ὄνομα «ραβδία τοῦ Νέπερ». Λεπτομερείας ἐπὶ τῆς χρήσεως τοῦ τεχνάσματος τούτου εὑρίσκομεν εἰς ἕνα ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Ραβδολογία (Rabdologia), τὸ ὁποῖον, ἴσως ἐπειδὴ ἐδημοσιεύθη εἰς ἐποχὴν καθ' ἣν τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως εἶχε δι' ἄλλον λόγον ἀποκτήσει τεραστίαν φήμην, ἐγνώρισεν ἀλλεπαλλήλους ἐκδόσεις καὶ ἀναριθμήτους μεταφράσεις. Ὅπως δηλοῖ ὁ ἴδιος εἰς τὸν πρόλογον, ἔλαβε τὴν ἀπόφασιν νὰ γράψῃ τὸ βιβλίον αὐτό, διότι πολλοὶ φίλοι του εἰς τοὺς ὁποίους εἶχε κάμει λόγον περὶ τοῦ ὀργάνου, καὶ τῆς χρήσεώς του, ἔμειναν τόσον ἱκανοποιημένοι, ὥστε τὰ ραβδία ἐκεῖνα δὲν ἐβράδυναν νὰ καταντήσουν λογιστικὰ μέσα κοινῆς χρήσεως εἰς τὴν Ἀγγλίαν.

Ἡ ἁπλουστάτη ἀρχὴ ποὺ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς λογιστικῆς μηχανῆς τοῦ Νέπερ δύναται νὰ ἐκτεθῇ εὐκόλως, ἂν φαντασθῶμεν δέκα μικρὰς ὀρθογωνίους λωρίδας ἀπὸ χαρτόνι, ἑκάστη τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς ἐννέα τετράγωνα. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ἄνω τετράγωνον ἐγγράφεται ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία 0, 1, 2, ..., 9. Τὰ ὑπόλοιπα τετράγωνα διαιροῦνται ὑπὸ τῆς μιᾶς διαγωνίου εἰς δύο μέρη προοριζόμενα τὸ ἕνα διὰ τὰς μονάδας, τὸ ἄλλο διὰ τὰς δεκάδας. Εἰς τὸ σχ. 12 εἰκονίζονται κατὰ παράθεσιν αἱ λωρίδες αἱ φέρουσαι ἐπὶ κεφαλῆς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 0, 8, 5, παραπλεύρως δὲ καὶ δεξιὰ τούτων ἐτέθη μία ἄλλη λωρὶς διῃρημένη ἐπίσης εἰς ἐννέα, μὴ ὑποδιῃρημένα τετράγωνα, φέροντα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,..,9. Ἡ λωρὶς τοῦ 2 περιέχει κάτωθεν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὰ γινόμενά του ἐπὶ τοὺς ἐννέα πρώτους φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀναλόγως ἑκάστη τῶν λοιπῶν λωρίδων 0, 8, 5. Μὲ τὴν εἰκονιζομένην διάταξιν αἱ λωρίδες δίδουν τὰ πρῶτα ἐννέα πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ 2085, ὅταν συμφωνήσωμεν νὰ προσθέτωμεν τὰ ψηφία ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ αὐτὸ παραλληλόγραμ-

μον. Οὕτω τὸ γινόμενον 6 × 2085 θὰ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ στίχου 6:

$$0,(8+3),(0+4),2,1$$

ἤ, μετὰ τὴν μεταφορὰν εἰς τὴν ἑπομένην θέσιν μιᾶς ἑκατοντάδος (10 δεκάδων),

$$0,1,5,2,1,$$

τελικῶς λοιπόν: $12510 = 6 \times 2085.$

Ἂν τώρα θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2085 ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον, π.χ. τὸν 736, ἀπὸ τὸ ἴδιον σχῆμα λαμβάνομεν τὰ μερικὰ γινό-

Σχ. 12

Σχ. 13

μενα τοῦ 2085 κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 6, 3, 7, καὶ κατόπιν τὰ προσθέτομεν κατὰ τὴν ἀκόλουθον διάταξιν:

```
  12510
  6255
14595
1534560
```

Τοιουτοτρόπως κάθε πολλαπλασιασμὸς τρέπεται εἰς ἁπλῆν πρόσθεσιν.

Ἔπειτα ἀπὸ ὅσα εἴπομεν, εἶναι εὔκολον νὰ κατανοήσωμεν τί εἶναι τὰ «ραβδία τοῦ Νέπερ» καὶ πῶς χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἐκτέλεσιν ὑπολογισμῶν. Εἶναι παραλληλεπίπεδα ἐπιμήκη, ἀπὸ ξύλον ἢ ἄλλην οὐσίαν, μὲ βάσιν τετράγωνον. Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἑνὸς πρισματικοῦ ραβδίου φέρει ἐννέα ἴσα τετράγωνα, ὅπως ἀκριβῶς ἐκεῖνα, ποὺ εἴδομεν προηγουμένως εἰς τὰς λωρίδας. Τὰ ραβδία εἶναι 10 τὸν ἀριθμὸν καὶ θὰ τὰ χαρακτη-

ρίσωμεν μὲ τοὺς λατινικοὺς ἀριθμοὺς I, II, III,...,X. Αἱ τέσσαρες ἕδραι ἑκάστου περιέχουν τὰ πολλαπλάσια τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν.

I	0	1	9	8
II	0	2	9	7
III	0	3	8	6
IV	0	4	9	5
V	1	2	8	7
VI	1	3	8	6
VII	1	4	8	5
VIII	2	3	7	6
IX	2	4	7	5
X	3	4	6	5

Συνάγεται ἐξ αὐτοῦ, ὅτι κάθε ραβδίον φέρει ἐπὶ δύο ἀντικειμένων ἑδρῶν τὰ πολλαπλάσια δύο συμπληρωματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ διάταξις τῆς γραφῆς εἰκονίζεται εἰς τὸ σχ. 13, ὅπου παρίσταται τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ραβδίου V. Ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν τῶν ραβδίων εἶναι ἐν ὅλω 40, δέκα ἐξ αὐτῶν ἰσοδυναμοῦν πρὸς 4 σειρὰς λωρίδων, ὅπως ἐκεῖναι ποὺ περιεγράψαμεν.

292. Ἡ ἁπλῆ λογιστικὴ συσκευή, τῆς ὁποίας ἐδώσαμεν ἀνωτέρω μίαν ἰδέαν, ἐπαρκεῖ εὐρύτατα εἰς τὰς συνήθεις περιστάσεις τῆς πράξεως, εἶναι ὅμως, χωρὶς ἀμφιβολίαν, δυσανάλογος πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τῶν ἀστρονομικῶν ὑπολογισμῶν. Φυσικὸν λοιπὸν ἦτο διὰ τὸν σκῶτον μαθηματικὸν νὰ ἐπιδιώξῃ τὴν ἐπινόησιν ἄλλου βοηθητικοῦ μέσου προσφορωτέρου καὶ ἰσχυροτέρου διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀστρονομίας. Εἶναι ἄγνωστοι αἱ φάσεις τῶν μελετῶν, ποὺ ὡδήγησαν τελικῶς εἰς τὴν ἐπινόησιν τῶν λογαρίθμων (κατὰ τὸν ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰσαχθέντα νεολογισμὸν εἰς τὴν ἐπιστήμην), τοὺς ὁποίους ἔκαμε γνωστοὺς τὸ 1614 μὲ τὸ περίφημον ἔργον του Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Περιγραφὴ τοῦ θαυμασίου κανόνος τῶν λογαρίθμων), ποὺ ὑπῆρξε καρπὸς εἰκοσαετοῦς ἀκαταπονήτου ἐργασίας. Φυσικὸν εἶναι ὅμως νὰ σκεφθῶμεν ὅτι θὰ ἐθεώρει τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν ὡς πράξεις μὴ ἐπιδεχομένας περαιτέρω ἀναγωγήν. Λογικὸν εἶναι νὰ τὸ ὑποθέσωμεν ἐξετάζοντες τὸν μηχανισμὸν τῶν «ραβδίων», ὅπου πράγματι ἡ πρόσθεσις εἶναι ἡ μόνη πρᾶξις ποὺ ὑποχρεοῦται νὰ κάμῃ ὁ ὑπολογιστής. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλα γεγονότα ἐπιβεβαιοῦντα τὴν ὑπόθεσιν αὐτήν. Ἐκεῖνος πρὸ πάντων, ὁ ὁποῖος ἐνεπνεύσθη ἀπὸ τὴν ἰδέαν τοῦ Neper, ὑπῆρξεν ὁ ἀστρονόμος Giovanni Antonio Magini (§277). Εἰς τὸν τελευταῖον πράγματι ὀφείλεται ὁ λεγόμενος Τετραγωνικὸς πίναξ (Tavola tetragonica, 1592) ὁ ὁποῖος συνίσταται εἰς μίαν σειρὰν συγκροτουμένην ἀπὸ τὰ τετράγωνα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ

ὁποίου ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν μιᾶς διαφορᾶς, χάρις εἰς τὴν ταυτότητα:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Ἡ αὐτὴ ἰδέα ἀποτελεῖ ἐξ ἄλλου τὴν βάσιν καὶ τῆς προσθαφαιρέσεως, ἡ ὁποία, ἀκριβῶς κατὰ τὴν νεπέρειον ἐποχήν, ἤρχισε νὰ γίνεται εὐρύτερον γνωστὴ καὶ νὰ χρησιμοποιῆται εἰς τοὺς ὑπολογισμούς. Ἂς σημειωθῇ τέλος ὅτι εἰς τὸν Ψαμμίτην τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρίσκεται ἐφαρμογὴ μιᾶς προτάσεως, ἡ ὁποία σήμερον ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου:

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n} \quad (2)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγεται ὅτι τοὐλάχιστον δι' ὡρισμένους προνομιούχους ἀριθμοὺς ὁ πολλαπλασιασμὸς δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ὅτι ἀναλόγους μεταμορφώσεις δύνανται νὰ ὑποστοῦν ἡ διαίρεσις, ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ρίζης.

Εἶναι πιθανὸν ὁ Νέπερ νὰ ἔθεσεν ὡς σκοπόν του νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν δύναμιν τῆς σχέσεως (2) ἀκόμη καὶ εἰς ἐκθέτας μὴ ἀκεραίους καὶ θετικούς, μέσῳ μιᾶς πράξεως συμπιπτούσης κατ' οὐσίαν μὲ τὴν παρεμβολήν. Ὁ σκοπὸς οὗτος θὰ ἐπετυγχάνετο, ὅταν θὰ εἶχεν ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς N ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς μία δύναμις τοῦ 10 (ἢ ἄλλου σταθεροῦ ἀριθμοῦ), ἀρκεῖ ὁ ἐκθέτης νὰ ἐκλεγῇ καταλλήλως. Ἂν εἰς τὸν ὑποθετικὸν αὐτὸν ἐκθέτην δοθῇ τὸ ὄνομα «λογάριθμος τοῦ N», τότε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι κάθε ἀριθμὸς N ἔχει ἕνα λογάριθμον καὶ ἔπειτα ὅτι ὑπάρχει τρόπος ὑπολογισμοῦ του. Τοῦτο εἶναι ἕνα θεώρημα ὑπάρξεως, τὸ ὁποῖον οὔτε διετυπώθη, οὔτε φυσικὰ καὶ ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Νέπερ, ὁ ὁποῖος ὅμως τὸ ἐφαρμόζει σιωπηρῶς μὲ τὸ γαλήνιον ἐκεῖνο θάρρος, ποὺ ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικώτερα γνωρίσματα τῆς μεγαλοφυΐας.

Στηριζόμενος, ἐξ ἄλλου, εἰς τὴν σύγκρισιν μεταξὺ δύο προόδων, μιᾶς γεωμετρικῆς καὶ ἄλλης ἀριθμητικῆς, τὴν ὁποίαν σύγκρισιν συνηντήσαμεν ἤδη εἰς ἕνα ἔργον τοῦ Stiefel (§ 240), ἠδυνήθη ν' ἀποκαταστήσῃ τὴν θεμελιώδη πρότασιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἂν 4 ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, οἱ λογάριθμοί των ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Σημειωτέον τέλος ὅτι ἡ σχετικὴ θεωρία ἐκτίθεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Νέπερ ὑπὸ μορφὴν ἐντελῶς διάφορον ἐκείνης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἀπαντᾶται σήμερον εἰς τὰ ἐν χρήσει σχολικὰ ἐγχειρίδια.

293. Ἡ ὑποδοχὴ τῆς ὁποίας ἔτυχεν ἡ ἐπινόησις τοῦ Νέπερ ὑπῆρξε πράγματι ἀνάλογος τῆς ἀξίας της. Ὁ Edward Wright (1560-1615), μαθηματικὸς εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς Ἑταιρείας τῶν Ἰνδιῶν, καὶ γνωστὸς ὡς τολμη-

ρὸς ἐξερευνητὴς καὶ χαρτογράφος ἀπαράμιλλος, ἀνεμέτρησεν ἀμέσως τὴν τεραστίαν πρακτικὴν σημασίαν της καὶ ἐξεδήλωσε τὸν ἐνθουσιασμόν του μὲ μίαν πρότασιν, ὅπως ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων υἱοθετηθῇ, ἄνευ ἀναβολῆς καὶ ἐπιφυλάξεως, ἀπὸ ὅλους τοὺς ὑπολογιστάς. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ αὐτὸν μετέφρασεν εἰς τὰ ἀγγλικὰ τὸ ἔργον τοῦ Νέπερ, εἰς τὸν ὁποῖον καὶ ἀπέστειλε τὸ μεταφρασμένον κείμενον διὰ νὰ λάβῃ καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὴν γνώμην καὶ τὴν ἔγκρισίν του. Ὁ Νέπερ ἐπεδοκίμασε τόσον ἐνθουσιωδῶς τὴν ἐργασίαν τοῦ Wright, ὥστε ἠθέλησε νὰ τὴν πλουτίσῃ καὶ μὲ ἰδικόν του πρόλογον. Ὁ ἐπελθὼν ὅμως θάνατος τοῦ Wright ἐπεβράδυνε τὴν ἐκτύπωσιν, ἡ ὁποία συνεπληρώθη μόνον τὸ 1616.

Ἡ τύχη ἠθέλησεν, ὥστε μία ἀνάλογος κριτικὴ ἐπὶ τῆς νεπερείου ἐφευρέσεως, νὰ διατυπωθῇ ἀπὸ τὸν Henry Briggs (γεννηθέντα τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1556 πλησίον τοῦ Halifax καὶ ἀποθανόντα τὴν 26 Ἰανουαρίου 1630), ὁ ὁποῖος τότε ἐδίδασκεν εἰς τὸ Κολλέγιον Gresham τοῦ Λονδίνου, κατόπιν δὲ (1619) κατέστη πρῶτος διάδοχος τῆς ἕδρας τῆς γεωμετρίας, ποὺ εἶχεν ἱδρύσει εἰς τὸ Oxford ὁ E. Savile. Ὁ Briggs δὲν ἐδίστασε νὰ διακηρύξῃ τὴν ἐπινόησιν πρωτότυπον καὶ θαυμαστὴν καὶ νὰ θέσῃ ὡς σκοπὸν τῆς ζωῆς του τὴν διάδοσιν καὶ τελειοποίησίν της. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἔκαμε τὸ 1615 μίαν ἐπίσκεψιν εἰς τὸν Νέπερ, ἡ ὁποία παρετάθη ἐπὶ ὁλόκληρον μῆνα. Μία δευτέρα ἐπίσκεψις ἔλαβε χώραν τὸ ἑπόμενον ἔτος καὶ μία τρίτη θὰ ἠκολούθη τὸ 1617, ἂν ἐν τῷ μεταξὺ ὁ μέγας ἐφευρέτης δὲν εἶχεν ἀποθάνει.

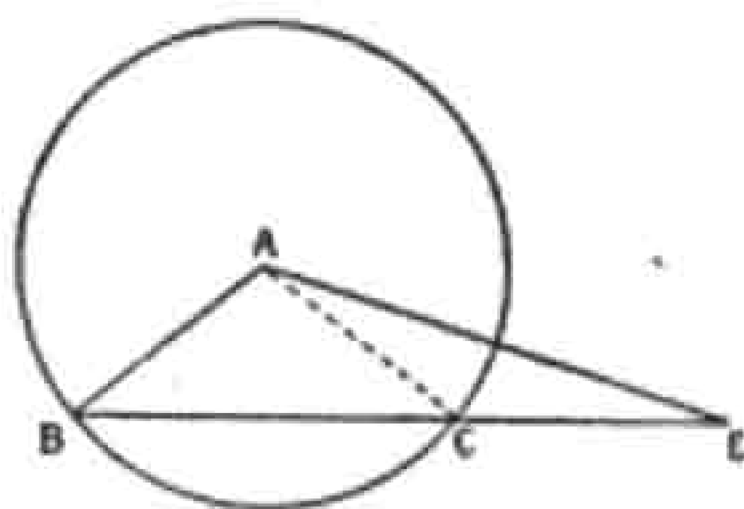
Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πρώτης ἐπισκέψεως ὁ Briggs ἔλαβε τὴν εὐκαιρίαν νὰ προτείνῃ μίαν τροποποίησιν τοῦ νεπερείου συστήματος, ἡ ὁποία εἶχεν ὡς τελικὸν ἀποτέλεσμα τὴν δημιουργίαν τῶν λογαρίθμων μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, μετὰ τὴν ἐκφρασθεῖσαν συγκατάθεσιν τοῦ Νέπερ. Τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀνέλαβεν ὁ ἴδιος ὁ Briggs, ὁ ὁποῖος τὸ 1617 ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον Πρώτη χιλιὰς λογαρίθμων (Logarithmorum chilias prima), ὅπου καταχωροῦνται μὲ 8 δεκαδικὰ ψηφία οἱ λογάριθμοι τῶν χιλίων πρώτων ἀριθμῶν. Ἑπτὰ ἔτη βραδύτερον ὁ Briggs ἐδημοσίευσεν ἕνα σημαντικὸν συμπλήρωμα τοῦ ἔργου τούτου ὑπὸ τὸν τίτλον Λογαριθμικὸς Λογισμός (Arithmetica logarithmica), ὅπου καταχωροῦνται μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι 20 χιλιάδων, καὶ ἀπὸ 90 χιλιάδων μέχρι 100 χιλιάδων. Περιλαμβάνονται δ' ἐπίσης αἱ χρησιμοποιούμεναι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ καὶ καταδεικνύεται διὰ ποικιλίας ἐνδιαφερόντων παραδειγμάτων ἡ χρησιμότης καὶ ἡ ὠφέλεια τῶν λογαρίθμων. Ἐν τῷ μεταξὺ (1619) ἐδημοσιεύθη, τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ Robert Napier, ὑπὸ τοῦ ἐφευρέτου τῶν λογαρίθμων, τὸ ἄλλο θεμελιῶδες ἔργον Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐγένοντο γνωσταὶ αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἐξαγόμενα ἐκτίθενται εἰς τὸ ἔργον τοῦτο.

Εἰς τὴν διάδοσιν τοῦ νέου ἀλγορίθμου εἰς τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην συνέβαλε τὰ μέγιστα ἕνας Ὁλλανδὸς εὐγενής, ὁ Adrian Vlacq, γεννηθεὶς εἰς Gouda κατὰ τοὺς πρώτους χρόνους τοῦ XVII αἰῶνος. Ὄχι μόνον ἀνετύπωσε καὶ μετέφρασε τὰ γραπτὰ τοῦ Napier καὶ τοῦ Briggs, ἀλλὰ συνεπλήρωσε τὸ κενὸν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ τελευταίου, προσδιορίζων μὲ 10 δεκαδικὰ ψηφία τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 20 χιλιάδας μέχρι 90 χιλιάδων. Ἐπὶ πλέον μὲ τὸ ἔργον του Trigonometria artificialis (Τεχνασματικὴ τριγωνομετρία) — περιέχον τοὺς λογαρίθμους, μὲ 10 δεκαδικὰ ψηφία, τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν — ἐπέτυχε νὰ ἴδῃ μὲ ἱκανοποίησιν τοὺς λογαρίθμους νὰ διαδίδωνται ὄχι πλέον εἰς τὸν εὐρωπαϊκὸν χῶρον, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν Ἀσιατικὴν Ἤπειρον καὶ δὴ εἰς τὴν Κίναν, χάρις εἰς τὰς ἀναριθμήτους ἐκδόσεις καὶ μεταφράσεις τοῦ ἔργου του.

294. Τὰ δύο μεγάλα ἔργα τοῦ Napier ἔχουν ἐπίσης ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν τριγωνομετρίαν, διότι ὁ σκῶτος μαθηματικὸς δὲν ἐθεώρησεν ἀναξίαν λόγου ἀσχολίαν νὰ κατέλθῃ εἰς ἐφαρμογάς, ἀποσκοποῦσας εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐπιπέδων ἢ σφαιρικῶν τριγώνων ἐξ ἐπαρκοῦς ἀριθμοῦ δεδομένων στοιχείων.

Δὲν ὑπάρχει τίποτε ἄξιον μνείας ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα τρίγωνα, διότι αἱ σχέσεις ποὺ συνδέουν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας εἶναι ἀμέσως λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων. Δύναται μόνον νὰ σημειωθῇ ὅτι, γράφων ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεων τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι προηγουμένως ἐσυνηθίζετο νὰ γράφωνται ὑπὸ μορφὴν ἀναλογιῶν, ὁ Νέπερ εἰσήγαγε τὸ σύστημα τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων. Ὑπολογιστοὶ διὰ λογαρίθμων εἶναι ἐπίσης ὁ τύπος τῶν ἡμιτόνων καὶ ὁ ἔνδοξος τύπος τοῦ Finck:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{εφ}\,\frac{A-B}{2}}{\text{εφ}\,\frac{A+B}{2}}.$$



Σχ. 14

Διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἐν σχέσει πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου διὰ τυχὸν τρίγωνον ABE (σχ 14), ὁ Νέπερ εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τῆς «ἐπαλλήλου βάσεως» (basis alterna), ὄνομα τὸ ὁποῖον ἔδωσεν εἰς τὸ τμῆμα $CE = a_1$ τὸ ἀπολαμβανόμενον ἂν κόψωμεν τὴν βάσιν BE διὰ τῆς περιφερείας κέντρου A καὶ ἀκτῖνος AB ($AB < AE$). Τότε ἡ ἐξίσωσις:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \text{συν}\ B,$$

προσλαμβάνει εὐκόλως τὴν μορφήν:

$$\log(b+c)+\log(b-c)=\log a+\log a_1,$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν, ἀποδίδεται εἰς τὸν Νέπερ ἡ τιμὴ ὅτι συνεχώνευσεν εἰς μίαν διατύπωσιν τὰς ὑπὸ τοῦ Viète εὑρεθείσας σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἔφθασε δὲ εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο μέσῳ ἑνὸς σχήματος, τὸ ὁποῖον διήγειρε τόσον θαυμασμὸν εἰς τὸν Gauss, ὥστε ὁ τελευταῖος νὰ τὸ χαρακτηρίσῃ ὡς «θαυμάσιον πεντάγραμμα» (pentagramma mirificum).

Πρὸς ἐπίλυσιν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μὲ δεδομένας πλευράς, ὁ Νέπερ ἔγραψε τοὺς κλασσικοὺς πλέον σήμερον τύπους:

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu\frac{a-b+c}{2}\cdot\eta\mu\frac{a+b-c}{2}}{\eta\mu\, b\cdot\eta\mu\, c}}$$

$$\eta\mu\frac{B}{2}=\ldots,\quad \eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\ldots.$$

ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$2\log\eta\mu\frac{A}{2}=\log\eta\mu\frac{a-b+c}{2}+\log\eta\mu\frac{a+b-c}{2}-$$

$$-(\log\eta\mu\, b+\log\eta\mu\, c),\ \text{κλπ.}$$

Εἰς τὸν Νέπερ ὀφείλονται ἐπίσης αἱ σπουδαῖαι ἀναλογίαι αἱ φέρουσαι δικαίως τὸ ὄνομά του:

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{b+c}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{a}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-C}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B+C}{2}},\quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{b-c}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{a}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{B-C}{2}}{\eta\mu\frac{B+C}{2}}\ \text{κλπ.}$$

Οἱ ἀνάλογοι τύποι, οἱ προκύπτοντες διὰ πολώσεως τῶν προηγουμένων, εὑρέθησαν ὑπὸ τοῦ Briggs.

Διὰ τῆς ἀποκαταστάσεως τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, ὁ Νέπερ ἔκαμεν ἕνα νέον βῆμα ἐπὶ τῆς ὁδοῦ, τὴν ὁποίαν διέτρεξε κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ζωῆς του, ὑπὸ τὴν ὤθησιν τῆς ἐπιθυμίας νὰ καταστήσῃ εὐκολωτέρους καὶ ἀσφαλεστέρους τοὺς ὑπολογισμούς, οἱ ὁποῖοι μὲ τὴν πρόοδον τῆς ἀστρονομίας, ἀπέκτων ὁλοὲν μεγαλυτέραν εὐρύτητα καὶ σπουδαιότητα.

J. Bürgi

296. Μερικοὶ ἱστορικοὶ ἐνόμισαν ὅτι εὑρίσκοντο ἐν δικαίῳ ἀμφισβητοῦντες εἰς τὸν Νέπερ τὴν δόξαν τῆς ἐφευρέσεως τῶν λογαρίθμων, τὴν ὁποίαν ἀπέδιδον μᾶλλον εἰς τὸν ἑλβετὸν μαθηματικὸν Jobst Bürgi (1552-1632 ἢ 33)*. Ὁ τελευταῖος ἐδημοσίευσε πράγματι τὸ 1620 πίνακας ἀναλόγων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπελογίσθησαν κατὰ τὰ ἔτη 1603-1611, δηλαδὴ πρὸ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ νεπερείου ἔργου Descriptio κλπ.

Ἡ δικαιοσύνη ὅμως ἐπιβάλλει νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ ἔργον ἐκεῖνο τοῦ Νέπερ περιέχει τὸ ἀποτέλεσμα ἐρευνῶν καὶ ἐργασιῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχαὶ ἀνάγονται εἴκοσι ἔτη προηγουμένως. Τὰ πάντα λοιπὸν καθιστοῦν πιστευτόν, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον μιᾶς ἐκ τῶν τυχαίων ἐκείνων συμπτώσεων, αἱ ὁποῖαι δίδουν θεμέλιον εἰς τὴν γνώμην, ὅτι αἱ ἀνακαλύψεις ἐμφανίζονται, ὅταν οἱ καιροὶ εἶναι πλέον ὥριμοι. Καὶ παρατηρεῖται ὅτι εἰς τὴν ἔρευναν τῶν μέσων τῶν ἀποσκοπούντων εἰς συντόμευσιν καὶ ἁπλοποίησιν τῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν θὰ ἔπρεπε φυσικῶς νὰ αἰσθάνωνται ζωηρὰν τὴν παρόρμησιν, ἀφοῦ οἱ κατασκευασταὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ὑπεβλήθησαν εἰς τεραστίους ἀληθῶς κόπους χάριν τοῦ σκοποῦ τούτου.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας ἐξάρσεως εἶναι ὅτι ὁ Bürgi, ὅπως καὶ ὁ Napier, ἐνεπνεύσθησαν ἀπὸ τὸ παράδειγμα ποὺ ἔδωσεν ὁ Stiefel, ἐξετάζοντες συγχρόνως τὴν ἀκολουθίαν τῶν ὅρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ ἄλλης γεωμετρικῆς. Ἀλλ' αἱ πρόοδοι ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ὁ Bürgi διαφέρουν ἀπὸ ἐκείνας, ποὺ ἔλαβεν ὡς βάσιν ὁ σκῶτος μαθηματικός. Ἀποτελεῖ καὶ τοῦτο ἕνα ἀκόμη ἐπιχείρημα ὑπὲρ τῆς πλήρους ἀνεξαρτησίας τῶν δύο μαθηματικῶν ἀπ' ἀλλήλων.

P. A. Cataldi

297. Ἐνῷ ὁ Napier ἐπλούτιζε τὴν ἀριθμητικὴν μὲ ἕνα ἰσχυρότατον βοηθητικὸν σύστημα λογισμοῦ, ἕνας καθηγητὴς τοῦ περιφήμου πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας, ἄξιος διάδοχος τοῦ Scipione dal Ferro, λαμβάνων ἴσως ἀφορμὴν ἀπὸ ἕνα χωρίον τῆς Ἀ λ γ έ β ρ α ς τοῦ Bombelli, ὑπεδείκνυε μιὰν ἄλλην μορφὴν λογισμοῦ, ἡ ὁποία ἐπέπρωτο νὰ λάβῃ θέσιν πλησίον τῶν ἀθροισμάτων μὲ ἀπείρους τὸ πλῆθος προσθετέους καὶ τῶν γινομένων μὲ ἀπείρους τὸ πλῆθος παράγοντας εἰς τὴν ὁμάδα τῶν ἀλγορίθμων ἐκείνων, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ προσεγγιστικὴ ἐκτίμησις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

---

* Τοῦ μαθηματικοῦ τούτου, τὸν ὁποῖον ἐζημίωσεν ἡ ἄγνοια τῆς λατινικῆς, ἐμνημονεύσαμεν ἤδη τὰς συμβολὰς εἰς τὴν προσθαφαίρεσιν καὶ εἰς τὸ πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων (§ 273).

J. Bürgi

296. Μερικοὶ ἱστορικοὶ ἐνόμισαν ὅτι εὑρίσκοντο ἐν δικαίῳ ἀμφισβητοῦντες εἰς τὸν Νέπερ τὴν δόξαν τῆς ἐφευρέσεως τῶν λογαρίθμων, τὴν ὁποίαν ἀπέδιδον μᾶλλον εἰς τὸν ἑλβετὸν μαθηματικὸν Jobst Bürgi (1552-1632 ἢ 33)*. Ὁ τελευταῖος ἐδημοσίευσε πράγματι τὸ 1620 πίνακας ἀναλόγων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπελογίσθησαν κατὰ τὰ ἔτη 1603-1611, δηλαδὴ πρὸ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ νεπερείου ἔργου Descriptio κλπ.

Ἡ δικαιοσύνη ὅμως ἐπιβάλλει νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ ἔργον ἐκεῖνο τοῦ Νέπερ περιέχει τὸ ἀποτέλεσμα ἐρευνῶν καὶ ἐργασιῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχαὶ ἀνάγονται εἴκοσι ἔτη προηγουμένως. Τὰ πάντα λοιπὸν καθιστοῦν πιστευτόν, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον μιᾶς ἐκ τῶν τυχαίων ἐκείνων συμπτώσεων, αἱ ὁποῖαι δίδουν θεμέλιον εἰς τὴν γνώμην, ὅτι αἱ ἀνακαλύψεις ἐμφανίζονται, ὅταν οἱ καιροὶ εἶναι πλέον ὥριμοι. Καὶ παρατηρεῖται ὅτι εἰς τὴν ἔρευναν τῶν μέσων τῶν ἀποσκοπούντων εἰς συντόμευσιν καὶ ἁπλοποίησιν τῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν θὰ ἔπρεπε φυσικῶς νὰ αἰσθάνωνται ζωηρὰν τὴν παρόρμησιν, ἀφοῦ οἱ κατασκευασταὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ὑπεβλήθησαν εἰς τεραστίους ἀληθῶς κόπους χάριν τοῦ σκοποῦ τούτου.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας ἐξάρσεως εἶναι ὅτι ὁ Bürgi, ὅπως καὶ ὁ Napier, ἐνεπνεύσθησαν ἀπὸ τὸ παράδειγμα ποὺ ἔδωσεν ὁ Stiefel, ἐξετάζοντες συγχρόνως τὴν ἀκολουθίαν τῶν ὅρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ ἄλλης γεωμετρικῆς. Ἀλλ' αἱ πρόοδοι ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ὁ Bürgi διαφέρουν ἀπὸ ἐκείνας, ποὺ ἔλαβεν ὡς βάσιν ὁ σκῶτος μαθηματικός. Ἀποτελεῖ καὶ τοῦτο ἕνα ἀκόμη ἐπιχείρημα ὑπὲρ τῆς πλήρους ἀνεξαρτησίας τῶν δύο μαθηματικῶν ἀπ' ἀλλήλων.

P. A. Cataldi

297. Ἐνῷ ὁ Napier ἐπλούτιζε τὴν ἀριθμητικὴν μὲ ἕνα ἰσχυρότατον βοηθητικὸν σύστημα λογισμοῦ, ἕνας καθηγητὴς τοῦ περιφήμου πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας, ἄξιος διάδοχος τοῦ Scipione dal Ferro, λαμβάνων ἴσως ἀφορμὴν ἀπὸ ἕνα χωρίον τῆς Ἀ λ γ έ β ρ α ς τοῦ Bombelli, ὑπεδείκνυε μιὰν ἄλλην μορφὴν λογισμοῦ, ἡ ὁποία ἐπέπρωτο νὰ λάβῃ θέσιν πλησίον τῶν ἀθροισμάτων μὲ ἀπείρους τὸ πλῆθος προσθετέους καὶ τῶν γινομένων μὲ ἀπείρους τὸ πλῆθος παράγοντας εἰς τὴν ὁμάδα τῶν ἀλγορίθμων ἐκείνων, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ προσεγγιστικὴ ἐκτίμησις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

---

* Τοῦ μαθηματικοῦ τούτου, τὸν ὁποῖον ἐζημίωσεν ἡ ἄγνοια τῆς λατινικῆς, ἐμνημονεύσαμεν ἤδη τὰς συμβολὰς εἰς τὴν προσθαφαίρεσιν καὶ εἰς τὸ πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ τῶν τόξων (§ 273).

Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Pietro Antonio Cataldi, γεννηθέντα εἰς Βολωνίαν τὴν 25 Ἀπριλίου 1552, διατελέσαντα κατὰ πρῶτον καθηγητὴν εἰς Φλωρεντίαν, κατόπιν εἰς Perugia καὶ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς πατρίδος του ἀπὸ τοῦ 1583 μέχρι 11 Φεβρουαρίου 1626, ὅτε καὶ ἀπέθανε. Μεταξὺ τῶν 30 δημοσιευμάτων, χάρις εἰς τὰ ὁποῖα ἠδυνήθη νὰ διατηρήσῃ τὴν ἕδραν ἡ ὁποία τοῦ ἐδόθη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς πατρίδος του*, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ρίπτει περισσότερον φῶς εἰς τὴν δύναμιν καὶ πρωτοτυπίαν τῆς σκέψεώς του εἶναι τὸ μικρὸν ἔργον ποὺ φέρει τὸν τίτλον Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri, ἤτοι «Πραγματεία περὶ τοῦ συντομωτάτου τρόπου εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀριθμῶν», διότι εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ διὰ πρώτην φορὰν γίνεται χρῆσις τῶν συνεχῶν κλασμάτων, καὶ μάλιστα ὑπὸ μίαν μορφὴν γενικωτέραν τῆς συνήθους, ἀφοῦ οἱ ἀριθμηταὶ δὲν εἶναι σταθερῶς ἴσοι πρὸς τὴν μονάδα.

Μολονότι ὁ Cataldi, ἀκολουθῶν τὰς συνηθείας τῆς ἐποχῆς του, δὲν ἐκθέτει μὲ γενικοὺς ὅρους τὴν πορείαν τοῦ λογισμοῦ τῆς ἐμπνεύσεώς του πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ N μέσῳ συνεχοῦς κλάσματος, εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ τύπος τῆς ἀκολουθουμένης διαδικασίας εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἐν πρώτοις ὁ ἀριθμὸς τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$N = a^2 + b,$$

ὅπου a^2 εἶναι τὸ μέγιστον τετράγωνον ποὺ περιέχεται εἰς τὸν N. Ἐκκινῶν κατόπιν ἀπὸ τὴν προσεγγιστικὴν τιμήν :

$$M = a - \frac{b}{2a},$$

ἐφαρμόζει ἕνα μετασχηματισμὸν ἀνάλογον εἰς τὴν διαφορὰν $N - M^2$ καὶ τοιουτοτρόπως προχωρεῖ φθάνων εἰς ἕνα ἀποτέλεσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἑξῆς :

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}.$$

Π.χ. εὑρίσκει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον :

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}},$$

$$\sqrt{32} = 5 + \cfrac{7}{10 + \cfrac{7}{10 + \ldots}}.$$

* Πλήρης κατάλογος τῶν ἐργασιῶν του εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔργον Biblioteca matematica italiana τοῦ Riccardi.

Ὑπολογίζων εἰς ἑκάστην περίπτωσιν μέγαν ἀριθμὸν διαδοχικῶν ἀνηγμένων φθάνει εἰς ἀποτελέσματα, τῶν ὁποίων τὸ περίπλοκον ἐξασθενίζει τὴν πρακτικότητα, ὅπως π.χ. ἀρκεῖ νὰ τὸ δείξῃ ἡ ἀκόλουθος ἐκτίμησις τῆς $\sqrt{78}$:

$$\sqrt{78} = 8\,\frac{30737638259358854906836 81}{3695489834122985502126240}.$$

Ἡ περιπλοκωτάτη αὐτὴ ἔκφρασις δίδει λαβὴν νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι ὁ Cataldi δὲν ἐπρόσεξεν ὅτι τὰ συνεχῆ κλάσματα ἀποτελοῦν ἐξαίρετον μέσον προσφόρου ἐκφράσεως τῶν λόγων μεταξὺ πολυψηφίων ἀριθμῶν. Τοιαύτη παρατήρησις ἔγινεν ὀλίγον ἔπειτα (1625) εἰς μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν καὶ χωρὶς ἀξιώσεις πρωτοτυπίας ἀπὸ ἕνα καθηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Altdorf, τὸν Daniel Schwenter (γεννηθέντα ἐκεῖ τὴν 31 Ἰανουαρίου 1585 καὶ ἀποθανόντα τὴν 19 Ἰανουαρίου 1636), ὁ ὁποῖος φυσικὰ χωρὶς νὰ τὸ περιμένῃ, ἔλαβε τὸν τίτλον τοῦ «δευτέρου ἐφευρέτου» τῶν συνεχῶν κλασμάτων.

Ἂς ἐπιστρέψωμεν εἰς τὸν Cataldi διὰ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι δὲν ἦτο εἰς αὐτὸν ἄγνωστος ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν διαδοχικῶν ἀνηγμένων, οὔτε τοῦ διέφυγε, τοὐλάχιστον εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, τὸ σημαντικὸν γεγονός, ὅτι ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀνηγμένων ἡ μία ὑπερβαίνει, ἡ δὲ ἄλλη ὑπολείπεται τοῦ προσδιοριστέου ἀριθμοῦ. Διὰ τὰς ἄλλας παρατηρήσεις τοῦ Cataldi, δὲν δυνάμεθα παρὰ νὰ παραπέμψωμεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ πρωτότυπον ἔργον.

298. Μερικὰ ἀπὸ τὰ λοιπὰ δημοσιεύματα τοῦ Cataldi ἔχουν ἀποκλειστικῶς διδακτικὸν σκοπὸν (ὅπως εἶναι μία ἰδική του ἔκδοσις τοῦ Εὐκλείδου), καὶ συνεπῶς δὲν ἀπαιτοῦν εἰδικὴν ἐξέτασιν, ἄλλα ὅμως ἀξίζουν ἐκ μέρους μας προσοχῆς, ἔστω καὶ φευγαλέας. Εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐργασίας αὐτὰς φαίνεται ἐναβρυνόμενος μὲ τὴν γλυκεῖαν αὐταπάτην, ὅτι κατέστησεν ἄψογον τὴν θεωρίαν τῶν παραλλήλων, ὁρίζων αὐτὰς ὡς εὐθείας ἰσαπεχούσας. Τὴν ἐργασίαν του ἔγραψεν εἰς λατινικὴν καὶ ἰταλικὴν γλῶσσαν καὶ διένειμε δωρεὰν 400 ἀντίτυπα εἰς ὅσους ἐπεδείκνυον ἐνδιαφέρον*.

* Ἡ προαναφερθεῖσα ἀπόπειρα ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἀπαντᾶται ἤδη προηγουμένως εἰς τὸν Clavio (§ 283). Μολονότι τὸ ὄνομά του, δὲν ἀναφέρεται εἰς τὴν μεταγενεστέραν ἐργασίαν, φαίνεται ἀπίθανον ὅτι ὁ Cataldi ἠγνόει τὴν προηγηθεῖσαν πρότασιν τοῦ Clavio, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς εὐρείας δημοσιότητος τοῦ ὀνόματος τοῦ τελευταίου εἰς τοὺς ἐπιστημονικοὺς κύκλους. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ἔργον Della nuova geometria τοῦ Francesco Patrici (γενν. 1529 εἰς Clisso τῆς Istria καὶ ἀποθ. τὸ 1597 εἰς Ρώμην). Ὁ συγγραφεύς, καθ' ἣν ἐποχὴν ἐδίδασκεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Ferrara, ἐνόμισεν ὅτι ἀνεκάλυψε τὴν «βασιλικὴν ἀτραπὸν» τὴν ὁποίαν ὁ Πτολεμαῖος ἐζήτει ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην, διὰ νὰ φθάσῃ ταχύτερον εἰς τὴν γνῶσιν τῶν μαθηματικῶν. Πλήρης λοιπὸν χαρᾶς καὶ ὑπερηφανείας ἐσκέφθη νὰ τὴν παρου-

Εἰς μίαν ἄλλην ἐργασίαν του ὁ Cataldi ὑποβάλλει εἰς νέαν ἐξέτασιν, ἀπὸ ἀπόψεως βαθμοῦ ἀκριβείας, τὴν κατασκευὴν τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Dürer (§ 262). Εἰς μίαν ἄλλην ἐπιχειρεῖ νὰ διευκολύνῃ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ εὐκλειδείου κανόνος (Τόμος I, § 37) πρὸς εὕρεσιν τελείων ἀριθμῶν, ὅστις μεταφράζεται εἰς τὸν τύπον:

$$N = (2^{\nu} - 1)\, 2^{\nu-1},$$

καὶ ὁ ὁποῖος παρουσίαζεν, ὅπως καὶ σήμερον, δυσκολίας, ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἀπαιτεῖ νὰ γνωρίζωμεν κατὰ πόσον ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu} - 1$ εἶναι ἢ δὲν εἶναι πρῶτος. Ὁ Cataldi διατυπώνει τὴν παρατήρησιν, ἁπλῆν ἀλλὰ χρησιμωτάτην, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὁ N τέλειος ἀριθμὸς πρέπει (ἀλλὰ δὲν ἀρκεῖ) νὰ εἶναι ὁ ν πρῶτος ἀριθμός. Ἡ ἐν λόγῳ παρατήρησις τοῦ ἐπέτρεψε ν' ἀναγνωρίσῃ ἀμέσως ὅτι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ ἔδωσεν ὁ Pacioli ὡς τέλειον (Τόμος I, § 199) δὲν εἶναι πράγματι τέλειος.

Στηριζόμενος ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ὁ Cataldi προσδιώρισεν ἐπακριβῶς τοὺς πρώτους 7 τελείους ἀριθμοὺς καὶ πρὸς διευκόλυνσιν τῶν παρομοίων ὑπολογισμῶν εἰς τὸ μέλλον κατέστρωσεν ἕνα πίνακα τῶν διαιρετῶν ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ 1 καὶ 750, προσθέτων εἰς αὐτὸν ὡς πόρισμα τὸν πίνακα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν ἀπαντωμένων εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα. Σημειοῦται ἀκόμη ὅτι εἰς μίαν προσθήκην, ὁ ἐκ Βολωνίας μαθηματικὸς ἐξήτασεν ἕνα ἔργον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος (Liber de numeris perfectis), δημοσιευθὲν εἰς Παρισίους τὸ 1510 ὑπὸ τοῦ Carlo de Bouvelles (1470-1533), τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἤδη μνεία (§ 224, § 238) εἰς τὴν ἱστορίαν μας, ἀποκαλύπτων τὰ σφάλματα ποὺ περιείχοντο εἰς αὐτὸ καὶ συμπληρώνων μὲ πειστικὰς ἀποδείξεις μερικὰς προτάσεις ἐκφερομένας ὑπὸ τοῦ συγγραφέως. Συγκεκριμένως ὁ Cataldi ἀπέδειξεν ὅτι δὲν ἀληθεύουν οἱ ἰσχυρισμοί:

1) ὅτι $2^{\nu} - 1$ εἶναι πρῶτος, ἐὰν λήγῃ εἰς 1 ἢ 7·
2) ὅτι ἂν ὁ ἀριθμὸς 2^{ν} λήγῃ εἰς 4 ἢ 6, ὁ εὐκλείδειος τύπος παρέχει ἀριθμὸν τέλειον·
3) ὅτι οἱ τέλειοι ἀριθμοὶ λήγουν ἐναλλὰξ εἰς 6 καὶ 8·
4) ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $6\nu \pm 1$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

Ἀπέδειξεν ὅμως, εἰς ἀντιστάθμισμα, ὅτι ὁ de Bouvelles εἶχε δίκαιον βεβαιώνων ὅτι, ἐὰν N ἀριθμὸς πρῶτος, ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν $N \pm 1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς τελείου ἀριθμοῦ διαιρούμενον διὰ 9 δίδει ὑπόλοιπον 1. Δυνάμεθα, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος μικρὸν ἔργον τοῦ Cataldi ἀποτελεῖ

σιάσῃ εἰς τὸ ἀνωτέρω ἔργον του. Ματαίως ὅμως θὰ ζητήσῃ νὰ εὕρῃ ὁ ἀναγνώστης εἰς αὐτό, ἐν μέσῳ σωρείας μεταφυσικῶν ἀποπλανήσεων, κάποιαν ἰδέαν μὲ ἀληθῆ ἀξίαν καὶ ἀδιαφιλονίκητον πρωτοτυπίαν.

τὴν πρώτην οὐσιαστικὴν προσθήκην, ἡ ὁποία ἔγινεν εἰς τὴν εὐκλείδειον θεωρίαν τῶν τελείων ἀριθμῶν.

Ὁ Cataldi, ἐκτὸς τῆς ἱκανότητός του νὰ θέτῃ νέα προβλήματα, ὑπῆρξε μελετηρότατος καὶ διὰ τοῦτο ἐνημερώτατος εἰς τὰ θέματα τὰ δημοσιευόμενα εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν. Τοῦτο τοῦ ἐπέτρεψε (ὅπως εἴδομεν ἤδη) ν' ἀποκαλύψῃ καὶ νὰ διορθώσῃ σφάλματα περιεχόμενα εἰς διαφόρους δημοσιευθείσας ἐργασίας τῆς ἐποχῆς. Τοιουτοτρόπως, τὴν παραμονὴν τοῦ θανάτου του, ὑπερήσπισε τὸν Εὐκλείδην ἐναντίον τοῦ Ἱσπανοῦ Molina Cano, ὁ ὁποῖος εἰς ἔργον του ὑπὸ τὸν ὑπέροχον τίτλον Descubrimintos geometricos (Amberes, 1598, μεταφρασθὲν εἰς λατινικὴν τὸ 1620) εἶχε, μεταξὺ ἄλλων, ἀπορρίψει τὴν πρότασιν ὅτι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Προηγουμένως εἶχεν ὑπερασπισθῆ τὸν Ἀρχιμήδη ἐναντίον τοῦ Ἰωσὴφ Σκαλίγερου, ὁ ὁποῖος ἰσχυρίζετο, ὅπως γνωρίζομεν (§ 279), ὅτι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι $\pi = \sqrt{10}$. Ὁ Cataldi ἐπανέλαβε τὸν ὑπολογισμὸν τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον, φθάνων τοιουτοτρόπως εἰς ἐπιβεβαίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος, εἰς τὸ ὁποῖον εἶχε φθάσει ὁ μέγας Συρακούσιος.

Ἐν κατακλεῖδι παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Cataldi, ἀντὶ παρενθέσεων, ἐχρησιμοποίει τὰ δύο L, ἕνα ὀρθὸν καὶ τὸ ἄλλο ἀνεστραμμένον, τουτέστι τὸ σύστημα ποὺ συνηντήσαμεν εἰς τὸν Bombelli (§ 277). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι αἱ βελτιώσεις τὰς ὁποίας ἡ ἐπιστήμη μας ὀφείλει εἰς τὸν Cataldi ἀφοροῦν περισσότερον τὴν οὐσίαν παρὰ τὴν μορφήν. Τίποτε πράγματι δὲν προσέφερε πρὸς ἐπιτάχυνσιν τῆς μεταμορφώσεως ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὑφίστατο βραδέως ἀλλὰ συνεχῶς ἡ συμβολικὴ ἄλγεβρα τῆς ἐποχῆς του.

Galileo Galilei

299. Εἰς τὴν πενιχρότητα τῶν βιογραφικῶν λεπτομερειῶν, ποὺ χαρακτηρίζει τὸν ἐφευρέτην τῶν λογαρίθμων, ἐκπληκτικῶς ἀντιτίθεται ὁ πλοῦτος τῶν γνωστῶν λεπτομερειῶν τῆς ζωῆς τοῦ θεμελιωτοῦ τῆς πειραματικῆς μεθόδου εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας. Αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ φανῇ παράδοξον, διότι ὁ Νέπερ ἔζησεν εἰς μίαν χώραν, ἡ ὁποία δὲν ἐθεωρεῖτο τότε ὡς ἀξιόλογον πνευματικὸν κέντρον καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν εὑρίσκετο εἰς ἄμεσον ἐπικοινωνίαν μὲ τοὺς ἐπιστήμονας τῆς Εὐρώπης, ἐνῷ ὁ διάσημος ἰταλός, διδάσκων εἰς Πανεπιστήμια διεθνοῦς φήμης καὶ φιλοξενούμενος ἀπὸ ἡγεμόνας, ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν ὅλων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐπεδίδοντο εἰς τὰς ἐπιστήμας καὶ τὰς ἐφαρμογάς των. Ἂς προστεθῇ δὲ ἀκόμη, ὅτι αἱ ἀνακαλύψεις ποὺ ἔχουν τὴν ἕδραν των εἰς τὸν οὐρανὸν ἐντυπωσιάζουν τὰς μάζας

τὴν πρώτην οὐσιαστικὴν προσθήκην, ἡ ὁποία ἔγινεν εἰς τὴν εὐκλείδειον θεωρίαν τῶν τελείων ἀριθμῶν.

Ὁ Cataldi, ἐκτὸς τῆς ἱκανότητός του νὰ θέτῃ νέα προβλήματα, ὑπῆρξε μελετηρότατος καὶ διὰ τοῦτο ἐνημερώτατος εἰς τὰ θέματα τὰ δημοσιευόμενα εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν. Τοῦτο τοῦ ἐπέτρεψε (ὅπως εἴδομεν ἤδη) ν' ἀποκαλύψῃ καὶ νὰ διορθώσῃ σφάλματα περιεχόμενα εἰς διαφόρους δημοσιευθείσας ἐργασίας τῆς ἐποχῆς. Τοιουτοτρόπως, τὴν παραμονὴν τοῦ θανάτου του, ὑπερήσπισε τὸν Εὐκλείδην ἐναντίον τοῦ Ἱσπανοῦ Molina Cano, ὁ ὁποῖος εἰς ἔργον του ὑπὸ τὸν ὑπέροχον τίτλον Descubrimintos geometricos (Amberes, 1598, μεταφρασθὲν εἰς λατινικὴν τὸ 1620) εἶχε, μεταξὺ ἄλλων, ἀπορρίψει τὴν πρότασιν ὅτι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Προηγουμένως εἶχεν ὑπερασπισθῆ τὸν Ἀρχιμήδη ἐναντίον τοῦ Ἰωσὴφ Σκαλίγερου, ὁ ὁποῖος ἰσχυρίζετο, ὅπως γνωρίζομεν (§ 279), ὅτι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι $\pi = \sqrt{10}$. Ὁ Cataldi ἐπανέλαβε τὸν ὑπολογισμὸν τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον, φθάνων τοιουτοτρόπως εἰς ἐπιβεβαίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος, εἰς τὸ ὁποῖον εἶχε φθάσει ὁ μέγας Συρακούσιος.

Ἐν κατακλεῖδι παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Cataldi, ἀντὶ παρενθέσεων, ἐχρησιμοποίει τὰ δύο L, ἕνα ὀρθὸν καὶ τὸ ἄλλο ἀνεστραμμένον, τουτέστι τὸ σύστημα ποὺ συνηντήσαμεν εἰς τὸν Bombelli (§ 277). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι αἱ βελτιώσεις τὰς ὁποίας ἡ ἐπιστήμη μας ὀφείλει εἰς τὸν Cataldi ἀφοροῦν περισσότερον τὴν οὐσίαν παρὰ τὴν μορφήν. Τίποτε πράγματι δὲν προσέφερε πρὸς ἐπιτάχυνσιν τῆς μεταμορφώσεως ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὑφίστατο βραδέως ἀλλὰ συνεχῶς ἡ συμβολικὴ ἄλγεβρα τῆς ἐποχῆς του.

Galileo Galilei

299. Εἰς τὴν πενιχρότητα τῶν βιογραφικῶν λεπτομερειῶν, ποὺ χαρακτηρίζει τὸν ἐφευρέτην τῶν λογαρίθμων, ἐκπληκτικῶς ἀντιτίθεται ὁ πλοῦτος τῶν γνωστῶν λεπτομερειῶν τῆς ζωῆς τοῦ θεμελιωτοῦ τῆς πειραματικῆς μεθόδου εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας. Αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ φανῆ παράδοξον, διότι ὁ Νέπερ ἔζησεν εἰς μίαν χώραν, ἡ ὁποία δὲν ἐθεωρεῖτο τότε ὡς ἀξιόλογον πνευματικὸν κέντρον καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν εὑρίσκετο εἰς ἄμεσον ἐπικοινωνίαν μὲ τοὺς ἐπιστήμονας τῆς Εὐρώπης, ἐνῷ ὁ διάσημος ἰταλός, διδάσκων εἰς Πανεπιστήμια διεθνοῦς φήμης καὶ φιλοξενούμενος ἀπὸ ἡγεμόνας, ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν ὅλων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐπεδίδοντο εἰς τὰς ἐπιστήμας καὶ τὰς ἐφαρμογάς των. Ἂς προστεθῇ δὲ ἀκόμη, ὅτι αἱ ἀνακαλύψεις ποὺ ἔχουν τὴν ἕδραν των εἰς τὸν οὐρανὸν ἐντυπωσιάζουν τὰς μάζας

πολὺ περισσότερον ἀπὸ τὰ λογιστικὰ τεχνάσματα καὶ ὅτι αἱ τελειοποιήσεις, τὰς ὁποίας ἐπέφερεν ὁ Γαλιλαῖος εἰς τὴν μητρικήν του γλῶσσαν, μὲ τὴν δημιουργίαν ἐπιστημονικοῦ κειμένου, λογοτεχνικῆς ἀρτιότητος, τοῦ ἐξησφάλισαν μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἰταλικῆς λογοτεχνίας*. Ἂς σημειωθῇ τέλος, ὅτι αἱ φιλονικίαι του μὲ ἰδιώτας καὶ πρὸ πάντων ὁ πόλεμος εἰς τὸν ὁποῖον ἐνεπλάκη μὲ τὴν Ἐκκλησίαν, ἔγιναν ἀφορμὴ ὥστε νὰ τοῦ ἀναγνωρισθῇ ἐξέχουσα θέσις εἰς τὸ Πάνθεον τῶν μαρτύρων ὑπὲρ τῆς ἐλευθερίας τῆς σκέψεως. Δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους εὔλογος ἦτο ἡ περιέργεια τοῦ κοινοῦ νὰ γνωρίσῃ τὴν ζωὴν τοῦ σοφοῦ εἰς τὰς μικροτέρας λεπτομερείας της. Θὰ περιορισθῶμεν ἐδῶ μόνον εἰς μερικὰς χαρακτηριστικὰς χρονολογίας.

Ἐγεννήθη τὴν 15ην Φεβρουαρίου 1564 ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν, ἐκπεσοῦσαν ὅμως εἰς ταπεινὴν κατάστασιν. Ὁ πατέρας του (ὁ ὁποῖος τοῦ ἐδίδαξε τὴν ῥοπὴν ἐναντίον τῆς ἀρχῆς τῆς αὐθεντίας) τὸν προώριζε διὰ τὸ ἰατρικὸν στάδιον, διὸ καὶ τὸν ἔστειλε τὸ 1583 νὰ σπουδάσῃ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Πίζης. Μέχρι τῆς ἡλικίας τῶν εἴκοσι ἐτῶν παρέμεινε τελείως ἄμοιρος μαθηματικῆς μορφώσεως, μόλις ὅμως ἔλαβε γνῶσιν τῶν Στοιχείων, ἀπεφάσισε νὰ ἐγκαταλείψῃ τὸν Ἱπποκράτην καὶ τὸν Γαληνόν, πρὸς χάριν τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀπὸ τὸν τελευταῖον μάλιστα ἀκριβῶς — ἀκολουθῶν τὴν συμβουλὴν τοῦ G. del Monte — ἤντλησε τὰς ἐμπνεύσεις του εἰς τὰς βαρυκεντρικάς του ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι ἐπισημαίνουν τὴν εἴσοδόν του εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν στάδιον. Σκοπὸς τῶν ἐρευνῶν ἐκείνων ἦτο νὰ τελειοποιήσῃ τὰς προσθήκας ποὺ εἶχε κάμει ὁ Κομμαντῖνος (§ 259) εἰς τὰς στερεομετρικὰς μελέτας τοῦ Ἀρχιμήδους. Φαίνεται ὅτι ἡ ἀνάγκη τοιούτων βελτιώσεων ἦτο διάχυτος εἰς εὐρύτερον κύκλον, ἀφοῦ συγχρόνως μὲ τὸν Γαλιλαῖον ἐσκέφθη νὰ ἐπιτύχῃ τὸν αὐτὸν σκοπὸν ἕνας διακεκριμένος καθηγητὴς εἰς τὸν Πανεπιστήμιον τῆς Sapienza, ὁ Luca Valerio (γεννηθεὶς εἰς Νεάπολιν τὸ 1552, ἀποθανὼν εἰς Ρώμην τὴν 17ην Ἰανουαρίου 1618), ὁ ὁποῖος ἀφιέρωσεν ἐπὶ τοῦ θέματος δύο ἐξαίρετα ἔργα De centro gravitatis solidorum Libri tres (Roma, 1604)** καὶ Quadratura parabolae per simplex falsum (Roma, 1606). Ὅταν ἔλαβε γνῶσιν τῶν ἔργων τούτων τοῦ «νέου Ἀρχιμήδους», ὅπως ἀπεκάλεσεν ὁ Γαλιλαῖος τὸν Valerio, ὁ νεαρὸς γεωμέτρης ἀπεφάσισε ν' ἀφίσῃ ἀνέκδοτον τὸ ἰδικόν του. Καὶ μόνον περὶ τὰς δυσμὰς τοῦ βίου του ἐσκέφθη νὰ τὸ δημοσιεύσῃ ὡς παράρτημα εἰς τὸ διάσημον ἔργον του Dialoghi sopra due nuove scienze. (Διάλογοι περὶ δύο νέων ἐπιστημῶν).

* Ἡ ὄψις αὐτὴ τῆς δραστηριότητος τοῦ Γαλιλαίου, ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα βεβαίως νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐδῶ, ἔχει μελετηθῆ εἰς ἔκτασιν εἰς μίαν ἐργασίαν τοῦ L. Olschki: Galileo und seine Zeit (Halle, 1927).

** Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ οἱ ὅροι abscissae καὶ ordinatae applicatae χρησιμοποιοῦνται διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ascissa (τετμημένη) καὶ ordinata (τεταγμένη).

300. Ἐπανερχόμεθα, ἔπειτα ἀπὸ αὐτὴν τὴν παρέκβασιν, εἰς τὴν ἀφήγησιν τῶν περιστατικῶν τῆς ζωῆς τοῦ Γαλιλαίου. Ἀφοῦ ἀπέτυχεν εἰς τὰς προσπαθείας του νὰ καταλάβῃ μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς Padova, κατέληξε νὰ δεχθῇ μίαν μετρίαν θέσιν καθηγητοῦ εἰς Πίζαν, ἡ ὁποία τοῦ παρεχωρήθη κατόπιν εἰσηγήσεως τοῦ μαρκησίου del Monte. Προτοῦ ὅμως ἐκπνεύσῃ ἡ καθορισθεῖσα τριετία, τοῦ ἐξεχωρήθη ἡ ποθουμένη καθηγεσία (26 Σεπτεμβρίου 1592) εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova μὲ μισθὸν μέτριον κατ' ἀρχάς, βαθμηδὸν ὅμως αὐξανόμενον κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 18 ἐτῶν, ποὺ ὑπηρέτησεν εἰς τὴν Δημοκρατίαν τῆς Βενετίας. Μολονότι ἡ ἕδρα του, δι' εἰδικῆς διατάξεως — δικαιολογουμένης ἐκ τῶν περιφήμων ἀστρονομικῶν ἀνακαλύψεων τοῦ Γαλιλαίου μέσῳ τῆς ὁμωνύμου διόπτρας — προεβλέπετο «ἰσόβιος», ἐν τούτοις ὁ Γαλιλαῖος ἐγκατέλειψε τὴν Padova (10 Ἰουλίου 1610), διὰ νὰ ἐγκατασταθῇ εἰς τὴν Φλωρεντίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ «primario matematico dello Studio di Pisa e primario matematico e filosofo del Granduca di Toscana» (Σ.τ.Μ.: Ἀρχιμαθηματικὸς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Πίζης καὶ ἀρχιμαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος τοῦ Μεγάλου Δουκὸς τῆς Τοσκάνης).

Ἐνῷ ἡ διαμονὴ τοῦ Γαλιλαίου εἰς τὴν Padova δὲν παρουσιάζει ἄλλα ἐπεισόδια ἀξιόλογα, πλὴν τῶν μεγάλων ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐπετύγχανε συνεχῶς, ταραχωδέστατοι ὑπῆρξαν οἱ χρόνοι τῆς διαμονῆς του εἰς τὴν Φλωρεντίαν, λόγῳ τῶν ἀκαταπαύστων δυσμενῶν κριτικῶν, τὰς ὁποίας ἐξαπέλυον ἐναντίον του διάφοροι ζηλοτυποῦντες κακεντρεχεῖς. Εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ διασημότερα πολεμικά του ἔργα ὑπὸ τὸν τίτλον Il saggiatore (Σ.τ.Μ. : ὁ χρυσοῦς ζυγὸς) παρατηρεῖ μελαγχολικῶς : «Δὲν ἠμπόρεσα ποτὲ νὰ καταλάβω πῶς συνέβη, ὥστε ὅλα αὐτὰ τὰ ἀποτελέσματα τῶν μελετῶν μου, τὰ ὁποῖα ἐθεώρησα σκόπιμον νὰ φέρω εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος πρὸς εὐχαρίστησιν καὶ ὠφέλειαν τῶν ἀνθρώπων, νὰ συναντήσουν εἰς πολλοὺς μίαν ἐχθρότητα ἀποβλέπουσαν εἰς δυσφήμησιν, ἀποστέρησιν καὶ ἐξευτελισμὸν τῆς ὀλίγης ἐκείνης ἀξίας, τῆς ὁποίας, κατ' ἐμέ, ἦσαν ἄξια, ἂν ὄχι καθ' ἑαυτά, τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἁγνότητα τῶν προθέσεών μου». Ἡ σιωπηρὰ συμπάθεια ἡ διαφαινομένη εἰς τὰ κείμενά του διὰ τὸ κοπερνίκειον ἀστρονομικὸν σύστημα ὑπῆρξεν ὁ στόχος, τὸν ὁποῖον ἐξέλεξαν οἱ ἐχθροί του διὰ νὰ τὸν πλήξουν. Καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς παραμονῆς του εἰς τὴν Ρώμην ὑπεχρεώθη νὰ παρουσιασθῇ εἰς τὸ Ἱερὸν Γραφεῖον (26 Φεβρουαρίου 1616), διὰ νὰ λάβῃ γνῶσιν ἑνὸς διατάγματος, ἐκδοθέντος πρὸ τριῶν ἡμερῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἐδηλοῦτο ρητῶς, ὅτι ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κόσμου καὶ ὅτι παραμένει ἀκίνητος εἶναι μωρὰ καὶ ἄτοπος ἀπὸ φιλοσοφικῆς ἀπόψεως, αἱρετικὴ δὲ ἀπὸ ἀπόψεως τυπικῆς.

Δὲν ἐσταμάτησαν ὅμως οἱ ἐχθροί του εἰς τὸ ἐπεισόδιον αὐτό, τὸ ὁποῖον συνήθως ὀνομάζεται «πρώτη δίκη τοῦ Γαλιλαίου». Ἡ εὐκαιρία νὰ ἐξαπο-

λύσουν δευτέραν ἐπίθεσιν ἐδόθη ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Γαλιλαίου Dialoghi sopra i massimi sistemi Tolemaico e Copernicano. Ἐσκέφθησαν νὰ διαβάλουν τὸν συγγραφέα πείθοντες τὸν Καρδινάλιον Barberini, ὁ ὁποῖος ἀνῆλθεν εἰς τὸν παπικὸν θρόνον ὑπὸ τὸ ὄνομα Οὐρβανὸς VIII, ὅτι ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Σιμπλικίου, ὁ Γαλιλαῖος εἶχε τὴν πρόθεσιν νὰ διακωμῳδήσῃ τὸ πρόσωπον τοῦ Πάπα. Τοιουτοτρόπως κατώρθωσαν νὰ μεταβάλουν τὸν ποντίφηκα ἀπὸ εἰλικρινῆ φίλον καὶ θαυμαστὴν εἰς ἄσπονδον ἐχθρόν. Ἐπηκολούθησεν ἡ νέα βαρυτέρα καταδίκη (21 Φεβρουαρίου 1632) καὶ ἡ φυλάκισις τοῦ Γαλιλαίου εἰς τὰ περίχωρα τῆς Φλωρεντίας, παραταθεῖσα καὶ μετὰ τὴν ἐπελθοῦσαν ἐν τῷ μεταξὺ τύφλωσιν τοῦ σοφοῦ (φθινόπωρον τοῦ 1637) καὶ τὴν συνδρομὴν ἄλλων βαρείας μορφῆς ἀσθενειῶν, μέχρι τέλους τῆς ἐνδόξου, ἀλλὰ ταραχώδους ζωῆς του (8 Ἰανουαρίου 1642). Ἀλλ' οὔτε ὁ θάνατος τοῦ κορυφαίου ἐπιστήμονος ἀφώπλισε τοὺς ἀμειλίκτους ἐχθρούς του, οἱ ὁποῖοι ἐπέβαλον εἰς τὴν Αὐλὴν τῆς Τοσκάνης νὰ ἐγκαταλείψῃ τὸ σχέδιον, τὸ ὁποῖον ἐμελέτα περὶ ἀνεγέρσεως ἀνταξίου μνημείου εἰς τὸ ἔνδοξον τέκνον τῆς Ἰταλίας.

301. Ἐὰν εἰς τὸν Πλάτωνα ἀνήκῃ μία θέσις εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἔξαρσιν τῆς σημασίας καὶ χρησιμότητος τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν (Τόμος I, § 29), τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὸν Γαλιλαῖον, ὁ ὁποῖος ἔγραψεν: «εἴμεθα ἐκ τῶν πραγμάτων ὑποχρεωμένοι νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι τὸ νὰ ζητοῦμεν νὰ περιγράψωμεν καὶ νὰ ἐξηγήσωμεν τὰ φυσικὰ φαινόμενα χωρὶς τὴν γεωμετρίαν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ ζητοῦμεν νὰ καταστήσωμεν διὰ τῆς βίας δυνατὸν κάτι τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον», διότι «ὁ μαθηματικὸς στοχασμὸς χρησιμεύει ἀκριβῶς εἰς ἀποφυγὴν τῶν σκοπέλων ἐκείνων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁ καθαρὸς φυσικὸς κινδυνεύει ἐνίοτε νὰ παρασυρθῇ καὶ νὰ συντριβῇ». Ἄλλοτε πάλιν ἐπιδοκιμάζει εἰρωνικῶς «τὴν συνήθειαν τῶν περιπατητικῶν ν' ἀποτρέπουν τοὺς μαθητάς των ἀπὸ τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας, διότι δὲν ὑπάρχει ἀσφαλέστερον μέσον ν' ἀποκαλυφθοῦν αἱ πλάναι των». Εἰς ἄλλην περίπτωσιν ἔλεγεν: «Δὲν θὰ ἥρμοζε νὰ ὁμολογήσῃ κανεὶς ὅτι ἡ ἀρετὴ τῆς γεωμετρίας συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἀποτελεῖ αὕτη τὸ ἰσχυρότερον μέσον πρὸς ἐκγύμνασιν τοῦ πνεύματος καὶ προσανατολισμὸν αὐτοῦ εἰς τοὺς θεωρητικοὺς διαστοχασμούς, διὸ καὶ ὁ Πλάτων πολὺ δικαίως ἤθελε τοὺς μαθητάς του καλῶς κατηρτισμένους εἰς τὰ μαθηματικά;»

Τόσον βαθέως ἐρριζωμένη ἦτο ἡ πεποίθησίς του ὡς πρὸς τὴν γονιμότητα τῆς ἐπιμιξίας τῶν μαθηματικῶν μὲ τὴν Φυσικήν, ὥστε ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ του (ἡ ὁποία παρέμεινεν ἀνικανοποίητος) νὰ ἴδῃ συγκεντρωμένα εἰς ἕνα σῶμα ὅλα τὰ ἔργα του, κατέλιπε τὰς ἀκολούθους φράσεις ὡς προμετωπίδα τῶν Ἀπάντων του: «Ἀπὸ ἐδῶ θὰ κατανοήσῃ κανεὶς εἰς ἀναρίθμητα

παραδείγματα ὁποία εἶναι ἡ χρησιμότης τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸν χειρισμὸν τῶν φυσικῶν νόμων, καὶ πόσον καθίσταται ἀδύνατος ἡ προσπάθεια νὰ φιλοσοφῇ κανεὶς ὀρθῶς χωρὶς τὴν συμπαράστασιν τῆς γεωμετρίας, ἀκριβῶς ὅπως εἶχε διαγνώσει τὴν ἀλήθειαν αὐτὴν ὁ Πλάτων».

Ἀλλ' ἐξ ὅσων πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν περαιτέρω θ' ἀνακύψουν καὶ ἄλλοι λόγοι δικαιολογοῦντες τὴν εἰς τὴν ἱστορίαν μας μνείαν τοῦ κορυφαίου φυσικοῦ καὶ ἀστρονόμου.

302. Πράγματι ἡ πρώτη δημοσιευθεῖσα ἐργασία του (1606) ἔχει ὡς θέμα ἕνα ζήτημα εὑρισκόμενον εἰς τὰ σύνορα τῶν καθαρῶν καὶ ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν· ἔχει ὡς τίτλον Le operazioni del compasso geometrico e militare (Σ.τ.Μ. : Αἱ πράξεις τοῦ γεωμετρικοῦ καὶ στρατιωτικοῦ διαβήτου).

Πρόκειται περὶ ἑνὸς ὀργάνου ἀποτελοῦντος τελειοποίησιν τοῦ «ἀναλογικοῦ διαβήτου», τὸν ὁποῖον εἶχεν ἐπινοήσει ὁ Guidobaldo del Monte*. Χάριν περιεργείας ἀναφέρομεν ὅτι ματαίως θ' ἀναζητήσῃ ὁ ἀναγνώστης τοῦ ἔργου τοῦ Γαλιλαίου ἕνα ἐπεξηγηματικὸν σχῆμα τοῦ ὀργάνου εἰς τὸ κείμενον**. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι εἰς τὸν ἀγοράζοντα τὸ βιβλίον ἐδίδετο συγχρόνως ἕνα ὄργανον· κατὰ συνέπειαν τὸ κείμενον εἶναι συντεταγμένον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ὁ ἀναγνώστης ἔχει εἰς χεῖρας του τὸ ὄργανον, αἱ δὲ λύσεις τῶν πρακτικῶν προβλημάτων ποὺ λύονται μὲ τὴν βοήθειαν αὐτοῦ ἐκφωνοῦνται ἁπλῶς, χωρὶς νὰ ἐγείρεται καμμία ἀμφιβολία, ὡς πρὸς τὴν ἀκρίβειαν, εἰς ἐκεῖνον ὁ ὁποῖος ἐξετέλει διὰ τοῦ ὀργάνου τὰς πράξεις συμφώνως πρὸς τὰς ὁδηγίας τοῦ ἐφευρέτου. Μία περιγραφὴ τοῦ γεωμετρικοῦ καὶ στρατιωτικοῦ διαβήτου μετ' ἀποδείξεως τῶν λύσεων ποὺ δίδει ὁ Γαλιλαῖος εὑρίσκεται εἰς μερικὰ ἐκ τῶν Σχολίων (Annotazioni) τοῦ Matthaeus Bernegger, ποὺ ἐδημοσιεύθησαν τὸ πρῶτον εἰς Βολωνίαν τὸ 1656***.

Ἂν τὸ περιεχόμενον τοῦ ἔργου τούτου παρουσιάζῃ σήμερον περιωρισμένον ἐνδιαφέρον, πολὺ διάφορος πρέπει νὰ ἦτο τότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ κρίσις τῶν συγχρόνων του, ἀφοῦ ἕνας νεαρὸς πατρίκιος ἀπὸ τὸ Μιλᾶνον, ὁ Baldassare Capra, ἀντλήσας πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν κατασκευὴν

* Ἀνάλογος ἦτο ὁ σκοπός, ἀλλὰ πολὺ διάφορος ἡ κατασκευὴ ἑνὸς ἄλλου ὀργάνου, Παντομέτρου, ὀφειλομένου εἰς τὸν Michel Coignet (§ 278), ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ σχῆμα τὸ συνοδεῦον σημείωσιν τοῦ A. Favaro: Per la storia del compasso di proporzione (Πρακτικὰ τοῦ R. Instit. Veneto, T. LXVII, 1908).

** Πολλὰ καὶ ἄριστα σχήματα παρενεβλήθησαν εἰς τὴν ἀναδημοσίευσιν τοῦ ἔργου μεταξὺ τῶν Ἁπάντων τοῦ Γαλιλαίου (Ἐθνικὴ Ἔκδοσις, Τόμος II).

*** Αἱ Annotazioni τοῦ Bernegger ἀνεδημοσιεύθησαν εἰς τὸν Τόμον I τῆς ἐκδόσεως τῶν Ἁπάντων τοῦ Γαλιλαίου ὡς μέρους τῆς «Συλλογῆς τῶν Ἰταλῶν Κλασσικῶν». Ὁ συγγραφεὺς (γεννηθεὶς εἰς Hallstadt τῆς Αὐστρίας τὴν 8ην Φεβρουαρίου 1582, ἀποθ. εἰς Strasburg, τὴν 3ην Φεβρουαρίου 1640) ἂν καὶ δὲν μετέβη ποτὲ εἰς Ἰταλίαν, θεωρεῖται ἐκ τῶν ἀξιωτέρων μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου, ὡς μεταφράσας εἰς τὴν λατινικὴν πολλὰ ἔργα του.

καὶ τὴν χρῆσιν τοῦ ὀργάνου, δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντιστῇ εἰς τὸν πειρασμὸν νὰ τὸ παρουσιάσῃ εἰς ἕνα ἔργον του ὡς προϊὸν ἰδικῆς του πρωτοτύπου ἐμπνεύσεως. Ἀλλ' ὁ Γαλιλαῖος δὲν ἦτο ἀπὸ τοὺς ἀνθρώπους ποὺ ἀνέχονται τὰς ὕβρεις. Δὲν ὑπερήσπισε λοιπὸν μόνον διὰ τοῦ τύπου τὰ δικαιώματα τῆς πνευματικῆς του ἰδιοκτησίας, ἀλλὰ κατέφυγεν ἐπίσης εἰς τὰ δικαστήρια. Ὁ βενετὸς δικαστὴς δὲν ἐδίστασε ν' ἀναγνωρίσῃ τὴν λογοκλοπίαν ποὺ διέπραξεν ὁ Capra, νὰ τὸν καταδικάσῃ διὰ τὴν πρᾶξιν του καὶ νὰ διατάξῃ τὴν ἄμεσον κατάσχεσιν καὶ καταστροφὴν τῶν κυκλοφορούντων ἀντιτύπων.

303. Ἄλλα στοιχεῖα τῆς μαθηματικῆς ἰδιοσυγκρασίας τοῦ Γαλιλαίου παρέχονται ἀπὸ τοὺς καρπούς, τοὺς ὁποίους ἔδρεψεν ἐκ τῆς μελέτης τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους. Παρασιωπῶντες ὅτι ἐξ αὐτῶν ὡδηγήθη εἰς τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ, τὸν ὁποῖον ὁ Γαλιλαῖος ἐκάλεσε μετριοφρόνως bilancetta (ζυγαρίτσα), θὰ ὑπενθυμίσωμεν πρὸ πάντων μερικὰς ἀξιολόγους παρασημειώσεις εἰς τὰ Βιβλία Π ε ρ ὶ σ φ α ί ρ α ς κ α ὶ κ υ λ ί ν δ ρ ο υ, τὰς ὁποίας περισυνέλεξαν μεταξὺ τῶν καταλοίπων του. Τὴν ἰδίαν προέλευσιν ἔχουν αἱ μελέται του ἐπὶ τῶν «ἀδιαιρέτων» (indivisibili), λέξις τὴν ὁποίαν ἐδανείσθη ἀπὸ τὸν Bradwardine (Τόμος I, § 174) διὰ νὰ τὴν χρησιμοποιήσῃ ἀντὶ τῆς λέξεως «ἄτομα».

Τοιαῦται μελέται εἶχον ὡς ἀντικείμενον τὴν σύστασιν τῆς ὕλης καὶ ἐπρόκειτο ν' ἀποτελέσουν τὸ περιεχόμενον ἑνὸς εἰδικοῦ ἔργου, περὶ τοῦ ὁποίου κατ' ἐπανάληψιν γίνεται λόγος εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ Γαλιλαίου μὲ τὸν διάσημον μαθητήν του Bonaventura Cavalieri (βλ. ἐπιστολὰς τοῦ τελευταίου ὑπὸ χρονολογίας 21 Μαρτίου 1626, 4 Ἀπριλίου 1626, 10 Ἰανουαρίου 1634)*. Ἐμεσολάβησαν ὅμως ἄλλαι μελέται, ὡς καὶ ἀλλεπάλληλοι φυσικαὶ καὶ ἠθικαὶ ταλαιπωρίαι, αἱ ὁποῖαι καὶ τὸν ἠμπόδισαν νὰ πραγματοποιήσῃ τὸ σχέδιόν του. Ὅτι ὅμως εἶχεν εἰσδύσει ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου προκύπτει ἀπὸ μερικὰ χωρία τοῦ ἔργου του Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze. Ἀπαντᾶται ἐκεῖ μία σελὶς ὅπου ὁ συγγραφεὺς θέλει «νὰ καταστήσῃ τοὺς ἀναγνώστας προσεκτικοὺς ἐπὶ τῶν βαρέων σφαλμάτων τὰ ὁποῖα γίνονται, ὅταν σκέπτωνται μερικοὶ ἐπὶ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν καθ' ὃν τρόπον σκέπτονται ἐπὶ τῶν πεπερασμένων, ἐνῷ οἱ χαρακτῆρες τῶν μὲν οὐδεμίαν ἀπολύτως σχέσιν ἔχουν μὲ τοὺς χαρακτῆρας τῶν δέ». Καὶ διὰ νὰ καταστήσῃ φανερὰν τὴν παρατήρησίν του ἀναφέρει τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐνῷ εἰς κάθε ἀριθμὸν τῆς φυσικῆς σει-

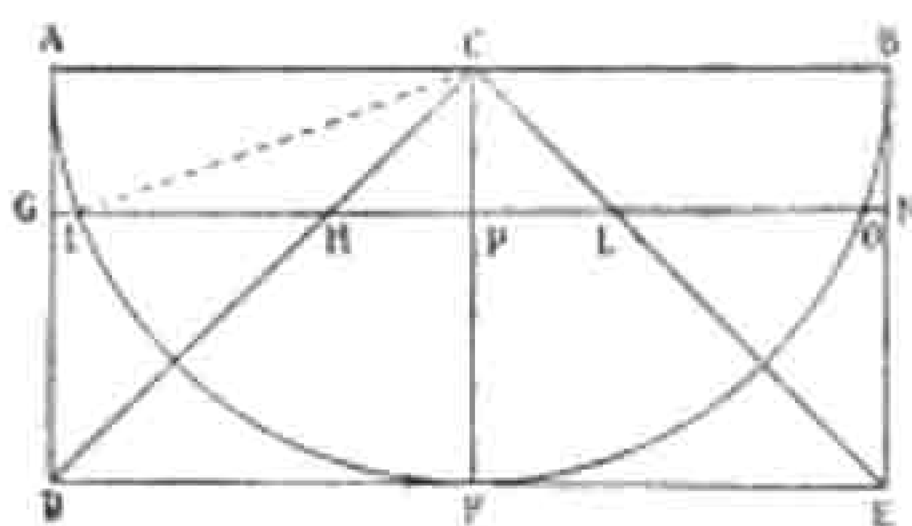
* Κατὰ τὰς μαρτυρίας τοῦ G. B. Nelli, ἀφωσιωμένου βιογράφου τοῦ κορυφαίου φλωρεντινοῦ, ὁ λογισμὸς τῶν ἀδιαιρέτων εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ἔργον τοῦ Γαλιλαίου. Ἀλλ' ὅσον μᾶς ἀφορᾷ πρόκειται περὶ γνώμης τὴν ὁποίαν, ἐκτὸς τοῦ Libri, ὅπως νομίζομεν, οὐδεὶς συνεμερίσθη οὔτε συμμερίζεται.

ρᾶς ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον τετράγωνον ἐντελῶς ὡρισμένον, τὰ τετράγωνα γίνονται συνεχῶς ἀραιότερα ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς σειρᾶς. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης τὰ παράδοξα τοῦ ἀπείρου ἤρχισαν νὰ κατακλύζουν τὴν ἐπιστήμην!

Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον ἀπαντῶνται δύο μηχανικοὶ τρόποι γενέσεως τῆς παραβολῆς· ὁ ἕνας ὀρθὸς καὶ ἀξιοσημείωτος, ὁ ἄλλος ἐντελῶς ἐσφαλμένος. Πράγματι, κατὰ τὸν Γαλιλαῖον, παραβολὴ εἶναι ἡ τροχιὰ ὑλικοῦ σημείου ἐλευθέρως κινουμένου ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρᾶγμα ἀληθές· εἶναι ὅμως ἐσφαλμένον ὅτι λαμβάνει σχῆμα παραβολῆς νῆμα βαρὺ καὶ ὁμογενὲς ἀναρτώμενον ἐκ τῶν δύο ἄκρων του (σήμερον γνωρίζομεν ὅτι τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ἡ ἁλυσοειδὴς καμπύλη).

Τὸ αὐτὸ ἔργον περιέχει ἕνα ἄλλο χωρίον καθαρῶς γεωμετρικόν, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν σκόπιμον ν' ἀναφέρωμεν, ἀφοῦ σημειώσωμεν ὅτι μερικοὶ ὑπαινιγμοὶ ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν θεμελιώδη γεωμετρικὴν ἀρχὴν τῶν ἀδιαιρέτων τοῦ Cavalieri δὲν πρέπει νὰ θεωροῦνται ὡς διεκδικοῦντες προτεραιότητα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἔργον Discorsi τοῦ Γαλιλαίου ἐδημοσιεύθη τρία ἔτη μετὰ τὸ σχετικὸν ἔργον τοῦ Cavalieri.

«Εἶναι ἀνάγκη νὰ κάμωμεν τὸ σχῆμα, διότι ἡ ἀπόδειξις εἶναι καθαρὰ γεωμετρική. Ἔστω λοιπὸν (σχ. 15) ὁ μέσος κύκλος AFB, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον C, καὶ τὸ περιγεγραμμένον ὀρθογώνιον ADEB, ἂς ἀχθοῦν δὲ ἐκ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι CD, CE πρὸς τὰ σημεῖα D,E. Φανταζόμεθα κατόπιν τὴν ἡμιδιάμετρον CF, κάθετον ἐπὶ τὰς εὐθείας AB καὶ DE, καὶ φανταζόμεθα ὅτι ὁλόκληρον τὸ σχῆμα περιστρέφεται περὶ τὴν CF. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μὲν ὀρθογώνιον ADEB θὰ γράψῃ κύλινδρον, τὸ ἡμικύκλιον AFB θὰ γράψῃ ἡμισφαίριον, τὸ δὲ τρίγωνον ΔCF θὰ γράψῃ κῶνον. Ἂς φαντασθῶμεν τώρα ὅτι ἀπομακρύνομεν τὸ ἡμισφαίριον, ἀφίνοντες ὅμως τὸν κῶνον καὶ ὅ,τι ἀπομείνῃ ἀπὸ τὸν κύλινδρον, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐκ τοῦ σχήματός του, ἂς ὀνομάσωμεν λεκάνην (scodella). Θ' ἀποδείξωμεν πρῶτον ὅτι ἡ λεκάνη καὶ ὁ κῶνος εἶναι ἴσα. Κατόπιν, θεωροῦντες ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τῆς λεκάνης διαμέτρου DE, διερχόμενον διὰ τυχούσης εὐθείας CN, παραλλήλου πρὸς τὴν DE καὶ τεμνούσης τὴν λεκάνην εἰς G,I,O,N καὶ τὸν κῶνον εἰς H,L, θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ κῶνος CHL καὶ τὸ τμῆμα τῆς λεκάνης ποὺ παρουσιάζει διατομὴν GAI καὶ BON εἶναι ἴσα καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ βάσις τοῦ κώνου ἡ ἔχουσα διάμετρον HL εἶναι ἴση πρὸς τὴν κυκλικὴν ἐκείνην ἐπιφάνειαν ποὺ εἶναι βάσις τοῦ



Σχ. 15

ἀποκοπέντος τμήματος τῆς λεκάνης, τουτέστι τῆς λωρίδος ἐκείνης ποὺ ἔχει πλάτος ἴσον πρὸς τὴν γραμμὴν GI. (Παρατηρεῖτε τώρα τί πρᾶγμα εἶναι οἱ μαθηματικοὶ ὁρισμοί· μία θέσπισις ὀνομάτων ἢ συντομίαι τοῦ λόγου, συντεταγμέναι καὶ ἀποβλέπουσαι εἰς ἄρσιν τῆς ἀνιαρᾶς ἐκείνης προσπαθείας, τὴν ὁποίαν καταβάλλομεν ἀκριβῶς τώρα διὰ νὰ συνεννοηθῶμεν, ἐνῷ δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἐκείνην κυκλικὸν δακτύλιον, τὸ δὲ ὀξύτατον ἐκεῖνο τμῆμα τῆς λεκάνης κυκλικὸν ξυράφιον). Τώρα ὅπως καὶ ἂν σᾶς ἀρέσει νὰ τὰ ὀνομάσετε, σᾶς ἀρκεῖ νὰ κατανοήσετε ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον εἰς οἱανδήποτε ἀπόστασιν παράλληλον πρὸς τὴν κυκλικὴν βάσιν διαμέτρου DE, τέμνει πάντοτε τὰ δύο στερεά, δηλαδὴ τὸ μέρος CHL τοῦ κώνου καὶ τὸ μέρος τῆς λεκάνης ἴσα μεταξύ των, ὁμοίως δὲ τὰς δύο ἐπιφανείας - βάσεις τῶν ἰδίων στερεῶν, ἤτοι τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου καὶ τοῦ κύκλου HL, ἴσας ἐπίσης μεταξύ των».

Ὁ μαθηματικὸς χαρακτὴρ τοῦ ἐξεταζομένου ἔργου ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶχε κατὰ νοῦν νὰ ἐπιφέρῃ μίαν προσθήκην σχετικὴν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν. Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω ὅτι (§ 323) τὸ σχετικὸν σχέδιον ἐχρησιμοποιήθη ἀπὸ ἕνα μαθητήν του. Διὰ τοῦτο ὁ Γαλιλαῖος συγκαταριθμεῖται μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων σχολιαστῶν τοῦ V Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

Θὰ τερματίσωμεν τὰ ἀφορῶντα τὸν κορυφαῖον φλωρεντινὸν φυσικόν, παρατηροῦντες ὅτι αἱ καθαρῶς μαθηματικαὶ θεωρίαι, τὰς ὁποίας ἀνέπτυξε διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς ἀξίας ἑνὸς ἵππου, ἀποτελοῦν ὑπόδειγμα δι' ὅλους ἐκείνους τοὺς ὁποίους ἀπασχολεῖ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ φαινόμενα τῆς ζωῆς, καὶ ὅτι μερικοὶ ὑπολογισμοί, ποὺ εὑρέθησαν μεταξὺ τῶν καταλοίπων του, πρὸς καθορισμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἰς παιγνίδιον τέχνης μὲ τρεῖς κύβους, τοῦ ἐξασφαλίζει μίαν θέσιν εἰς τὴν προϊστορίαν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων.

Johannes Kepler

304. Δὲν ὑπῆρξεν ὀλιγώτερον θυελλώδης, ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ Γαλιλαίου, ὁ βίος τοῦ ἄλλου φωστῆρος τῆς ἀστρονομίας, περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ XVII αἰῶνος: τοῦ Johannes Keppler ἤ, συνηθέστερον, Kepler.

Ἐγεννήθη εἰς Weilder Stadt (Württemberg) τὴν 27 Δεκεμβρίου 1571 ἀπὸ πτωχὴν οἰκογένειαν διαμαρτυρομένων. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς καθ' ἣν ἐφοίτα εἰς τὰ σχολεῖα τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως ἔδιδε δείγματα ζωηρᾶς πνευματικῆς δραστηριότητος, τὰ ὁποῖα ἐφείλκυσαν τὴν προσοχὴν καὶ τὸν θαυμασμὸν τῶν διδασκάλων του. Τὸ 1589 μετέβη εἰς Τυβίγγην διὰ νὰ σπουδάσῃ Θεολογίαν εἰς τὸ ἐκεῖ ἱεροδιδασκαλεῖον, ὀλίγον ὅμως ἔπειτα ἐνεγράφη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον, ὅπου ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν τοῦ ἀστρονόμου

ἀποκοπέντος τμήματος τῆς λεκάνης, τουτέστι τῆς λωρίδος ἐκείνης ποὺ ἔχει πλάτος ἴσον πρὸς τὴν γραμμὴν GI. (Παρατηρεῖτε τώρα τί πρᾶγμα εἶναι οἱ μαθηματικοὶ ὁρισμοί· μία θέσπισις ὀνομάτων ἢ συντομίαι τοῦ λόγου, συντεταγμέναι καὶ ἀποβλέπουσαι εἰς ἄρσιν τῆς ἀνιαρᾶς ἐκείνης προσπαθείας, τὴν ὁποίαν καταβάλλομεν ἀκριβῶς τώρα διὰ νὰ συνεννοηθῶμεν, ἐνῷ δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἐκείνην κυκλικὸν δακτύλιον, τὸ δὲ ὀξύτατον ἐκεῖνο τμῆμα τῆς λεκάνης κυκλικὸν ξυράφιον). Τώρα ὅπως καὶ ἂν σᾶς ἀρέσει νὰ τὰ ὀνομάσετε, σᾶς ἀρκεῖ νὰ κατανοήσετε ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον εἰς οἱανδήποτε ἀπόστασιν παράλληλον πρὸς τὴν κυκλικὴν βάσιν διαμέτρου DE, τέμνει πάντοτε τὰ δύο στερεά, δηλαδὴ τὸ μέρος CHL τοῦ κώνου καὶ τὸ μέρος τῆς λεκάνης ἴσα μεταξύ των, ὁμοίως δὲ τὰς δύο ἐπιφανείας - βάσεις τῶν ἰδίων στερεῶν, ἤτοι τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου καὶ τοῦ κύκλου HL, ἴσας ἐπίσης μεταξύ των».

Ὁ μαθηματικὸς χαρακτὴρ τοῦ ἐξεταζομένου ἔργου ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶχε κατὰ νοῦν νὰ ἐπιφέρῃ μίαν προσθήκην σχετικὴν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν. Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω ὅτι (§ 323) τὸ σχετικὸν σχέδιον ἐχρησιμοποιήθη ἀπὸ ἕνα μαθητήν του. Διὰ τοῦτο ὁ Γαλιλαῖος συγκαταριθμεῖται μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων σχολιαστῶν τοῦ V Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

Θὰ τερματίσωμεν τὰ ἀφορῶντα τὸν κορυφαῖον φλωρεντινὸν φυσικόν, παρατηροῦντες ὅτι αἱ καθαρῶς μαθηματικαὶ θεωρίαι, τὰς ὁποίας ἀνέπτυξε διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς ἀξίας ἑνὸς ἵππου, ἀποτελοῦν ὑπόδειγμα δι' ὅλους ἐκείνους τοὺς ὁποίους ἀπασχολεῖ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ φαινόμενα τῆς ζωῆς, καὶ ὅτι μερικοὶ ὑπολογισμοί, ποὺ εὑρέθησαν μεταξὺ τῶν καταλοίπων του, πρὸς καθορισμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἰς παιγνίδιον τέχνης μὲ τρεῖς κύβους, τοῦ ἐξασφαλίζει μίαν θέσιν εἰς τὴν προϊστορίαν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων.

Johannes Kepler

304. Δὲν ὑπῆρξεν ὀλιγώτερον θυελλώδης, ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ Γαλιλαίου, ὁ βίος τοῦ ἄλλου φωστῆρος τῆς ἀστρονομίας, περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ XVII αἰῶνος: τοῦ Johannes Keppler ἤ, συνηθέστερον, Kepler.

Ἐγεννήθη εἰς Weilder Stadt (Württemberg) τὴν 27 Δεκεμβρίου 1571 ἀπὸ πτωχὴν οἰκογένειαν διαμαρτυρομένων. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς καθ' ἣν ἐφοίτα εἰς τὰ σχολεῖα τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως ἔδιδε δείγματα ζωηρᾶς πνευματικῆς δραστηριότητος, τὰ ὁποῖα ἐφείλκυσαν τὴν προσοχὴν καὶ τὸν θαυμασμὸν τῶν διδασκάλων του. Τὸ 1589 μετέβη εἰς Τυβίγγην διὰ νὰ σπουδάσῃ Θεολογίαν εἰς τὸ ἐκεῖ ἱεροδιδασκαλεῖον, ὀλίγον ὅμως ἔπειτα ἐνεγράφη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον, ὅπου ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν τοῦ ἀστρονόμου

M. Moestlin (1550 - 1631) ὁ ὁποῖος, διδάσκων εἰς αὐτὸν τὸ κοπερνίκειον σύστημα, τὸν κατηύθυνε πρὸς τὴν ἐπιστήμην ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπέπρωτο νὰ δοξασθῇ. Τὸ 1591 ἔλαβε τὸν βαθμὸν τοῦ «magister», τὸν δὲ Ἰανουάριον τοῦ 1594 ἐτοποθετήθη καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸ γυμνάσιον τοῦ Graz (Stiria). Ἤρχισε τὰ μαθήματά του τὴν 25 Μαΐου τοῦ ἰδίου ἔτους, ἀλλὰ οἱ μαθηταί του ἦσαν τόσον ὀλιγάριθμοι, ὥστε ἠδύνατο νὰ διαθέτῃ πολλὰς ὥρας εἰς μελέτην. Ἔχων ἐπίσης τὴν ὑποχρέωσιν νὰ συντάσσῃ τὸ ἡμερολόγιον μετὰ προβλέψεων παντὸς εἴδους περὶ τῶν μελλοντικῶν γεγονότων, μερικαὶ τῶν ὁποίων εἶχον θαυμαστὴν ἐπιτυχίαν, ὁ Kepler, μὲ τὴν ζωηροτάτην φαντασίαν ποὺ ἦτο προικισμένος, ἐνεπλάκη εἰς τὰ δίκτυα τῆς ἀστρολογίας, ἐκ τῶν ὁποίων οὐδέποτε κατώρθωσε ν' ἀπαλλαγῇ, τόσον μᾶλλον καθ' ὅσον ἐξ αὐτῆς ἤντλει συχνὰ τὰ μέσα πρὸς καταπολέμησιν τῆς πενίας, ἄλλης συντρόφου ἐκ τῆς ὁποίας παρ' ὅλα ταῦτα δὲν ἠδυνήθη ποτὲ ν' ἀπελευθερωθῇ.

Τὸ πρῶτον του ἀστρονομικὸν δημοσίευμα (1596) τὸν ἔφερεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Tycho Brahe καὶ μὲ τὸν Γαλιλαῖον. Μὲ τὸν τελευταῖον ἤνοιξε τότε μίαν ἀλληλογραφίαν, ἡ ὁποία δὲν ἐσταμάτησε παρὰ μόνον μὲ τὸν θάνατόν του. Ἀπὸ αὐτὸν ἐζήτησεν, οὐχὶ ἄνευ ἀποτελέσματος, προστασίαν καὶ ὑποστήριξιν ὅταν αἱ διώξεις ἐναντίον τῶν διαμαρτυρομένων τοῦ κατέστησαν τὸν βίον ἀβίωτον εἰς τὴν καθολικὴν Αὐστρίαν. Ὁμοῦ μὲ τὸν διάσημον δανὸν ἀστρονόμον, ἦλθεν εἰς τὴν Πράγαν ἀπὸ τοῦ 1599. Διέμεινεν ἐκεῖ ἐπί τινα χρόνον συνεργαζόμενος καρποφόρως μετὰ τοῦ Brahe, τούτου δὲ ἀποθανόντος (Σ.τ.Μ.: 24 Ὀκτωβρίου 1601) ὡρίσθη ὑπὸ τοῦ αὐτοκράτορος Ροδόλφου II διάδοχός του εἰς τὸ ἐκεῖ ἀστεροσκοπεῖον, μὲ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ ἐπιμεληθῇ τῆς ἐκτυπώσεως τῶν ἀνεκδότων ἐργασιῶν του.

305. Μολονότι ἡ ἐπιστήμη τῶν ἄστρων δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὰ πλαίσια τῆς παρούσης ἱστορίας, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρασιωπήσωμεν τὴν ἐμφάνισιν τῆς Νέας Ἀστρονομίας, (Astronomia nova 1609), διότι εἰς τὸ ἔργον αὐτό, ἀπὸ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως τοῦ Ἄρεως, ὁ Kepler ἤχθη εἰς τὴν διατύπωσιν δύο ἐκ τῶν νόμων ποὺ φέρουν τὸ ὄνομά του (ἐλλειπτικότης τῶν τροχιῶν τῶν ἄστρων ἀφ' ἑνός, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀναλογία τῶν διαγραφομένων ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ἐμβαδῶν πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους). Οἱ νόμοι οὗτοι ἔδειξαν ἀμέσως τὴν πρακτικὴν σπουδαιότητα τῶν ἐρευνῶν τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, καὶ ἀπετέλεσαν ἰσχυρότατον κίνητρον πρὸς ἐπανάληψιν τῶν ἐρευνῶν καὶ τῶν μελετῶν ἐπὶ τῶν ἐνδόξων καμπύλων.

Ἀποθανόντος τοῦ Ροδόλφου II, ὁ διάδοχός του Ματθίας διετήρησε τὸν Kepler εἰς τὴν θέσιν του, τὸν ἐκάλεσε μάλιστα πλησίον του τὸ 1613 εἰς τὴν Δίαιταν τῆς Ρατισβόνης, ὅπου ἐπρόκειτο νὰ διεξαχθῇ συζήτησις

περὶ τῆς μεταρρυθμίσεως τοῦ ἡμερολογίου. Τὸ 1620 ἐγκατέλειψε τὴν Πράγαν, διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς Württemberg καὶ νὰ ὑπερασπισθῇ τὴν μητέρα του, τὴν ὁποίαν εἶχον κατηγορήσει ἀδίκως διὰ πράξεις μαγείας (ἐπέτυχε δὲ πράγματι τὴν ἀθώωσίν της). Εἰς τὸ Linz, ὅπου ἐγκατεστάθη τὸ 1612, ἐγένετο στόχος νέων διώξεων ἐκ μέρους τοῦ καθολικοῦ κλήρου. Ἀναζητῶν πάντοτε μίαν ἐπικερδῆ θέσιν, ἀποτυχὼν δὲ εἰς τὰς προσπαθείας του νὰ καταλάβῃ τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τῆς Padova, τὴν ὁποίαν εἶχε καταστήσει ἔνδοξον ὁ Γαλιλαῖος, ἐδέχθη τελικῶς νὰ ὑπηρετήσῃ ὡς ἀστρολόγος τοῦ Wallenstein, ἑνὸς ἐκ τῶν ἡρώων τοῦ Τριακονταετοῦς Πολέμου. Ταχέως ὅμως ἀνεγνώρισεν ὅτι ἡ ζωὴ τοῦ στρατοπέδου καὶ αἱ ἀπαιτήσεις τῆς Αὐλῆς δὲν συνεβιβάζοντο πρὸς τὴν ἰδιοσυγκρασίαν ἑνὸς διανοουμένου μὲ ἀνεξάρτητον χαρακτῆρα, ὅπως ἦτο ὁ Kepler. Αἱ ἔριδες, εἰς τὰς ὁποίας ἐνεπλάκη, ἀφ' ἑνὸς μὲν μὲ τοὺς κληρονόμους τοῦ Tycho Brahe, κατηγοροῦντας ἀδίκως τὸν Kepler ὅτι ἐσφετερίσθη τὸ πολύτιμον ὑλικὸν ποὺ εἶχε συλλέξει ὁ ἀκαταπόνητος ἐκεῖνος παρατηρητὴς τῶν ἄστρων, ἀφ' ἑτέρου δὲ μὲ τὴν αὐτοκρατορικὴν Κυβέρνησιν, ἡ ὁποία ἠρνεῖτο νὰ τοῦ καταβάλῃ τοὺς καθυστερημένους μισθούς, κατέστησαν ἐξαιρετικῶς δυστυχῆ τὴν τελευταίαν περίοδον τῆς ζωῆς τοῦ κορυφαίου ἀστρονόμου. Ὁ θάνατός του, ἐπελθὼν εἰς Ρατισβόνην τὴν 15ην Ὀκτωβρίου 1630, θὰ ἦτο ἴσως εἰς αὐτὸν εὐπρόσδεκτος ὡς μία ἀπολύτρωσις, ἂν δὲν ἤρχετο ἀνάμικτος μὲ τὴν πικρίαν ὅτι ἀφίνει εἰς τὸν κόσμον μίαν οἰκογένειαν εἰς τὴν ἐσχάτην πενίαν.

306. Θεμελιώδης τίτλος τοῦ Kepler, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλει τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, εἶναι τὸ ἔργον του Σ τ ε ρ ε ο μ ε τ ρ ί α τ ῶ ν β υ τ ί ω ν (Stereometria doliorum) *, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν πρώτην ἀξιόλογον ἐξέλιξιν εἰς τὴν Εὐρώπην τῆς θεωρίας ποὺ ἐδημιούργησεν ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰ βιβλία του Π ε ρ ὶ κ ω ν ο ε ι δ έ ω ν κ α ὶ σ φ α ι ρ ο ε ι δ έ ω ν. Ἀξίζει μάλιστα, χάριν περιεργείας, νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἰς τὴν συγγραφήν του δὲν παρεκινήθη ὁ μέγας ἀστρονόμος ἀπὸ τὴν εὐγενῆ φιλοδοξίαν νὰ προχωρήσῃ ἐπὶ τῆς ὁδοῦ, τὴν ὁποίαν ἤνοιξεν ὁ κορυφαῖος Ἕλλην γεωμέτρης, ἀλλ' ἀπὸ τὰς βιοτικὰς μερίμνας του ὡς «pater familias». Μετοικήσας πράγματι εἰς τὸ Linz καὶ συνάψας ἕνα δεύτερον γάμον, εὑρέθη εἰς τὴν Αὐστρίαν εἰς μίαν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συγκομιδὴ τοῦ οἴνου ὑπῆρξε τόσον ἄφθονος, ὥστε διὰ μέσου τοῦ Δουνάβεως κατέπλεον εἰς τὴν πόλιν ἐκείνην ἀναρίθμητα βυτία κατάμεστα γλυκυτάτου οἴνου. Ὁ Kepler ἀπεφάσισε ν' ἀποκτήσῃ μερικὰ διὰ τὴν οἰκογένειάν του καὶ τοῦ ἐδόθη τότε ἡ εὐκαιρία νὰ παρατηρήσῃ, ὅτι οἱ πωληταὶ διὰ τὸν καθορισμὸν

* Ἀκόμη καὶ εἰς τὸ ἔργον Mysterium cosmographicum (Τυβίγγη, 1596) ἀπαντῶνται μαθηματικαὶ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι ὅμως φέρουν τὰ ἴχνη ἑνὸς μεταγενεστέρου πυθαγορικοῦ μυστικισμοῦ.

τοῦ περιεχομένου ἑκάστου βαρελίου, ἀντὶ νὰ προβαίνουν εἰς ἄμεσον ἐκτίμησιν τοῦ περιεχομένου, ὅπως ἐσυνηθίζετο ἐπὶ τοῦ Ρήνου, περιωρίζοντο εἰς τὴν μέτρησιν, μέσῳ μιᾶς ράβδου, τοῦ «μετρητικοῦ κάμακος» (virga mensoria), τῆς ἀποστάσεως τοῦ στομίου ἀπὸ τοῦ διαμετρικῶς ἀντικειμένου σημείου τοῦ βαρελίου (προφανῶς τὰ αὐστριακὰ βυτία ἦσαν ἢ ἐθεωροῦντο ὅμοια μεταξύ των). Τρεῖς ἡμέραι βαθείας μελέτης ἤρκεσαν εἰς τὸν Kepler ν' ἀνακαλύψῃ τὴν αἰτιολογίαν αὐτοῦ τοῦ τρόπου μετρήσεως, καρπὸς δὲ τῆς μελέτης του ὑπῆρξεν ἡ συγγραφὴ τοῦ προαναφερθέντος ἔργου του. Διὰ τὴν δημοσίευσιν αὐτοῦ ὑπελόγιζεν εἰς τὴν συνδρομὴν ἑνὸς προσώπου, γνωστοῦ διὰ τὰς φιλικάς του σχέσεις πρὸς τὸν Γαλιλαῖον, τὰς ὁποίας συνῆψε κατὰ τὴν διάρκειαν ταξειδίου του εἰς τὴν Ἰταλίαν, τὸν Marco Welser (γεννηθέντα εἰς Augusta τὴν 20ὴν Ἰουνίου 1588 καὶ ἀποθανόντα ἐκεῖ τὴν 23ην Ἰουνίου 1614). Ἀλλ' ὁ μεσολαβήσας θάνατος τοῦ τελευταίου καὶ ἡ παρελκυστικὴ τακτικὴ ἑνὸς ἐκδότου τῆς Augusta, εἰς τὸν ὁποῖον εἶχε καταφύγει, τὸν ἠνάγκασαν νὰ παίξῃ ὁ ἴδιος τὸν ρόλον τοῦ ἐκδότου καὶ οὕτω τὸ βιβλίον ἐδημοσιεύθη εἰς Linz τὸ 1615.

Τὸ ἔργον ἀρχίζει μὲ μίαν ἔκθεσιν τῶν ὅσων ἐγνώριζον οἱ ἀρχαῖοι γύρω ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν ὄγκων τῶν στρογγύλων σωμάτων. Ἀρχίζει μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας — ὄχι μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχιμηδείων ἐρευνῶν, ἀλλ' ἀκόμη βάσει τοῦ ἀποτελέσματος εἰς τὸ ὁποῖον κατέληξεν ὁ A. van Roomen (§ 280) καὶ σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον, λέγει ὁ Kepler, κύκλος διαμέτρου 20.000.000.000.000.000 ἔχει περιφέρειαν 62.831.853.071.195.862 — καὶ μεταβαίνει κατόπιν εἰς τὰ σχήματα ποὺ ἐξετάζει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰ βιβλία του Π ε ρ ὶ σ φ α ί ρ α ς κ α ὶ κ υ λ ί ν δ ρ ο υ. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἔκθεσις τοῦ νεωτέρου ἀστρονόμου ὑστερεῖ πολὺ εἰς αὐστηρότητα ἐκείνης τῶν ἀρχαίων, ἀφοῦ πραγματεύεται μὲ μεγάλην ἐλευθεριότητα ἄπειρα καὶ ἀπειροστά, θεωρῶν π.χ. ὅτι ἡ περιφέρεια ἔχει τόσα μέρη ὅσα καὶ σημεῖα δηλαδὴ ἄπειρα (partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas).

Πολὺ περισσότερον πρωτότυπος εἶναι ἡ συνέχεια, ὅπου ὑπὸ τὸν τίτλον Supplementum ad Archimedem de stereometria figurarum conoidibus et sphaeroidibus proxime succedentium[10] μελετῶνται τὰ στερεὰ σχήματα τὰ γεννώμενα ἐκ περιστροφῆς ἑνὸς κύκλου περὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του ἢ μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν περὶ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων. Πρὸς ταξινόμησιν καὶ κατονομασίαν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν οὕτω γεννωμένων ὑπὸ ἑνὸς κύκλου ὁ Kepler διακρίνει πέντε περιπτώσεις:

I. Ὁ ἄξων τῆς ἐπιφανείας δὲν συναντᾷ τὴν γενέτειραν καμπύλην. Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει τὸ σχῆμα δακτυλίου (annulus).

II. Ὁ ἄξων ἐφάπτεται τῆς γενετείρας· παράγεται τότε κλειστὸς δακτύλιος (annulus strictus).

III καὶ V. Ὁ ἄξων τέμνει τὴν γενέτειραν· ἡ γεννωμένη ἐπιφάνεια ἔχει τότε σχῆμα πεπονοειδὲς (malum) ἢ λεμονοειδὲς (malum citrum) ἐφ' ὅσον θεωροῦμεν ὡς γενέτειραν τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν δύο τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄξων χωρίζει τὴν περιφέρειαν.

IV. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ στρεφομένου κύκλου, λαμβάνεται μία σφαῖρα.

Ἀνάλογοι διακρίσεις γίνονται, ὅταν ἡ γενέτειρα εἶναι μία κωνικὴ τομή. Συνολικῶς λαμβάνονται 92 εἴδη ἐπιφανειῶν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων ὁ Kepler δίδει ἕνα ὄνομα, τὸ ὁποῖον δανείζεται ἀπὸ τὰ διδόμενα εἰς μερικοὺς καρπούς.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος στερεῶν, ὅπως εἶναι ὁ δακτύλιος, ἐφαντάζετο ὅτι ὁ ὄγκος τέμνεται ὑπὸ ἀπείρων ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος, ὅτε χωρίζεται τὸ στερεὸν εἰς ἀπειροστοῦ πάχους στρώματα ἐξομοιούμενα πρὸς κυλινδρίσκους. Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν ἀναπτυσσόμενον τὸν δακτύλιον, ὥστε νὰ καταστῇ κύλινδρος μὲ εὐθειοποιημένον τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν κέντρων ὅλων τῶν τομῶν, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $2\pi^2Rr^2$, ὅπου r ἡ ἀκτὶς τῆς γενετείρας περιφερείας καὶ R ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου της ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐπαναλαμβάνεται λοιπὸν ὁ συλλογισμὸς τὸν ὁποῖον εἶχε κάμει καὶ ὁ Ἥρων (Τόμος I, § 75), χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ οἱαδήποτε ἐπίδρασις τοῦ τελευταίου ἐπὶ τοῦ Kepler.

Ἀλλὰ μέθοδοι τόσον ἐλευθεριάζουσαι εἶναι εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐπικίνδυνοι*. Ἐπὶ πλέον ὁ Kepler εἰς μίαν περίπτωσιν (θεώρημα XXV) ἠναγκάσθη νὰ ὁμολογήσῃ ὅτι ἐζήτησεν εἰς μάτην μίαν «νόμιμον ἀπόδειξιν» μιᾶς προτάσεως, τὴν ὁποίαν διετύπωσεν ὁ ἴδιος, προσκαλῶν ἄλλους εἰς ἀνεύρεσιν ἱκανοποιητικῆς ἀποδείξεως. Τοιοῦτος συλλογισμὸς εἶναι ὅμως ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ, διότι τὸ περὶ οὗ πρόκειται θεώρημα δὲν ἀληθεύει, ὁ δὲ Kepler ἤχθη εἰς τὴν διατύπωσίν του δεχθείς, ὅτι ὅσα εἶχεν ἐπιβεβαιώσει εἰς δύο περιπτώσεις τοῦ σχήματος ἐξηκολούθουν ἰσχύοντα εἰς ὅλας τὰς λοιπὰς ἐνδιαμέσους περιπτώσεις αὐτοῦ.

Τὸ Μέρος II τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν ἔργου πραγματεύεται ἀκριβῶς τὸ θέμα ποὺ τοῦ ἔδωσε τὴν ἀφορμὴν διὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ ἔργου τούτου καὶ ἔχει τίτλον: Στερεομετρία τῶν αὐστριακῶν βυτίων. Τὸ συμπέ-

* Τοῦτο ἐπιβεβαιοῦται μὲ τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα. Διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ἡμισφαιρίου ἀκτῖνος r ὁ Kepler θεωρεῖ τὸν ὀρθὸν κῶνον τῆς αὐτῆς βάσεως ἀκτῖνος r καὶ ὕψος r καὶ ἕνα δεύτερον κῶνον περιγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμισφαίριον μὲ τὰς γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὰς τοῦ πρώτου. Αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαί των εἶναι $\pi\sqrt{2}\,r^2$ καὶ $2\pi\sqrt{2}\,r^2$, ὁ δὲ Kepler, παραδέχεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἡμισφαιρίου εἶναι ποσότης μέση ἀνάλογος τῶν δύο τούτων. Οὕτω λαμβάνει $\sqrt{\pi^2 4r^4} = 2\pi r^2$ ἀποτέλεσμα ὀρθόν. Ἀλλ' ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τοῦ ἡμισφαιρίου, θὰ προκύψῃ ἐξαγόμενον ἐσφαλμένον.

ρασμα, εἰς τὸ ὁποῖον καταλήγει, εἶναι ὅτι τὰ αὐστριακὰ βαρέλια εἰδικῶς ἔχουν τὸ καταλληλότερον σχῆμα, λαμβανόμενου ὑπ' ὄψιν ὅτι μὲ δοθεῖσαν ποσότητα ξύλου ἐπιτρέπουν τὴν δημιουργίαν τοῦ μεγίστου ὄγκου. Ἔλυσε λοιπὸν ἕνα πρόβλημα μεγίστου, πρᾶγμα ποὺ φέρει εἰς τὴν μνήμην μας τὸ V Βιβλίον τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς τοῦ Πάππου, τὸ ὁποῖον ὁ Kepler δὲν παραλείπει νὰ ἀναφέρῃ. Εἶναι δυνατὸν λοιπὸν νὰ λεχθῇ ὅτι εἰς τὸ Μέρος τοῦτο τοῦ ἔργου τοῦ Kepler ἀπαντᾶται ἡ πρώτη συμβολή, ποὺ ἔδωσαν οἱ νεώτεροι εἰς τὴν γεωμετρικὴν θεωρίαν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Ἀποδεικνύει π.χ. ὁ Kepler, ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς σφαῖραν παραλληλεπιπέδων τὸ μέγιστον εἶναι ὁ κύβος. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον ἔχει μεγάλην σημασίαν εἶναι ὅτι διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα ἐζήτει, ἐχρησιμοποίησε τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν γειτονίαν τοῦ μεγίστου ἡ μεταβολὴ τῆς ἀντιστοίχου συναρτήσεως εἶναι μηδενική. Εἶναι μία παρατήρησις, τὴν ὁποίαν πιθανῶς ἤντλησεν ὁ Kepler ἀπὸ ἕνα ἔργον τοῦ N. Oresme (Τόμος I, § 177) τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα (πρέπει νὰ τὸ σημειώσωμεν), ἂν καὶ εἶναι ἀκόμη χειρόγραφα, εὑρίσκοντο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰς τὴν διάθεσιν ὅλων. Παρὰ ταῦτα παραμένει εἰς τὸν Kepler ἡ τιμή, ὅτι πρῶτος διέβλεψεν εἰς τὴν πνευματώδη παρατήρησιν τοῦ γάλλου κληρικοῦ τὸν σπόρον μιᾶς μεθόδου ἐρεύνης τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

307. Στοιχειωδέστερον χαρακτῆρα ἔχουν μερικαὶ σελίδες τῆς Ἁρμονίας τοῦ κόσμου (Harmonice Mundi) τοῦ ἔργου ἐκείνου, τὸ ὁποῖον κατέστη ἔνδοξον, διότι περιέχει τὸν οὕτω λεγόμενον «τρίτον νόμον τοῦ Kepler»: Διὰ πάντας τοὺς πλανήτας τὰ τετράγωνα τῶν περιόδων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς κύβους τῶν μεγάλων ἡμιαξόνων τῶν τροχιῶν. Τὸ ἔργον αὐτὸ θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι ἐγράφη ἀπὸ ἄνθρωπον τῆς πυθαγορικῆς σχολῆς, κυριαρχούμενον ἀπὸ τὰς πλέον ἐξωφρενικὰς δεισιδαιμονίας, ἀφοῦ σκοπός του εἶναι ἡ ἀναζήτησις τῶν ἁρμονικῶν σχέσεων ποὺ ὑπάρχουν εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν μουσικήν, εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικὴν καὶ τὴν ἀστρολογίαν, εἰς τὴν μεταφυσικὴν καὶ τὴν ἀστρονομίαν. Ἀποτελεῖ δεῖγμα ἐκτάκτου δυνάμεως φαντασίας, ἡ ὁποία εἰς ἄλλους δὲν θὰ κατέληγε παρὰ εἰς ἐξωφρενικοὺς παραλληλισμούς, τὸν Kepler ὅμως ὡδήγησεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ ἐνδόξου συμπεράσματος, ποὺ ἀπεκάλυψε τὸν ἀνωτέρω νόμον τῆς φύσεως. Ἀπὸ τοῦ I Βιβλίου τοῦ ἔργου ἀπαντῶμεν ἤδη μερικὰ πράγματα ἄξια μνείας· ἐκεῖ πράγματι συμπληροῦται καὶ κατόπιν ἀναπτύσσεται ἡ ἔννοια τοῦ «ἀστεροειδοῦς πολυγώνου», εἰς τὴν ὁποίαν, τοὐλάχιστον εἰς μίαν περίπτωσιν, εἶχε φθάσει ὁ φιλόσοφος τῆς Σάμου (Τόμος I, § 23), ἀνέπτυξε δὲ περαιτέρω, ὅπως εἴδομεν, ὁ T. Bradwardine (Τόμος I, § 174) καὶ κατόπιν ὁ C. de Bouvelles (§ 298)*.

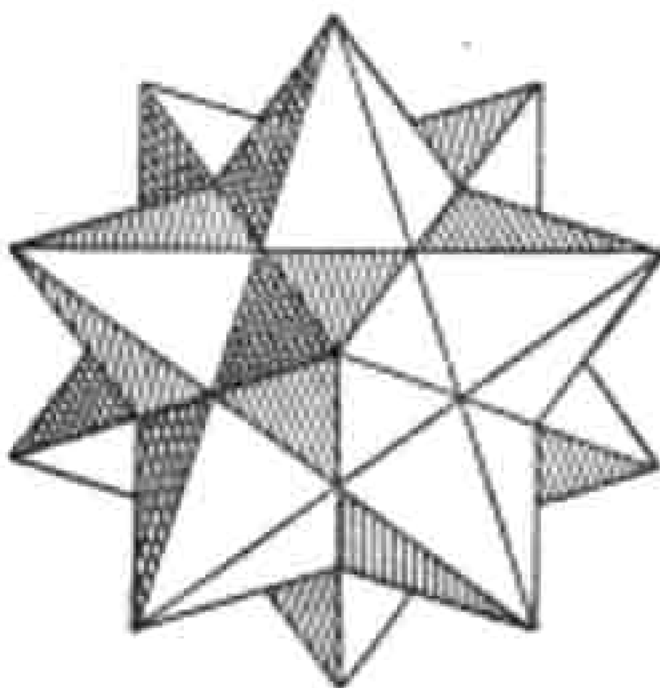
* Οὗτος εἰς τὸ ἔργον του Geometriae introductionis Libri VI (Paris, 1503) παρετήρησεν ὅτι τὰ ἀστεροειδῆ πολύγωνα δύνανται νὰ ληφθοῦν διὰ προεκτάσεως τῶν πλευρῶν τῶν κυρτῶν πολυγώνων.

Ὁ Kepler εἰσάγει μίαν διάκρισιν τῶν πολυγώνων (κυρτῶν καὶ ἀστεροειδῶν) εἰς δύο κατηγορίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία περιλαμβάνει πολύγωνα κατασκευάσιμα μὲ κανόνα καὶ διαβήτην, ἡ δὲ ἄλλη πολύγωνα ἀπαιτοῦντα διὰ τὴν κατασκευήν των ἀνώτερα μέσα. Εἰδικώτερον σταματᾷ εἰς τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον, ἀποδεικνύων ὅτι ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς του πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

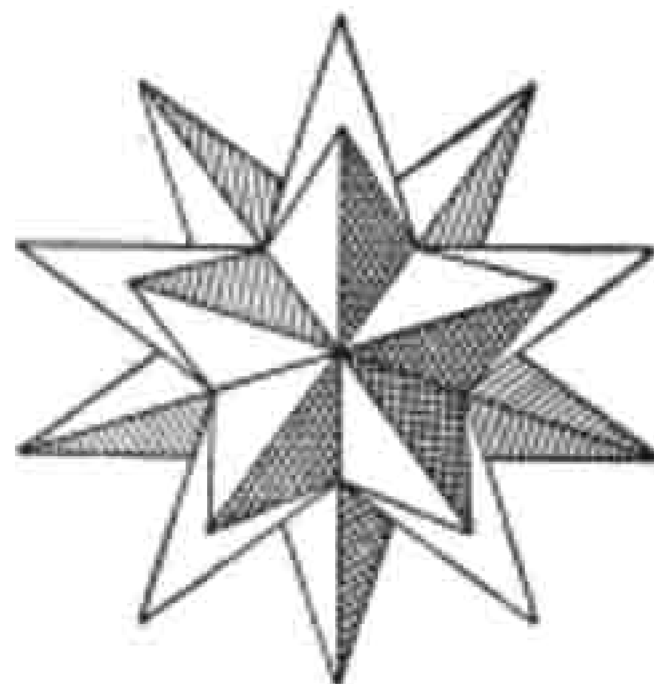
$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0.$$

Ἐπὶ πλέον παρετήρησεν εὐφυέστατα, ὅτι ἡ πολλαπλότης τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ὕπαρξιν τριῶν κανονικῶν πενταγώνων μὲ δεδομένας κορυφάς, ἑνὸς κυρτοῦ καὶ δύο ἀστεροειδῶν. Ἀνάλογα συμβαίνουν καὶ εἰς τὰ λοιπὰ πολύγωνα, διότι, π.χ., ἡ ἀνάλογος ἐξίσωσις ἔχει διὰ τὸ πεντάγωνον δύο ρίζας, διὰ τὸ ἐννεάγωνον τέσσαρας κλπ. Ὁ Kepler λοιπὸν ἀνεκάλυψεν, ὅτι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ὁδηγεῖ συγχρόνως εἰς ὅλα τὰ παρόμοια πολύγωνα, κυρτὰ καὶ ἀστεροειδῆ.

Εἰς τὸ II Βιβλίον τοῦ αὐτοῦ ἔργου ὁ Kepler ἐπεκτείνει τὰς θεωρίας του εἰς τὸν χῶρον. Ἐξετάζει τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα, υἱοθετῶν τὴν φανταστικὴν ἀντιστοιχίαν (Τόμος I, § 23) ποὺ ἐδέχοντο οἱ ἀρχαῖοι μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῶν τεσσάρων στοιχείων τοῦ κόσμου. Κατόπιν ὁμιλεῖ ἐν συντομίᾳ περὶ μερικῶν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ἀρχιμηδείων ἡμικανονικῶν πολυέδρων καὶ ἐξετάζει ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸν χῶρον τὰ σχήματα τὰ ἀνάλογα πρὸς τὰ μὴ κυρτὰ κανονικὰ πολύγωνα, καταλήγων εἰς δύο ἐκ τῶν τεσσάρων ἀστεροειδῶν πολυέδρων (σχ. 16 καὶ 17). Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐδῶ περισσότερον μνημονεύοντες καὶ τὰ λοιπὰ σχήματα μερικῆς κανονικότητος ποὺ ἐξετάζει εἰς τὸ ἔργον του ὁ Kepler.



Σχ. 16



Σχ. 17

Διάνοια δεχομένη ἀσμένως τὰς νέας ἰδέας, ὅσον δήποτε ἐπαναστατικάς, ψυχὴ ἀπηλλαγμένη ἀπὸ κάθε ἴχνος φθόνου ἢ ἀντιζηλίας, ὁ Kepler ὅπως ἐχειροκρότησε μὲ χαρὰν τὰς ἀνακαλύψεις ποὺ ἔκαμεν ὁ Γαλιλαῖος

μὲ τὴν διόπτραν του, τοιουτοτρόπως ἐδέχθη μὲ χαρὰν καὶ ἀνεγνώρισεν ἀμέσως τὴν μεγάλην δύναμιν καὶ χρησιμότητα τῆς νέας ἐπινοήσεως τῶν λογαρίθμων. Καὶ εἶναι ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι, ἂν καὶ ἔζησεν ἐπ' ἀρκετὸν χρόνον εἰς τὴν Πράγαν μαζὺ μὲ τὸν Bürgi, δὲν ἔλαβε γνῶσιν τῶν μελετῶν τοῦ τελευταίου, οὔτε ἐπομένως τοῦ ἀριθμητικοῦ ἐκείνου τεχνάσματος, τὸ ὁποῖον τελικῶς ἐγνώρισε μόνον διὰ μέσου τῶν ἔργων τοῦ Napier. Ἀναγνωρίσας δὲ εἰς αὐτὸ ἕνα στοιχεῖον γεωμετρικο - μηχανικὸν ξένον, ἀνέλαβε καὶ ἐπέτυχε ν' ἀναπτύξῃ τὴν σχετικὴν θεωρίαν ὑπὸ μορφὴν σύμφωνον πρὸς τὸ εὐκλείδειον ὑπόδειγμα τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων, προσθέσας μάλιστα καὶ νέαν ἰδικήν του συμβολὴν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων. Ὅταν ἐπληροφορήθη τὴν τελειοποίησιν, τὴν ὁποίαν ἐπέφερεν ὁ Briggs εἰς τὴν ἐπινόησιν τοῦ Napier, δὲν ἐδίστασε ν' ἀναγνωρίσῃ τὴν ἀνωτερότητα τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων ἔναντι ἐκείνων τοὺς ὁποίους εἶχεν ὑπολογίσει ὁ ἴδιος. Ἀποτελεῖ τοῦτο ἕνα ἀκόμη τεκμήριον τῆς ψυχικῆς εὐγενείας τοῦ μεγάλου ἀστρονόμου, τοῦ ὁποίου τὸ πνεῦμα καὶ ὁ χαρακτὴρ εἶναι ἐξ ἴσου ἄξια τοῦ μεγαλυτέρου θαυμασμοῦ.

F. d' Aguillon

308. Περὶ τῶν ἔργων ὀπτικῆς τοῦ Kepler δὲν ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ κάμωμεν λόγον, καθ' ὅσον τὸ φαινόμενον τῆς ὁράσεως ἐξετάζεται ὑπ' αὐτοῦ μόνον ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καὶ τὴν ἔκτασιν ποὺ ἐνδιαφέρουν τὸν παρατηρητὴν ἀστρονόμον*. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἕνα γιγάντιον τόμον εἰς μέγα φύλλον, τυπωθέντα εἰς Ἀμβέρσαν τὸ 1613 ὑπὸ τὸν τίτλον Opticorum Libri VI. Συγγραφεὺς τούτου εἶναι ὁ François d' Aguillon, ὁ ὁποῖος ἐγεννήθη τὸ 1556 εἰς Βρυξέλλας ἀπὸ εὐγενῆ οἰκογένειαν, εἰσῆλθε δεκαετὴς εἰς τὸ Τάγμα τῶν Ἰησουϊτῶν, ἔζησεν ἐπί τινα χρόνον εἰς τὴν Ἱσπανίαν, ἐδίδαξε μαθηματικὰ εἰς τὴν Ἀμβέρσαν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 20ὴν Μαρτίου 1617. Σκοπός του ἦτο νὰ γράψῃ ἕνα μέγα ἔργον περιλαμβάνον τὴν Ὀπτικήν, τὴν Διοπτρικὴν καὶ τὴν Κατοπτρικήν, ἀλλ' ὁ θάνατος τὸν ἠμπόδισε νὰ συνθέσῃ τὰ δύο τελευταῖα.

Ἐκ τῶν ἓξ Βιβλίων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ Ὀπτική, μόνον τὸ τελευταῖον παρουσιάζει ἐνδιαφέρον διὰ τὸν ἱστορικὸν τῶν μαθηματικῶν. Ἐξετάζονται εἰς αὐτὸ οἱ δύο θεμελιώδεις τύποι προβολῆς, ἤτοι ἡ ὀρθὴ καὶ ἡ κεντρικὴ προβολή. Διὰ τὴν τελευταίαν, υἱοθετεῖται ἡ ἀρχαία ὀνομασία «σκηνογραφία», ἐξετάζεται δὲ περαιτέρω ἡ εἰδικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν

---

* Σημειοῦται πάντως ὅτι εἰς τὸ ἔργον ποὺ τιτλοφορεῖται Ad Vitellionem Paralipomena κλπ., ὁ Kepler εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τοῦ κύκλου καμπυλότητος καὶ ἐχρησιμοποίησε πρῶτος τὸν ὅρον ἑστία (focus) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ποὺ χρησιμοποιεῖται σήμερον εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.

μὲ τὴν διόπτραν του, τοιουτοτρόπως ἐδέχθη μὲ χαρὰν καὶ ἀνεγνώρισεν ἀμέσως τὴν μεγάλην δύναμιν καὶ χρησιμότητα τῆς νέας ἐπινοήσεως τῶν λογαρίθμων. Καὶ εἶναι ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι, ἂν καὶ ἔζησεν ἐπ' ἀρκετὸν χρόνον εἰς τὴν Πράγαν μαζὺ μὲ τὸν Bürgi, δὲν ἔλαβε γνῶσιν τῶν μελετῶν τοῦ τελευταίου, οὔτε ἐπομένως τοῦ ἀριθμητικοῦ ἐκείνου τεχνάσματος, τὸ ὁποῖον τελικῶς ἐγνώρισε μόνον διὰ μέσου τῶν ἔργων τοῦ Napier. Ἀναγνωρίσας δὲ εἰς αὐτὸ ἕνα στοιχεῖον γεωμετρικο - μηχανικὸν ξένον, ἀνέλαβε καὶ ἐπέτυχε ν' ἀναπτύξῃ τὴν σχετικὴν θεωρίαν ὑπὸ μορφὴν σύμφωνον πρὸς τὸ εὐκλείδειον ὑπόδειγμα τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων, προσθέσας μάλιστα καὶ νέαν ἰδικήν του συμβολὴν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων. Ὅταν ἐπληροφορήθη τὴν τελειοποίησιν, τὴν ὁποίαν ἐπέφερεν ὁ Briggs εἰς τὴν ἐπινόησιν τοῦ Napier, δὲν ἐδίστασε ν' ἀναγνωρίσῃ τὴν ἀνωτερότητα τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων ἔναντι ἐκείνων τοὺς ὁποίους εἶχεν ὑπολογίσει ὁ ἴδιος. Ἀποτελεῖ τοῦτο ἕνα ἀκόμη τεκμήριον τῆς ψυχικῆς εὐγενείας τοῦ μεγάλου ἀστρονόμου, τοῦ ὁποίου τὸ πνεῦμα καὶ ὁ χαρακτὴρ εἶναι ἐξ ἴσου ἄξια τοῦ μεγαλυτέρου θαυμασμοῦ.

F. d' Aguillon

308. Περὶ τῶν ἔργων ὀπτικῆς τοῦ Kepler δὲν ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ κάμωμεν λόγον, καθ' ὅσον τὸ φαινόμενον τῆς ὁράσεως ἐξετάζεται ὑπ' αὐτοῦ μόνον ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καὶ τὴν ἔκτασιν ποὺ ἐνδιαφέρουν τὸν παρατηρητὴν ἀστρονόμον*. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἕνα γιγάντιον τόμον εἰς μέγα φύλλον, τυπωθέντα εἰς Ἀμβέρσαν τὸ 1613 ὑπὸ τὸν τίτλον Opticorum Libri VI. Συγγραφεὺς τούτου εἶναι ὁ François d' Aguillon, ὁ ὁποῖος ἐγεννήθη τὸ 1556 εἰς Βρυξέλλας ἀπὸ εὐγενῆ οἰκογένειαν, εἰσῆλθε δεκαετὴς εἰς τὸ Τάγμα τῶν Ἰησουϊτῶν, ἔζησεν ἐπί τινα χρόνον εἰς τὴν Ἱσπανίαν, ἐδίδαξε μαθηματικὰ εἰς τὴν Ἀμβέρσαν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 20ὴν Μαρτίου 1617. Σκοπός του ἦτο νὰ γράψῃ ἕνα μέγα ἔργον περιλαμβάνον τὴν Ὀπτικήν, τὴν Διοπτρικὴν καὶ τὴν Κατοπτρικήν, ἀλλ' ὁ θάνατος τὸν ἠμπόδισε νὰ συνθέσῃ τὰ δύο τελευταῖα.

Ἐκ τῶν ἓξ Βιβλίων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ Ὀπτική, μόνον τὸ τελευταῖον παρουσιάζει ἐνδιαφέρον διὰ τὸν ἱστορικὸν τῶν μαθηματικῶν. Ἐξετάζονται εἰς αὐτὸ οἱ δύο θεμελιώδεις τύποι προβολῆς, ἤτοι ἡ ὀρθὴ καὶ ἡ κεντρικὴ προβολή. Διὰ τὴν τελευταίαν, υἱοθετεῖται ἡ ἀρχαία ὀνομασία «σκηνογραφία», ἐξετάζεται δὲ περαιτέρω ἡ εἰδικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν

---

* Σημειοῦται πάντως ὅτι εἰς τὸ ἔργον ποὺ τιτλοφορεῖται Ad Vitellionem Paralipomena κλπ., ὁ Kepler εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τοῦ κύκλου καμπυλότητος καὶ ἐχρησιμοποίησε πρῶτος τὸν ὅρον ἑστία (focus) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ποὺ χρησιμοποιεῖται σήμερον εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.

αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς τὴν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου παράστασιν τῆς γηΐνης ἐπιφανείας. Λόγῳ τῆς σπουδαιότητός της, ἡ προκύπτουσα μέθοδος ἐχαρακτηρίσθη μὲ τὸ ὄνομα στερεογραφικὴ προβολή, νεολογισμὸς διατηρηθεὶς ἔκτοτε εἰς τὴν ἐπιστήμην. Ἀλλ' ὁ σοφὸς Ἰησουΐτης δὲν περιωρίσθη μόνον εἰς τὴν γλωσσικὴν αὐτὴν καινοτομίαν, ἀλλ' ἐμελέτησεν ἐμπεριστατωμένως τὴν στερεογραφικὴν προβολὴν καὶ διετύπωσε τὰς χαρακτηριστικάς της ἰδιότητας. Τοιουτρόπως ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μιᾶς μεθόδου μετασχηματισμοῦ τῶν σχημάτων, ἡ ὁποία κατὰ τὸν XIX αἰῶνα ἔλαβε σημαντικὰς γενικεύσεις καὶ μεγάλην ἀνάπτυξιν.

Bachet de Méziriac

309. Ἡ τάσις πρὸς νέους ὁρίζοντας, ἡ ὁποία, ὅπως προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων σελίδων, διεγράφετο κατὰ τὸν XVII αἰῶνα ἀπὸ τοὺς πρώτους αὐτοῦ χρόνους, δὲν ἀπήλειψε τὸν σεβασμὸν πρὸς τοὺς κλασσικούς. Μία πρώτη ἀπόδειξις ἐμμονῆς εἰς τὰς ἀνθρωπιστικὰς τάσεις παρέχεται ἀπὸ τὸν Claude Gaspar Bachet de Méziriac, (γεννηθέντα εἰς Bourg-en-Bresse τὸ 1581, ἀποθ. τὸ 1638) ὁ ὁποῖος τὸ 1621 ἐδημοσίευσε μίαν νέαν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ληφθεῖσαν ἔκ τινος παρισινοῦ χειρογράφου, ἀποτελοῦντος καρπὸν βαθείας μελέτης ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τοῦ Xylander (§ 256) καὶ ἄλλων χειρογράφων μὴ ἐρευνηθέντων προηγουμένως. Εἶναι ἔργον ἑνὸς εὐρυμαθοῦς, ἀλλ' ἐπίσης ἑνὸς ἐπιστήμονος, διότι δὲν ἐλλείπουν οὐσιαστικὰ σχόλια καὶ ἀναπτύξεις διαρκοῦς ἀξίας. Πρὸς ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ λεχθῇ ὅτι εἰσάγεται ἐκεῖ διὰ πρώτην φορὰν ἡ συνθήκη, ὅπως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ μὴ εἶναι μόνον ῥητοὶ καὶ θετικοί, ἀλλ' ἐπίσης ἀκέραιοι.

Τὸ ἔργον τοῦτο χρονολογικῶς τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἐκδόσεων (1612, 1624) ἑνὸς ἄλλου ἀκόμη σπουδαιοτέρου ἔργου, τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, φέροντος τίτλον: Προβλήματα ἀριθμητικά, εὐχάριστα καὶ ἐπιλεγμένα (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres). Ὁ τίτλος αὐτὸς εἶναι προσεγγιστικώτατος, διότι τὸ ἔργον ἀποτελεῖ συλλογὴν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα μακρόθεν ὑπενθυμίζουν τὴν Ἑλληνικὴν Ἀνθολογίαν (Τόμος I, § 93) καὶ τὰ ὁποῖα δύναται νὰ λύσῃ ὁ γνωρίζων τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τοῦ Εὐκλείδου ἢ τὰ Στοιχεῖα Ἀριθμητικῆς τοῦ συγγραφέως (τὰ ὁποῖα ἐν τούτοις δὲν ἐτιμήθησαν δι' ἐκτυπώσεως). Τὰ προβλήματα δὲν εἶναι ὅλα πρωτότυπα, ὅπως ἀναγνωρίζει ὁ ἴδιος ὁ Bachet, ὅταν ἀναφέρῃ τὸν Tartaglia διὰ νὰ τὸν ὑποβάλῃ εἰς κριτικήν. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν προβλημάτων τοῦ τύπου τῶν 100 πτηνῶν (Τόμος I, § 120), προβλήματα τὰ ὁποῖα ὑπὸ διαφόρους μορφὰς συνηντήσαμεν ἤδη εἰς πολλὰς περιπτώσεις.

αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς τὴν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου παράστασιν τῆς γηΐνης ἐπιφάνειας. Λόγῳ τῆς σπουδαιότητός της, ἡ προκύπτουσα μέθοδος ἐχαρακτηρίσθη μὲ τὸ ὄνομα στερεογραφικὴ προβολή, νεολογισμὸς διατηρηθεὶς ἔκτοτε εἰς τὴν ἐπιστήμην. Ἀλλ' ὁ σοφὸς Ἰησουΐτης δὲν περιωρίσθη μόνον εἰς τὴν γλωσσικὴν αὐτὴν καινοτομίαν, ἀλλ' ἐμελέτησεν ἐμπεριστατωμένως τὴν στερεογραφικὴν προβολὴν καὶ διετύπωσε τὰς χαρακτηριστικάς της ἰδιότητας. Τοιουτρόπως ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μιᾶς μεθόδου μετασχηματισμοῦ τῶν σχημάτων, ἡ ὁποία κατὰ τὸν XIX αἰῶνα ἔλαβε σημαντικὰς γενικεύσεις καὶ μεγάλην ἀνάπτυξιν.

Bachet de Méziriac

309. Ἡ τάσις πρὸς νέους ὁρίζοντας, ἡ ὁποία, ὅπως προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων σελίδων, διεγράφετο κατὰ τὸν XVII αἰῶνα ἀπὸ τοὺς πρώτους αὐτοῦ χρόνους, δὲν ἀπήλειψε τὸν σεβασμὸν πρὸς τοὺς κλασσικούς. Μία πρώτη ἀπόδειξις ἐμμονῆς εἰς τὰς ἀνθρωπιστικὰς τάσεις παρέχεται ἀπὸ τὸν Claude Gaspar Bachet de Méziriac, (γεννηθέντα εἰς Bourg-en-Bresse τὸ 1581, ἀποθ. τὸ 1638) ὁ ὁποῖος τὸ 1621 ἐδημοσίευσε μίαν νέαν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ληφθεῖσαν ἔκ τινος παρισινοῦ χειρογράφου, ἀποτελοῦντος καρπὸν βαθείας μελέτης ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τοῦ Xylander (§ 256) καὶ ἄλλων χειρογράφων μὴ ἐρευνηθέντων προηγουμένως. Εἶναι ἔργον ἑνὸς εὐρυμαθοῦς, ἀλλ' ἐπίσης ἑνὸς ἐπιστήμονος, διότι δὲν ἐλλείπουν οὐσιαστικὰ σχόλια καὶ ἀναπτύξεις διαρκοῦς ἀξίας. Πρὸς ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ λεχθῇ ὅτι εἰσάγεται ἐκεῖ διὰ πρώτην φορὰν ἡ συνθήκη, ὅπως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ μὴ εἶναι μόνον ρητοὶ καὶ θετικοί, ἀλλ' ἐπίσης ἀκέραιοι.

Τὸ ἔργον τοῦτο χρονολογικῶς τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἐκδόσεων (1612, 1624) ἑνὸς ἄλλου ἀκόμη σπουδαιοτέρου ἔργου, τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, φέροντος τίτλον: Προβλήματα ἀριθμητικά, εὐχάριστα καὶ ἐπιλεγμένα (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres). Ὁ τίτλος αὐτὸς εἶναι προσεγγιστικώτατος, διότι τὸ ἔργον ἀποτελεῖ συλλογὴν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα μακρόθεν ὑπενθυμίζουν τὴν Ἑλληνικὴν Ἀνθολογίαν (Τόμος I, § 93) καὶ τὰ ὁποῖα δύναται νὰ λύσῃ ὁ γνωρίζων τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τοῦ Εὐκλείδου ἢ τὰ Στοιχεῖα Ἀριθμητικῆς τοῦ συγγραφέως (τὰ ὁποῖα ἐν τούτοις δὲν ἐτιμήθησαν δι' ἐκτυπώσεως). Τὰ προβλήματα δὲν εἶναι ὅλα πρωτότυπα, ὅπως ἀναγνωρίζει ὁ ἴδιος ὁ Bachet, ὅταν ἀναφέρῃ τὸν Tartaglia διὰ νὰ τὸν ὑποβάλῃ εἰς κριτικήν. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν προβλημάτων τοῦ τύπου τῶν 100 πτηνῶν (Τόμος I, § 120), προβλήματα τὰ ὁποῖα ὑπὸ διαφόρους μορφὰς συνηντήσαμεν ἤδη εἰς πολλὰς περιπτώσεις.

Ὁ Bachet ἐδίδαξεν ἐπίσης τὴν κατασκευὴν τῶν μαγικῶν τετραγώνων 3^2 καὶ 5^2 θέσεων, ἐφαρμόζων ἕνα κανόνα τὸν ὁποῖον ἐπενόησεν ὁ ἴδιος δι' ὅλα τὰ μαγικὰ τετράγωνα τὰ περιέχοντα $(2n + 1)^2$ στοιχεῖα. Ὁμολογεῖ δὲ μὲ ἀφέλειαν, ὅτι δὲν κατώρθωσε νὰ εὕρῃ κανόνα ἐφαρμόσιμον ἐπίσης εἰς τετράγωνα μὲ $4n^2$ στοιχεῖα. Ἐὰν προσθέσωμεν ὅτι ὁ Bachet ἐδίδαξεν ἐπίσης μίαν μέθοδον πρὸς λύσιν τοῦ «προβλήματος τῶν ὑπολοίπων» (προσδιορισμὸς ἀριθμοῦ, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ὑπόλοιπα τὰ προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ δεδομένων ἀριθμῶν), δὲν θὰ ἔχωμεν ἐξαντλήσει τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν ἀξιολόγων πραγμάτων, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον, θὰ ἔχωμεν ὅμως συγκεντρώσει ἐπαρκῆ τεκμήρια πρὸς ἑδραίωσιν τῆς ἀξίας του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXII

ΜΑΘΗΤΑΙ ΤΟΥ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ

Προοίμιον

310. Ἡ γοητευτική, οὕτως εἰπεῖν, ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ Γαλιλαῖος, ὄχι μόνον εἰς τὰ πρόσωπα ποὺ εἶχον τὴν τύχην νὰ τὸν πλησιάσουν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἐκεῖνα ποὺ ἐθαύμασαν τὰς ἐργασίας του, ὑπῆρξε τόσον ἐκτεταμένη καὶ βαθεῖα, ὥστε δὲν ἀποτελεῖ ὑπερβολὴν ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς μαθητάς του τοὺς περισσοτέρους ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκαλλιέργησαν τὰς ἐπιστήμας τοῦ πειράματος καὶ τοῦ στοχασμοῦ, κατὰ τὴν πρώτην τριακονταετίαν τοῦ XVII αἰῶνος, ἔστω καὶ ἂν δὲν τὸ ἐδήλωσαν οἱ ἴδιοι ἀπεριφράστως. Θὰ περιορισθῶμεν ἐν τούτοις νὰ ἐξετάσωμεν, εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦτο, ἐκείνους μόνον οἱ ὁποῖοι εἶχον ἀμέσους καὶ ἐπιβεβαιωμένας σχέσεις μὲ τὸν κορυφαῖον ἐγκέφαλον τῆς Φλωρεντίας, ἀποκλείοντες, φυσικά, ἐκείνους οἱ ὁποῖοι δὲν ἄφησαν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἴχνη τῆς διαβάσεώς των.

Ὁ ἀναγνώστης δὲν θὰ εὕρη λοιπὸν εἰς τὰς σελίδας αὐτὰς καμμίαν ἰδιαιτέραν μνείαν περὶ μερικῶν προσώπων, πολὺ γνωστῶν ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας τοῦ Γαλιλαίου, ὅπως εἶναι ὁ Vincenzo Ranieri (γεννηθεὶς εἰς Γένοβαν τὴν 30ὴν Μαΐου 1606, ἀποθανὼν τὴν 5ην Νοεμβρίου 1647 εἰς Πίζαν, ὅπου ἐδίδασκεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον ἀπὸ τοῦ 1640) καὶ ὁ Mario Guiducci (γεννηθεὶς εἰς Φλωρεντίαν τὴν 18ην Μαρτίου 1554, ἀποθανὼν τὴν 5ην Νοεμβρίου 1646), διότι ἀμφότεροι ἐκαλλιέργησαν ἀποκλειστικῶς τὴν Ἀστρονομίαν. Περὶ τοῦ Benedetto Castelli (ἀβέβαια τὰ στοιχεῖα τῆς ζωῆς του) δὲν θὰ λάβωμεν ἀφορμὴν νὰ ὁμιλήσωμεν ἰδιαιτέρως, διότι ἡ φήμη του στηρίζεται κυρίως ἐπὶ τῶν μελετῶν του εἰς τὴν πρακτικὴν ὑδραυλικήν. Τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ εἴπωμεν περὶ τοῦ Nicolò Aggiunti (γενν. εἰς Borgo S. Sepolcro τὴν 6ην Δεκεμβρίου 1600, ἀποθ. εἰς Πίζαν τὴν 6ην Δεκεμβρίου 1635), καθηγητοῦ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Πίζης, τοῦ ὁποίου οὐδὲν σύγγραμμα γνωρίζομεν.

Σύντομος μνεία γίνεται περὶ τῶν ξένων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἤκουσαν αὐτοπροσώπως τὴν γαλιλαϊκὴν διδασκαλίαν, διότι μόνον λαμβάνοντες καὶ

τούτους ὑπ' ὄψιν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πληρεστέραν ἰδέαν τῆς ἐκτάσεως, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ἡ γαλιλαϊκὴ ἐπίδρασις. Μεταξὺ αὐτῶν εἶναι οἱ Γάλλοι Jacques Badouère καὶ François de Noailles, οἱ ὁποῖοι ὑπῆρξαν ἀκροαταὶ τοῦ Γαλιλαίου εἰς Padova κατὰ τὸ 1598· οἱ γερμανοὶ Martin Hasdale, ὁ ὁποῖος φαίνεται ὅτι ἔμενεν εἰς τὸ αὐτὸ διαμέρισμα μὲ τὸν Γαλιλαῖον, καὶ Matthaeus Bernegger, περὶ τοῦ ὁποίου ἐκάμαμεν ἤδη λόγον (§ 302) ὡς θερμοῦ κήρυκος τῆς γαλιλαϊκῆς διδασκαλίας· οἱ σκῶτοι Thomas Segeth καὶ John Wedderborn, οἱ ὁποῖοι, ὡς ἐγγεγραμμένοι εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova, εἶχον σχέσεις μὲ αὐτόν.

Εἰς τὴν περίοδον αὐτὴν τῆς δράσεως τοῦ Γαλιλαίου ἀνήκουν καὶ οἱ ἄγγλοι Richard White (ἀναφερόμενος ἐπίσης εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν μεταξὺ Huygens καὶ de Sluse), Thomas White (τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν ἐπίσης ὅταν θὰ ὁμιλήσωμεν περὶ Fermat), Robert Southwell καὶ Richard Willoughby.

Ὅλων τούτων διετηρήθη ἡ μνήμη· ἀλλὰ ἦτο τόσον ὑψηλὴ ἡ φήμη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆλθε τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova κατὰ τὴν ἐποχήν, ποὺ ἐδίδασκεν εἰς αὐτὸ ὁ ἀθάνατος λυγκεύς, ὥστε ὁ ἐπιθυμῶν νὰ καταστρώσῃ μίαν πλήρη στατιστικὴν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἤκουσαν τὸν ὑψηλὸν λόγον του, θὰ ἔπρεπε, χωρὶς φόβον ὅτι πλανᾶται, νὰ ἑκατονταπλασιάσῃ τὸν παρατεθέντα ἀνωτέρω κατάλογον. Θὰ ὡδηγεῖτο τοιουτοτρόπως εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν ὑπῆρξε γωνία τῆς Εὐρώπης, ὅπου δὲν εὗρε θαυμαστὰς καὶ ὀπαδοὺς ὁ μέγας διδάσκαλος.

Bonaventura Cavalieri

311. Κορυφαῖος μεταξὺ ἐκείνων ποὺ εἶχον τὴν τιμὴν νὰ κοσμηθοῦν μὲ τὸ ἐπίθετον «μαθητὴς τοῦ Γαλιλαίου», ἔστω καὶ μὲ τὴν εὐρυτέραν του ἔννοιαν, εἶναι ὁ Bonaventura Cavalieri. Ἐγεννήθη εἰς τὸ Μιλᾶνον, κατὰ τὰ φαινόμενα τὸ ἔτος 1598, ἀπὸ τοῦ ἔτους δὲ 1615 ἦτο ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τάγμα τῶν Ἰησουατῶν (Gesuati) τοῦ Τάγματος τοῦ Ἁγίου Ἱερωνύμου, τὸ ὁποῖον κατηργήθη δύο ἔτη μετὰ τὸν θάνατόν του. Τὸ 1621 τὸν εὑρίσκομεν εἰς τὴν Πίζαν, ὅπου ἐπωφελήθη τῶν μαθημάτων τοῦ Benedetto Castelli καὶ συνῆψε σχέσεις μὲ τὸν Γαλιλαῖον, ὁ ὁποῖος τότε εὑρίσκετο εἰς τὴν γειτονικὴν Φλωρεντίαν. Ὡς ἐκ τῶν θρησκευτικῶν του καθηκόντων, κατῴκησεν εἰς τὴν πόλιν Lodi κατὰ τὴν περίοδον 1623 - 1625. Μετέβη κατόπιν εἰς τὴν Ρώμην, τὸ δὲ 1626 ἐγκατεστάθη, κατόπιν ἀνωτέρας διαταγῆς, ἐπὶ χρονικόν τι διάστημα εἰς τὴν Πάρμαν. Εἰς ὑποστήριξιν τοῦ Γαλιλαίου ὀφείλει τὴν πρώτην καθηγητικὴν ἕδραν τῶν μαθηματικῶν, τὴν ὁποίαν τοῦ προσέφερεν ἡ σύγκλητος τῆς Βολωνίας τὸ ἔτος 1629*.

* Ἡ ἕδρα ἦτο κενὴ ἀπὸ τοῦ 1617, ὅτε ἀπέθανεν ὁ ἀστρονομος Magini καὶ δὲν εἶχεν

τούτους ὑπ' ὄψιν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πληρεστέραν ἰδέαν τῆς ἐκτάσεως, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ἡ γαλιλαϊκὴ ἐπίδρασις. Μεταξὺ αὐτῶν εἶναι οἱ Γάλλοι Jacques Badouère καὶ François de Noailles, οἱ ὁποῖοι ὑπῆρξαν ἀκροαταὶ τοῦ Γαλιλαίου εἰς Padova κατὰ τὸ 1598· οἱ γερμανοὶ Martin Hasdale, ὁ ὁποῖος φαίνεται ὅτι ἔμενεν εἰς τὸ αὐτὸ διαμέρισμα μὲ τὸν Γαλιλαῖον, καὶ Matthaeus Bernegger, περὶ τοῦ ὁποίου ἐκάμαμεν ἤδη λόγον (§ 302) ὡς θερμοῦ κήρυκος τῆς γαλιλαϊκῆς διδασκαλίας· οἱ σκῶτοι Thomas Segeth καὶ John Wedderborn, οἱ ὁποῖοι, ὡς ἐγγεγραμμένοι εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova, εἶχον σχέσεις μὲ αὐτόν.

Εἰς τὴν περίοδον αὐτὴν τῆς δράσεως τοῦ Γαλιλαίου ἀνήκουν καὶ οἱ ἄγγλοι Richard White (ἀναφερόμενος ἐπίσης εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν μεταξὺ Huygens καὶ de Sluse), Thomas White (τὸν ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν ἐπίσης ὅταν θὰ ὁμιλήσωμεν περὶ Fermat), Robert Southwell καὶ Richard Willoughby.

Ὅλων τούτων διετηρήθη ἡ μνήμη· ἀλλὰ ἦτο τόσον ὑψηλὴ ἡ φήμη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆλθε τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova κατὰ τὴν ἐποχήν, ποὺ ἐδίδασκεν εἰς αὐτὸ ὁ ἀθάνατος λυγκεύς, ὥστε ὁ ἐπιθυμῶν νὰ καταστρώσῃ μίαν πλήρη στατιστικὴν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἤκουσαν τὸν ὑψηλὸν λόγον του, θὰ ἔπρεπε, χωρὶς φόβον ὅτι πλανᾶται, νὰ ἑκατονταπλασιάσῃ τὸν παρατεθέντα ἀνωτέρω κατάλογον. Θὰ ὡδηγεῖτο τοιουτοτρόπως εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν ὑπῆρξε γωνία τῆς Εὐρώπης, ὅπου δὲν εὗρε θαυμαστὰς καὶ ὀπαδοὺς ὁ μέγας διδάσκαλος.

Bonaventura Cavalieri

311. Κορυφαῖος μεταξὺ ἐκείνων ποὺ εἶχον τὴν τιμὴν νὰ κοσμηθοῦν μὲ τὸ ἐπίθετον «μαθητὴς τοῦ Γαλιλαίου», ἔστω καὶ μὲ τὴν εὐρυτέραν του ἔννοιαν, εἶναι ὁ Bonaventura Cavalieri. Ἐγεννήθη εἰς τὸ Μιλᾶνον, κατὰ τὰ φαινόμενα τὸ ἔτος 1598, ἀπὸ τοῦ ἔτους δὲ 1615 ἦτο ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τάγμα τῶν Ἰησουατῶν (Gesuati) τοῦ Τάγματος τοῦ Ἁγίου Ἱερωνύμου, τὸ ὁποῖον κατηργήθη δύο ἔτη μετὰ τὸν θάνατόν του. Τὸ 1621 τὸν εὑρίσκομεν εἰς τὴν Πίζαν, ὅπου ἐπωφελήθη τῶν μαθημάτων τοῦ Benedetto Castelli καὶ συνῆψε σχέσεις μὲ τὸν Γαλιλαῖον, ὁ ὁποῖος τότε εὑρίσκετο εἰς τὴν γειτονικὴν Φλωρεντίαν. Ὡς ἐκ τῶν θρησκευτικῶν του καθηκόντων, κατῴκησεν εἰς τὴν πόλιν Lodi κατὰ τὴν περίοδον 1623 - 1625. Μετέβη κατόπιν εἰς τὴν Ρώμην, τὸ δὲ 1626 ἐγκατεστάθη, κατόπιν ἀνωτέρας διαταγῆς, ἐπὶ χρονικόν τι διάστημα εἰς τὴν Πάρμαν. Εἰς ὑποστήριξιν τοῦ Γαλιλαίου ὀφείλει τὴν πρώτην καθηγητικὴν ἕδραν τῶν μαθηματικῶν, τὴν ὁποίαν τοῦ προσέφερεν ἡ σύγκλητος τῆς Βολωνίας τὸ ἔτος 1629*.

* Ἡ ἕδρα ἦτο κενὴ ἀπὸ τοῦ 1617, ὅτε ἀπέθανεν ὁ ἀστρονομος Magini καὶ δὲν εἶχεν

Ὅταν συνεπληρώθη ἡ τριετία τῆς ἐντολῆς, ἡ Σύγκλητος τῆς Βολωνίας ἀνενέωσε τὸν διορισμὸν τοῦ Cavalieri διὰ μίαν ἀκόμη ἑπταετίαν καὶ πρὸ τῆς λήξεως αὐτῆς, ἤτοι τὸ 1636, παρέτεινεν ἐκ νέου τὸν διορισμόν του κατὰ μίαν ἀκόμη ἰσομήκη περίοδον. Τὸ 1640 ὁ Cavalieri ἔλαβεν αὔξησιν ἀποδοχῶν, τὸ δὲ 1646 νέαν παράτασιν τῆς συμβάσεώς του διαρκείας δώδεκα ἐτῶν. Ἐπωφελήθη ὅμως αὐτῆς πολὺ ὀλίγον, διότι τὴν 30ὴν Νοεμβρίου 1647 ὑπέκυψε τελικῶς εἰς τοὺς πόνους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὑπέφερεν εἰς τὴν ζωήν του καὶ οἱ ὁποῖοι τοῦ καθίστων βασανιστικὴν κάθε προσπάθειαν μεταφορᾶς ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅλων τῶν ἰδεῶν ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἔβριθον εἰς τὸ πνεῦμα του.

312. Ὁ Cavalieri, πρῶτος καὶ περισσότερον οἰουδήποτε ἄλλου, συνετέλεσεν εἰς τὴν ἐν Ἰταλίᾳ διάδοσιν τῆς θεωρίας καὶ τῆς πράξεως τῶν λογαρίθμων, τῶν ὁποίων ὁ ἴδιος ὅλως ἰδιαιτέρως ἐπραγματεύθη τὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἕνα κλάδον εἰς τὸν ὁποῖον εἰσήγαγε τελειοποιήσεις μεγίστης σπουδαιότητος. Οἱ δύο αὐτοὶ τίτλοι τιμῆς δὲν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν κεχωρισμένως, διότι μαρτυροῦνται ὑπὸ ἔργων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ τριγωνομετρία καὶ οἱ λογάριθμοι ἐξετάζονται ἐν συνδυασμῷ ὡς θέματα ἀλληλοβοηθούμενα.

Τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἔργα αὐτὰ φέρει τὸν τίτλον Directorium generale uranimetricum καί, ὡς δημοσιευθὲν τὸ 1632, πρέπει νὰ ἤσκησεν ἀναμφιβόλως μεγάλην ἐπίδρασιν εἰς τὴν πρώτην ἀπόφασιν τῆς Συγκλήτου τῆς Βολωνίας διὰ τὸν διορισμὸν τοῦ Cavalieri. Πρόκειται περὶ ἑνὸς τόμου διῃρημένου εἰς τρία μέρη ἀφιερωμένα, κατὰ σειράν, εἰς τοὺς λογαρίθμους, εἰς τὴν ἐπίπεδον τριγωνομετρίαν καὶ εἰς τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν, περιλαμβάνοντος δὲ ἐν παραρτήματι πίνακας λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων δι' ἀκτῖνα 10^{10}.

Θὰ σημειώσωμεν κατὰ πρῶτον λόγον μερικὰς καινοτομίας τοῦ συγγραφέως ὡς πρὸς τὴν ὀνοματολογίαν· διὰ νὰ δηλώσῃ ὁ Cavalieri τὰς τρεῖς κυκλικὰς συναρτήσεις, ἀκολουθῶν τὸ παράδειγμα τοῦ Magini (§ 277), προσθέτει τὴν λέξιν «secundus» εἰς τὰς «sinus», «tangens», «secans», εἰς τὰς ὁποίας, ὅπου ἡ εὐκρίνεια τὸ ἀπαιτεῖ, προσθέτει τὴν λέξιν «primus». Κατ' ἀναλογίαν διακρίνει ἕνα «sinus versus secundus» ἀπὸ τὸ σύνηθες «sinus versus primus». Ἀκολουθοῦν ἄλλα εἰδικὰ ὀνόματα πρὸς χαρακτηρισμὸν τῶν λογαρίθμων μερικῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, ὅπως: «mesologaritmus» διὰ τὸν λογάριθμον τῆς ἐφαπτομένης (ὅρος χρησιμοποιηθεὶς ἤδη ὑπὸ τοῦ Kepler), «tomologaritmus» διὰ τὸν λογάριθμον τῆς τεμνούσης καὶ «versilogaritmus» διὰ τὸν λογάριθμον τοῦ παρημιτόνου

ἔκτοτε πληρωθῆ ἐλλείψει προσώπου ἀνταξίου νὰ τὸν διαδεχθῇ. Ἡ δευτέρα ἕδρα ἦτο ἐπίσης τότε κενή, κατόπιν τοῦ θανάτου τοῦ Cataldi (1628).

(sinus versus), ἐνῷ διὰ τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου ὁ Cavalieri χρησιμοποιεῖ, ὅπως καὶ ὁ Napier, τὴν ἁπλῆν λέξιν «logaritmus».

Μεγαλυτέραν σπουδαιότητα ἔχει τὸ γεγονὸς ὅτι πρῶτος ἔδωσεν ἱκανοποιητικὰς ἀποδείξεις τῶν γνωστῶν «κανόνων τοῦ Napier», τῶν ἀφορώντων τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐπιπέδων τριγώνων (§ 294). Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ὁ Cavalieri ἀποκαθιστᾷ μερικοὺς χρησιμοτάτους τύπους, οἱ ὁποῖοι γεννῶνται ἀγομένου ἑνὸς ὕψους. Μερικοὶ ἐξ αὐτῶν ἀπαντῶνται ἤδη εἰς τὸν Regiomontano, ἐνῷ ἄλλοι εἶναι ἐντελῶς πρωτότυποι. Ἀλλ' ἡ ἐξοχωτέρα συμβολή του εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς σφαίρας συνίσταται εἰς τὴν ἀνακάλυψιν καὶ τὴν συναφῆ ἀπόδειξιν τῆς ἐκφράσεως τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἀκόμη καὶ ἄν, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἐν καιρῷ, ἄλλοι (Girard καὶ Harriot) ἔφθασαν εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα, ἡ ἀπὸ τούτων ἀνεξαρτησία τοῦ Cavalieri οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀμφισβήτησιν καὶ διὰ τοῦτο πολὺ δικαίως ἐγένετο ἔνδειξις τοῦ εὑρήματος τούτου ἐπὶ τοῦ μνημείου, τὸ ὁποῖον ἡ πόλις τοῦ Μιλάνου ἀνήγειρεν εἰς τὰ ἀνάκτορα Brera πρὸς τιμὴν τοῦ μεγάλου ἰησουάτου.

Συγγενῆ θέματα ἀναπτύσσονται καὶ εἰς ἄλλα κείμενα τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως. Εἰς τὸ ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον Compendio delle regole dei triangoli, ποὺ ἐδημοσιεύθη ἓξ ἔτη κατόπιν τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Napier, ὡς καὶ ἄλλους ἀκριβεῖς τύπους, ἀλλὰ μικροτέρας σημασίας λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι δὲν ἀποτελοῦν παρὰ ἁπλᾶ πορίσματα τῶν τύπων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τόξων.

Μερικοὶ τύποι, ἐξ ἄλλου, θὰ ἠδύναντο νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἐσφαλμένοι, ἐφ' ὅσον εἰς τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς ἀποδίδεται πρόσημον, ἀκριβεῖς δὲ ἐφ' ὅσον αὗται λαμβάνωνται ἀπολύτως. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τοὺς τύπους αὐτοὺς διὰ νὰ δυνηθῇ ὁ ἀναγνώστης νὰ ἀντιληφθῇ τὴν κατάστασιν τῆς τριγωνομετρίας κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος:

$$\text{ημ}(x - y) = \text{ημ}[y + (\pi - x)],$$
$$\text{ημ}(x + y) = \text{ημ}[y - (\pi - x)].$$

Διὰ νὰ καταστήσῃ ὁ Cavalieri περισσότερον καταφανῆ τὴν χρησιμότητα τῶν λογαρίθμων ἐδημοσίευσε τὸ 1639 μίαν ἑκατοντάδα προβλημάτων (Centuria di problemi), ὅπου ἡ ἐφεύρεσις τοῦ Napier ἐφαρμόζεται ἐπιτυχῶς εἰς ἑκατὸ τὸν ἀριθμὸν προβλήματα τῆς ἀστρονομίας, τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἐμπορικῆς ἀριθμητικῆς. Δὲν ἔχουν βεβαίως τόσην σπουδαιότητα, ὥστε ν' ἀξίζῃ νὰ τὰ ἀναφέρωμεν ἐδῶ· ὑποχρέωσιν μόνον ἔχομεν νὰ ἐξάρωμεν τὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον ἐπρότεινε πρῶτος ὁ Cavalieri διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\text{λογ}(\alpha + \beta)$, ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς $\text{λογ}\,\alpha$ καὶ $\text{λογ}\,\beta$ (ὑποτίθεται $\alpha > \beta$). Εἶναι ἕνα ζήτημα τὸ ὁποῖον ἀπησχόλησεν ἐπίσης, ὅπως θὰ ἴδωμεν, καὶ ἄλλους (Cagnoli, Zecchini - Leonelli καὶ Gauss) μεταξὺ

τοῦ τέλους τοῦ XVIII καὶ ἀρχῆς τοῦ XIX αἰῶνος. Ἐδῶ θὰ μνημονεύσωμεν μὲ τὴν δυνατὴν συντομίαν τὴν λύσιν ποὺ ἔδωσεν ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας. Διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν σκοπόν του, εἰσήγαγεν ὁ Cavalieri μίαν βοηθητικὴν γωνίαν διὰ τοῦ τύπου :

$$\lambda o\gamma\, \beta - \lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \varphi$$

ἢ $\eta\mu\varphi = \beta/\alpha$, ὁπότε ἡ γωνία φ εἶναι γνωστὴ καὶ μετ' αὐτῆς ἐπίσης αἱ ἐκφράσεις :

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, \frac{90^0 + \varphi}{2}, \quad \lambda o\gamma\, 2 + 2\, \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \frac{90^0 + \varphi}{2}.$$

Ἔχομεν τότε :

$$\lambda o\gamma\, (\alpha + \beta) = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, 2 + 2\, \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \frac{90^0 + \varphi}{2} \qquad (\alpha)$$

καὶ τὸ ζήτημα ἐλύθη.

Προκειμένου τώρα νὰ ὑπολογίσῃ τὸν λογ (α — β), ὁ Cavalieri θέτει :

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\varphi = \frac{\lambda o\gamma\, \beta - \lambda o\gamma\, (2\alpha)}{2},$$

ἐξ οὗ

$$\eta\mu\, \varphi = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}, \quad \sigma\upsilon\nu\, 2\varphi = \frac{\alpha - \beta}{\alpha},$$

συνεπῶς :

$$\lambda o\gamma\, (\alpha - \beta) = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, 2\varphi, \qquad (\beta)$$

ἐξαγόμενον πληροῦν ἐπιτυχῶς τὸν τεθέντα σκοπόν.

Παρατηροῦμεν τέλος, ὅτι παρουσιασθείσης ἀνάγκης μιᾶς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν Πινάκων τῶν προσηρτημένων εἰς τὸ προαναφερθὲν Directorium, ὁ Cavalieri ἐθεώρησε σκόπιμον νὰ προτάξῃ μὲ σχολαστικὴν ἀκρίβειαν μίαν πλήρη ἔκθεσιν τῶν κανόνων ἐπιλύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Τοιουτοτρόπως ἐνεφανίσθη τὸ ἔργον τὸ φέρον τίτλον Trigonometria (1643), εἰς τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν θὰ εὕρωμεν τίποτε τὸ ἀληθῶς νέον καὶ ἀξιοσημείωτον. Ὁ Cavalieri εἶχεν ἤδη δώσει ὅ,τι ἠδυνήθη εἰς τὸν σπουδαῖον αὐτὸν κλάδον.

313. Ὅταν τὸ 1632 ἐπλησίαζεν ἡ στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν, ληγούσης τῆς πρώτης συμβάσεως, ἡ Σύγκλητος τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας ἐπρόκειτο ν' ἀποφασίσῃ κατὰ πόσον ἔπρεπε ν' ἀνανεωθῇ ἢ ὄχι ἡ τριετὴς σύμβασις, ὁ διαπρεπὴς μαθηματικὸς ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα, ἐκτὸς τοῦ Directorium, ἕνα ἄλλο ἀξιόλογον ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον Lo specchio ustorio (Τὸ καυστικὸν κάτοπτρον). Εἰς τὸ μικρὸν αὐτὸ βιβλίον, λαμβάνων

ἀφορμὴν ὁ Cavalieri ἀπὸ τὴν ἀφήγησιν τῶν τεχνασμάτων, μὲ τὰ ὁποῖα ὁ Ἀρχιμήδης κατέκαυσεν ἐξ ἀποστάσεως τὸν ρωμαϊκὸν στόλον ποὺ ἀπέκλειεν ἀπὸ θαλάσσης τὰς Συρακούσας, καὶ ἐκκινῶν ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἕνα τοιοῦτον ἀποτέλεσμα ἦτο ἴσως δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ μέσῳ παραβολικῶν κατόπτρων, ἐξέθεσε τὰς ἐξοχωτέρας ἰδιότητας τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐκταθεὶς κατὰ προτίμησιν ἐπὶ τῶν μεθόδων χαράξεως αὐτῶν. Τὸ ἔργον τοῦτο ἐγράφη εἰς ἰταλικὴν γλῶσσαν τόσον ἀκριβῆ καὶ κομψήν, ὥστε δύναται ἄριστα νὰ λάβῃ θέσιν, μαζὺ μὲ τὰ Ἄ π α ν τ α τοῦ Γαλιλαίου, μεταξὺ τῶν γλωσσικῶν κειμένων τῆς λογοτεχνίας. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ μαρτυρεῖται ἡ βαθεῖα καὶ ἐκτεταμένη φιλολογικὴ κατάρτισις τοῦ συγγραφέως. Ἐνδιαφέρον ἔχει δι' ἡμᾶς νὰ σημειώσωμεν ὅτι μερικαὶ ἐκ τῶν πολυαρίθμων κατασκευῶν, τὰς ὁποίας ἐκθέτει ὁ Cavalieri, ὀφείλονται εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον. Ἀλλὰ τὰς παραμονὰς τῆς δημοσιεύσεως τοῦ ἔργου του, παρετήρησεν ὅτι μερικαὶ ἐξ αὐτῶν εἶχον ἤδη προταθῇ ἄνευ ἀποδείξεως καὶ ὑπὸ τοῦ Kepler, ὥστε δὲν παρέλειψε νὰ πληρώσῃ τὸ κενόν. Ἄλλαι κατασκευαὶ εἶχον ἤδη δοθῇ πρὸ αὐτοῦ ἀπὸ ἕνα ἐλβετόν, ὁ ὁποῖος εἶχε διδάξει εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova ἀπὸ 17ης Νοεμβρίου 1624 μέχρι τοῦ θανάτου του (23 Ἰουλίου 1629). Ἐννοοῦμεν τὸν Bartolomeo Souvery ἢ Sovero καὶ τὸ μετὰ θάνατον αὐτοῦ δημοσιευθὲν ἔργον Curvi ac recti proportio (Padova, 1630). Ἡ ἀνεξαρτησία τῶν ἐρευνῶν τοῦ Cavalieri ἀπὸ τὰς προηγουμένας προκύπτει ἐκ μαρτυριῶν προσώπων ποὺ ἐγνώριζον τὰς κατασκευὰς τοῦ Cavalieri ἀπὸ τοῦ 1629 ὡς καὶ ἐκ τῆς ἀμέμπτου ἐντιμότητος, μὲ τὴν ὁποίαν οὗτος ἀναφέρει τὰς ἐργασίας τοῦ Sovero. Ἔχει δὲ τοῦτο ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς ἀναίρεσιν μιᾶς μωρᾶς κατηγορίας περὶ δῆθεν λογοκλοπίας, διαπραχθείσης ὑπὸ τοῦ ἀμέμπτου Ἰησουάτου (§ 315).

314. Ἂν καὶ πολλοῦ λόγου ἄξια τὰ μέχρι τοῦδε ἀναφερθέντα ἔργα τοῦ Cavalieri, δὲν εἶναι εἰς αὐτὰ ποὺ ὀφείλει τὴν μεγάλην του φήμην. Αὐτὴ στηρίζεται κυρίως εἰς τὸ ἔργον του Γ ε ω μ ε τ ρ ί α τ ῶ ν ἀ δ ι α ι ρ έ τ ω ν (Geometria degli indivisibili), τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1635, εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως εἶναι καρπὸς ὑπερδεκαετοῦς ἐπεξεργασίας, ὅπως προκύπτει ἀπὸ μερικὰς ἐπιστολάς του πρὸς τὸν Γαλιλαῖον γραφείσας ἀπὸ τοῦ 1626 (ἦτο ἡ ἐποχὴ καθ' ἣν συνέλαβε τὴν φιλοδοξίαν νὰ διαδεχθῇ τὸν Magini). Ἡ μετὰ θάνατον ἔκδοσις τοῦ 1653, τὴν ὁποίαν ἔχομεν πρὸ ὀφθαλμῶν, ἀποτελεῖ τὴν ὁριστικὴν μορφὴν τῶν ἰδεῶν του ἐπὶ τοῦ θέματος. Διὰ νὰ σχηματίσῃ ὅμως κανεὶς ἀκριβεστέραν ἀντίληψιν περὶ αὐτῶν, εἶναι σκόπιμον ν' ἀνατρέξῃ εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον του Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ α ὶ Ἐ φ α ρ μ ο γ α ὶ (Exercitationes geometricae), τὸ ὁποῖον εἶδε τὸ φῶς τὸ αὐτὸ ἔτος τοῦ θανάτου του, διὰ νὰ μὴ ἀναφέρωμεν τὰς πολυαρίθμους ἐπιστολὰς ποὺ ἀντήλλαξε μὲ τὸν Γαλιλαῖον καὶ τὸν Τορικέλλη. Αἱ ἐπι-

στολαὶ αὐταὶ περιελήφθησαν εἰς τὰς πλέον προσφάτους ἐκδόσεις τῶν Ἀπάντων τῶν συγγραφέων τούτων. Ἡ κατάργησις τοῦ τάγματος τῶν Ἰησουατῶν (1650) εἶχεν ὡς συνέπειαν τὴν ἐξαφάνισιν ἄλλων στοιχείων τῆς ἀλληλογραφίας του, ὡς ἐπίσης καὶ ἄλλων σημαντικῆς ἀξίας χειρογράφων *.

Ἡ Γεωμετρία τῶν ἀδιαιρέτων θεωρεῖται, καὶ οὐχὶ ἀδίκως, ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ βαθύτερα καὶ σκοτεινότερα ἔργα τῆς μαθηματικῆς γραμματείας**. Πρὸς ἐξήγησιν τοῦ ἰδιάζοντος αὐτοῦ χαρακτῆρος μερικοὶ προέβαλον τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ συγγραφεύς, βασανιζόμενος συνεχῶς ἀπὸ ἀρθρίτιδα τῶν χειρῶν, ὑπέφερεν ἐνῷ ἐκράτει τὸν κονδυλοφόρον μεταξὺ τῶν δακτύλων καὶ διὰ τοῦτο ἔγραφεν ὅσον ἦτο δυνατὸν ὀλιγώτερα. Ἡ ὕπαρξις ὅμως τῶν ἄλλων ἔργων του καθιστᾷ ἀπαράδεκτον τοιαύτην οἰκτίρμονα ἐξήγησιν. Ἴσως ἡ ἐξήγησις νὰ δύναται ν' ἀναζητηθῇ εἰς τὴν δυσκολίαν, τὴν ὁποίαν συνήντα ὁ Cavalieri εἰς τὴν προσπάθειάν του νὰ δώσῃ συγκεκριμένην μορφὴν εἰς μερικὰς ὑψηλὰς ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι ἤστραπτον εἰς τὸ πνεῦμα του. Καὶ ἂν σκεφθῇ κανεὶς ὅτι εἰς τὰ ἔργα του ματαίως θ' ἀναζητήσῃ ἕνα ὁρισμὸν τῆς λέξεως «ἀδιαίρετον» δὲν θὰ δυσκολευθῇ νὰ παραδεχθῇ μίαν τοιαύτην ὑπόθεσιν ὡς εὐλογοφανῆ. Καὶ οὔτε εἶναι αὐτὴ ἡ μοναδικὴ ἔννοια, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφεὺς χωρὶς κανένα ὁρισμόν. Εἰς τὴν ἰδίαν μοῖραν ὑπάγονται καὶ φράσεις ὡς ἀκόλουθοι: «ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ σχήματος» (εἰς τὸ ἐπίπεδον) καὶ «ὅλα τὰ ἐπίπεδα τοῦ στερεοῦ» (εἰς τὸν χῶρον), μὲ τὰς ὁποίας δηλοῦται τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ποὺ λαμβάνονται διὰ τομῆς ἐπιπέδου σχήματος μὲ δέσμην παραλλήλων εὐθειῶν ἢ τὸ σύνολον τῶν σχημάτων, ποὺ γεννῶνται διὰ τομῆς στερεοῦ σχήματος μὲ δέσμην παραλλήλων ἐπιπέδων. Δὲν εἶναι ἄλλωστε μεστὸν σημασίας τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Cavalieri εἰς πλείστας περιπτώσεις ὑπαινίσσεται τὰς ἀμφιβολίας ποὺ θὰ ἐγεννῶντο εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ ἀναγνώστου, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ δύναται νὰ τὰς διαλύσῃ; Καὶ ἔπειτα πῶς ἦτο δυνατὸν νὰ σκεφθῇ κανεὶς ὅτι εἰς μίαν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἦσαν, περισσότερον ἀπὸ πηγαὶ ἐμπνεύσεως, ἀληθεῖς καὶ αὐθεντικοὶ ὁδηγοὶ τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης, θὰ ἐγένετο ἀποδεκτὴ ὡς συμβιβαστὴ μὲ τὴν γεωμετρικὴν αὐστηρότητα μία πρότασις ὡς ἡ ἀκόλουθος, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸν πυρῆνα πολλῶν στοχασμῶν τοῦ Cavalieri: «δύο ἐπίπεδα σχήματα (ἢ δύο στερεὰ) εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν των (ἢ τῶν ἐπιπέδων των) δοθείσης διευθύνσεως»; Ἦτο ἐπαρκὴς δικαιολογία διὰ τὴν

* Ἴσως νὰ λάβωμεν ἀκόμη μερικὰ χειρόγραφα, ἀναδιφῶντες εἰς τὴν βιβλιοθήκην ποὺ ἀνῆκεν εἰς τὸν μαθητήν του Stefano degli Angeli (§ 395).

** Προσφάτως ἀπεκαλύφθη εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ (Vacca) ἡ πρότασις, ἡ ὁποία εἰς τὰ ἐγχειρίδια τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ φέρει τὸ ὄνομα «πρῶτον θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς», ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφὴν (παραλληλία τῆς ἐφαπτομένης εἰς ἕνα σημεῖον ἑνὸς τόξου καμπύλης πρὸς τὴν ἀντίστοιχον χορδήν).

χρῆσιν μιᾶς μεθόδου, τόσον ἀφισταμένης ἀπὸ τὰς ἑλληνικὰς ἀντιλήψεις περὶ γεωμετρίας, ἡ ἀπόδειξις ὅτι διὰ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς καταλήγομεν εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα τῶν ἀρχαίων μεθόδων;

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἕνας μέγας διανοούμενος ὀλίγον μεταγενέστερος, ὁ B. Pascal, ἀφοῦ ἠσπάσθη ρητῶς τὰς ἰδέας τοῦ Cavalieri, διεπίστωσεν ὅτι ἂν μερικοὶ «νομίζουν ὅτι ἁμαρτάνουν κατὰ τῆς γεωμετρίας θεωροῦντες τὸ ἐπίπεδον ὡς ἐκφραζόμενον μὲ μίαν ἀπειρίαν εὐθειῶν γραμμῶν», αὐτὸ συμβαίνει «ἀπὸ ἔλλειψιν νοημοσύνης, καθ' ὅσον δὲν ἐννοοῦμεν μὲ αὐτὸ παρὰ ἄπειρον πλῆθος ὀρθογωνίων τοῦ αὐτοῦ πλάτους». Εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου ἀληθὲς ὅτι μίαν τοιαύτην δικαιολογίαν ματαίως θ' ἀναζητήσῃ ὁ ἀναγνώστης εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Cavalieri.

Τὸ ἔργον διαιρεῖται εἰς ἑπτὰ Βιβλία, τὸ πρῶτον τῶν ὁποίων πραγματεύεται περὶ ἀλληλοτομίας κώνων καὶ κυλίνδρων καὶ περιέχει ἐπὶ πλέον μερικὰς γενικὰς προτάσεις χρησίμους διὰ τὴν συνέχειαν. Παρόμοιαι ἀπαντῶνται ἐπίσης εἰς τὸ Βιβλίον II, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀφιερωμένον εἰς τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα. Περὶ κύκλων, ἐλλείψεων καὶ στερεῶν προκυπτόντων ἐκ περιστροφῆς τούτων πραγματεύεται τὸ Βιβλίον III. Περὶ τῶν ἄλλων κωνικῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχως παραγομένων στερεῶν πραγματεύονται τὰ Βιβλία IV καὶ V. Τὸ Βιβλίον VI πραγματεύεται τὴν ἀρχιμήδειον ἕλικα, ἐνῷ τὸ τελευταῖον περιλαμβάνει ἄλλας θεωρίας δυναμένας νὰ ὁδηγήσουν εἰς μερικὰ συμπεράσματα ἐκτεθέντα προηγουμένως. Μεταξὺ τούτων διακρίνεται ὁ τετραγωνισμὸς τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος, μέσῳ ἀντικαταστάσεως ὑπὸ καταλλήλως ἐκλεγομένης παραβολῆς· ἀποτέλεσμα βεβαίως οὐχὶ μεγάλης σημασίας, ἀφοῦ εἶχεν ἤδη φθάσει εἰς αὐτὸ δι' ἄλλης ὁδοῦ ὁ μέγας Συρακούσιος. Ὁ Cavalieri ὅμως προσθέτει ὅτι ἀκόμη καὶ ἕνα τόξον τῆς ἕλικος εἶναι ἴσον πρὸς ἕνα τόξον παραβολῆς, καὶ τοῦτο ἀποτελεῖ ἀξιοσημείωτον συμπλήρωσιν εἰς τὴν γνῶσιν τῆς καμπύλης, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ εὐθειοποίησις εἶναι τὸ μοναδικὸν μετρικὸν πρόβλημα τῆς ἕλικος ποὺ ὁ Συρακούσιος κατέλιπεν ἀνέπαφον. Θὰ ἴδωμεν ὅτι ἄλλοι ἔφθασαν, συγχρόνως περίπου, εἰς τὸ αὐτὸ σημαντικὸν συμπέρασμα, ἀλλὰ ἀπαντᾶται εἰς ἔργα δημοσιευθέντα βραδύτερον. Καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι ἂν ὁ Cavalieri εἶχε περὶ τούτου ἐνδείξεις δὲν θὰ ἐδίσταζε νὰ τὸ δηλώσῃ, ὅπως ἔκαμε πάντοτε εἰς ἀναλόγους περιπτώσεις. Διότι ὡς πρὸς τὴν ἄμεμπτον χρηστότητα τοῦ διασήμου Ἰησουάτου οὐδεὶς ἔχει δικαίωμα νὰ διατυπώσῃ τὴν παραμικρὰν ἀμφιβολίαν!*

* Σκόπιμον εἶναι νὰ σημειώσωμεν ὅτι τὸ προαναφερόμενον ἀποτέλεσμα εὑρίσκεται εἰς ἕνα μικρὸν χειρόγραφον ἔργον, ἀποσταλὲν ὑπὸ τοῦ Cavalieri πρὸς τὸν Γαλιλαῖον, ἀπὸ τοῦ 1629 καὶ τὸ ὁποῖον φυλάσσεται σήμερον εἰς τὴν Φλωρεντίαν καὶ εἰς τὴν διάσημον συλλογὴν τῶν «Μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου».

315. Ὅτι αἱ προαναφερθεῖσαι Ἐ φ α ρ μ ο γ α ὶ (Exercitaziones) ἀποτελοῦν φυσικὸν συμπλήρωμα τῆς Γ ε ω μ ε τ ρ ί α ς τ ῶ ν ἀ δ ι α ι ρ έ τ ω ν προκύπτει ἀπὸ τὴν ἁπλῆν ἐπισκόπησιν τῶν τίτλων τῶν ἓξ μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ἔργον: I καὶ II. Ἀναπτύξεις καὶ ἐπεξηγήσεις ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν ἀδιαιρέτων, III. Ἐπὶ τῶν κρίσεων τοῦ P. Guldin ὡς πρὸς τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων, IV. Χρῆσις τῶν ἀδιαιρέτων εἰς τὰς κοσικὰς (ἀλγεβρικὰς) δυνάμεις, V. Χρῆσις τῶν ἀδιαιρέτων εἰς τὰ μὴ ὁμογενῆ στερεά, VI. Ποικιλία προβλημάτων. Περιοριζόμεθα νὰ ἐπισημάνωμεν μερικὰ σημεῖα κατ᾽ ἐξοχὴν ἐνδιαφέροντα τοῦ σημαντικοῦ τούτου ἔργου.

Τὸ Μέρος III ἔχει χαρακτῆρα κατ᾽ ἐξοχὴν πολεμικόν, ἀποβλέπει δὲ εἰς τὴν ἀναίρεσιν μερικῶν φθονερῶν κρίσεων, αἱ ὁποῖαι διετυπώθησαν ἐναντίον του, ἀπὸ κάποιον Guldin. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Saint Gall τὴν 12 Ἰουνίου 1577 ἐκ γονέων διαμαρτυρομένων. Τὸ 1597 μετέστη εἰς τὸν καθολικισμὸν μεταβαλὼν καὶ τὸ ὄνομά του ἀπὸ Habakuk εἰς Paolo, εἰσῆλθε δὲ εἰς τὸ τάγμα τῶν Ἰησουϊτῶν, ὅπου καὶ παρέμεινε μέχρι τοῦ θανάτου του (3 Νοεμβρίου 1643). Ἐκ τῶν διαφόρων ἔργων του τὸ σημαντικώτερον φέρει τὸν τίτλον Κ ε ν τ ρ ο β α ρ ι κ ὰ ἢ π ε ρ ὶ κ έ ν τ ρ ο υ β ά ρ ο υ ς τ ρ ι ῶ ν ε ἰ δ ῶ ν σ υ ν ε χ ο ῦ ς π ο σ ό τ η τ ο ς (Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuai, Lib. I, Vienna 1635, Lib. II, Vienna 1641), ὅπου ἀναζητοῦνται τὰ κέντρα βάρους μερικῶν σχημάτων. Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο κατηγορεῖται ὁ Cavalieri, ὅτι ἰδιοποιήθη ἰδέας καὶ μεθόδους ἀνηκούσας εἰς τοὺς Kepler καὶ Sovero. Ὅτι βεβαίως ὁ Cavalieri ὑπέστη τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μεγάλου ἀστρονόμου εἶναι ἀναμφισβήτητον, βεβαιούμενον μάλιστα ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Cavalieri. Ἀλλὰ μιὰ ἁπλῆ σύγκρισις τῆς Γ ε ω μ ε τ ρ ί α ς του πρὸς τὴν Σ τ ε ρ ε ο μ ε τ ρ ί α ν τ ῶ ν β υ τ ί ω ν ἀρκεῖ διὰ ν᾽ ἀναμετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν, ἡ ὁποία χωρίζει τὰ δύο ἔργα. Εἶναι ἐξ ἄλλου βέβαιον ὅτι ἀπὸ τὸν μέτριον ἑλβετο-ἰταλὸν τίποτε τὸ οὐσιῶδες δὲν εἶχε νὰ γνωρίσῃ ὁ Cavalieri. Καὶ εἶναι περίεργον ὅτι μία κατηγορία περὶ λογοκλοπίας ἐξεπέμφθη ἀπὸ ἕνα τοιοῦτον ἄμβωνα, ἂν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ὁ ἴδιος Guldin (ὁ ὁποῖος, συμφώνως πρὸς ἰδίαν του ὁμολογίαν, ἐγνώριζε τὴν Σ υ ν α γ ω γ ὴ ν τοῦ Πάππου) δὲν ἐδίστασε νὰ παρουσιάσῃ ὡς ἰδικήν του ἀνακάλυψιν τὴν πρότασιν, τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸν ἕλληνα ὑπομνηματιστὴν (Τόμος I, § 59), καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν «ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ποὺ γεννῶνται ἐκ τῆς περιστροφῆς περὶ ἄξονα μιᾶς γραμμῆς ἢ ἐπιπέδου σχήματος ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς ἢ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸν δρόμον τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ ἀντίστοιχον κέντρον βάρους». Ἀμυνόμενος ὁ Cavalieri ἐκφράζει τὴν λύπην του, διότι εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἀναιρέσῃ καὶ νὰ ὑποβάλῃ εἰς κριτικὴν ἕνα ἀντίπαλον κατελθόντα ἐν τῷ μεταξὺ εἰς τὸν τάφον. Ἀλλὰ διὰ τὴν πρᾶξιν του αὐτὴν οὐδεὶς ἀσφαλῶς δύναται νὰ

τὸν κακίση. Ἀντιθέτως θὰ αἰσθανθῇ λύπην, διότι παρὰ τὴν κατάφωρον λογοκλοπίαν τοῦ Guldin ἐξακολουθεῖ ἀκόμη τὸ ὄνομά του νὰ δίδεται εἰς ἕνα θεώρημα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου οὐδὲν ἀπολύτως δικαίωμα κυριότητος ἔχει ὁ Ἰησουΐτης μαθηματικός.

316. Ἀκόμη σπουδαιότερον εἶναι τὸ Μέρος IV τοῦ ἔργου ποὺ ἐξετάζομεν. Ἐδῶ, πράγματι, ὁ Cavalieri ἐπέτυχε τὸν τετραγωνισμὸν ὅλων τῶν παραβολῶν, καὶ ἔφθασε δι' ἐπαγωγῆς εἰς ἕνα ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον σήμερον ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\text{ορ}_{n=\infty} \frac{1^r + 2^r + \ldots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}.$$

Εἰς τὴν σχετικὴν ἔρευναν ἤχθη, κατόπιν τῆς μελέτης τοῦ ἔργου τοῦ Kepler ἐπὶ τῆς μετρήσεως τοῦ ὄγκου τῶν βυτίων, εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ ὁποίου προτείνεται ἡ ἔρευνα τῶν «ἀτράκτων» σχήματος παραβολικοῦ ἢ ὑπερβολικοῦ. Ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ πραγματοποιήσῃ τὴν ἔρευναν αὐτὴν ἔφθασεν εἰς ἕνα ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον δὲν ἐδίστασε νὰ θεωρήσῃ καὶ ν' ἀποκαλέσῃ «θησαυρόν». Σκεπτόμενος εἰδικῶς ἐπὶ παραβολικῆς ἀτράκτου ἀνεγνώρισεν ὅτι ὁ κυβισμὸς τοῦ στερεοῦ ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν (χάριν συντομίας χρησιμοποιοῦμεν σημερινὸν συμβολισμὸν) $\int_0^a x^4 dx$. Τὸ ἀντίστοιχον ἀποτέλεσμα $a^5/5$, συνέκρινε πρὸς τὰ ἄλλα ἤδη γνωστά:

$$\int_0^a x dx = \frac{\alpha^2}{2}, \quad \int_0^a x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}$$

καὶ προσεπάθησε νὰ πληρώσῃ τὸ κενὸν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἐξαγομένων ἀποδεικνύων ὅτι εἶναι:

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{\alpha^4}{4}.$$

Τότε ἐθεώρησεν ὅτι εἶχε τὸ δικαίωμα νὰ γράψῃ τὸ προαναφερθὲν γενικὸν ἀποτέλεσμα, ἔστω καὶ ἂν δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ τὸ ἀποδείξῃ. Σημειώνει κατόπιν ὅτι τοιουτοτρόπως ὑπάρχει ἡ δυνατότης τετραγωνισμοῦ ὅλων τῶν παραβολῶν καὶ προχωρεῖ ὡς ἑξῆς: «Κατὰ τὴν ἐποχὴν — 1640 — ποὺ ἔκαμα αὐτὴν τὴν ἀνακάλυψιν ἐπέρασεν ἀπὸ ἐδῶ ὁ P. Niceron» (1613 - 1646) «διάσημος διὰ τὸ κομψὸν σύγγραμμά του La prospettiva curiosa — Ἡ περίεργος προοπτική—. Τοῦ ἀνεκοίνωσα τὴν ἀνακάλυψίν μου, αὐτὸς δέ, ἐπιστρέψας εἰς Παρισίους, εὐηρεστήθη νὰ καταστήσῃ αὐτὴν γνωστὴν καθὼς καὶ τὴν μέτρησιν τοῦ παραβολικοῦ ἀτρακτοειδοῦς εἰς τὸν διάσημον

Beaugrand» (§ 342 καὶ 351) «τὸν ὁποῖον εἶχον ἤδη γνωρίσει. Ὅσον ἀφορᾷ ἐμέ, ἀπορροφημένον ἀπὸ ἄλλας περιστάσεις, ἐστράφην πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις καὶ δὲν ἔδωσα συνέχειαν ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὰς σκέψεις μου. Ἀλλ' ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ λογιωτάτου Mersenne ἐπληροφορήθην ἀπροσδοκήτως τὸν θάνατον τοῦ Beaugrand, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἔλαβον ἐκ μέρους του τὴν λύσιν, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν ὁ ἴδιος εἰς τὰ προβλήματά μου κατὰ παρακίνησιν τοῦ Niceron. Ὁ θάνατος τοῦ ἐξόχου ἀνδρὸς μὲ κατέθλιψεν. Αἱ ἀποδείξεις τὰς ὁποίας μοῦ ἀπέστειλε μοῦ ἔδωσαν ἕνα μέτρον τῆς ἀξίας του. Καὶ ἐφ' ὅσον μὲ εἶχε προλάβει, ἡ σκέψις μου ἀπησχολεῖτο ἀκόμη ὀλιγώτερον ἐπὶ τοῦ θέματος. Πολὺ ἀργότερα ἐπανῆλθον διὰ νὰ παρατηρήσω ὅτι ἡ θεωρία ποὺ ἐκτίθεται εἰς τὸ Βιβλίον ΙΙ τῆς Γεωμετρίας τῶν ἀδιαιρέτων ἠδύνατο νὰ ἐπεκταθῇ εἰς ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς δυνάμεις» (ἐξυπακούεται ἀκεραίας καὶ θετικάς) «τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. Τεθεὶς ἐπὶ τὸ ἔργον προσεπάθησα νὰ παρουσιάσω τὰς ἀκολούθους προτάσεις μὲ τὴν καλυτέραν δυνατὴν τάξιν. Εἰς αὐτὰς ἔχω παρεμβάλει καὶ τὰς ἀνακαλύψεις τοῦ Beaugrand, ἵνα μὴ ἀπολεσθοῦν»*.

Καὶ ἄλλα σημεῖα ἀξιόλογα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον. Εἰς τὸ Μέρος V π.χ. ὁ Cavalieri ἐπιτυγχάνει πρῶτος μερικοὺς βαρυκεντρικοὺς προσδιορισμοὺς συνδεομένους μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ πυκνότης τῶν σχημάτων δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται κατὰ ὡρισμένον νόμον. Εἰς τὸ Μέρος VI τέλος ἀπαντᾶται τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ἑνὸς σημείου τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ προκύπτῃ ἐλάχιστον.

Μὲ αὐτὰ δὲν ἐξηντλήσαμεν βεβαίως τὸν κατάλογον τῶν συμβολῶν τοῦ Cavalieri εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν. Ἀλλὰ ὅσα εἴπομεν ἤδη γύρω ἀπὸ τὴν δρᾶσιν του πρὸς διάδοσιν τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων καὶ τελειοποίησιν τῆς τριγωνομετρίας, πρὸ πάντων δὲ τὴν σοβαράν του προσπάθειαν πρὸς τελειοποίησιν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων, ἀποτελοῦν ἐπαρκῆ τεκμήρια διὰ νὰ καταδειχθῇ πόσον στερεὰν βάσιν εἶχεν ὁ Γαλιλαῖος εἰς χεῖρας του διὰ τὸν νὰ ἀποκαλέσῃ «ἐφάμιλλον τοῦ Ἀρχιμήδους».

Evangelista Torricelli

317. Ὁ πρῶτος ποὺ ἠδυνήθη νὰ κατανοήσῃ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς νέα προβλήματα τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων εἶναι ὁ Evangelista Torricelli

* Τὸ σημαντικὸν τοῦτο Μέρος τοῦ ἔργου Exercitationes ἐσχολιάσθη καὶ ἀπεδόθη εἰς σύγχρονον γλῶσσαν ὑπὸ τοῦ P. Bosmans (Mathésis, t. XXXVI, 1922). Διὰ περισσοτέρας λεπτομερείας ἐπὶ τοῦ θέματος παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ ἄρθρον τοῦ ἰδίου, μὴ δυνάμενοι ἐδῶ νὰ ἐκταθῶμεν περισσότερον.

Beaugrand» (§ 342 καὶ 351) «τὸν ὁποῖον εἶχον ἤδη γνωρίσει. Ὅσον ἀφορᾷ ἐμέ, ἀπορροφημένον ἀπὸ ἄλλας περιστάσεις, ἐστράφην πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις καὶ δὲν ἔδωσα συνέχειαν ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὰς σκέψεις μου. Ἀλλ' ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ λογιωτάτου Mersenne ἐπληροφορήθην ἀπροσδοκήτως τὸν θάνατον τοῦ Beaugrand, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἔλαβον ἐκ μέρους του τὴν λύσιν, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν ὁ ἴδιος εἰς τὰ προβλήματά μου κατὰ παρακίνησιν τοῦ Niceron. Ὁ θάνατος τοῦ ἐξόχου ἀνδρὸς μὲ κατέθλιψεν. Αἱ ἀποδείξεις τὰς ὁποίας μοῦ ἀπέστειλε μοῦ ἔδωσαν ἕνα μέτρον τῆς ἀξίας του. Καὶ ἐφ' ὅσον μὲ εἶχε προλάβει, ἡ σκέψις μου ἀπησχολεῖτο ἀκόμη ὀλιγώτερον ἐπὶ τοῦ θέματος. Πολὺ ἀργότερα ἐπανῆλθον διὰ νὰ παρατηρήσω ὅτι ἡ θεωρία ποὺ ἐκτίθεται εἰς τὸ Βιβλίον II τῆς Γεωμετρίας τῶν ἀδιαιρέτων ἠδύνατο νὰ ἐπεκταθῇ εἰς ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς δυνάμεις» (ἐξυπακούεται ἀκεραίας καὶ θετικάς) «τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. Τεθεὶς ἐπὶ τὸ ἔργον προσεπάθησα νὰ παρουσιάσω τὰς ἀκολούθους προτάσεις μὲ τὴν καλυτέραν δυνατὴν τάξιν. Εἰς αὐτὰς ἔχω παρεμβάλει καὶ τὰς ἀνακαλύψεις τοῦ Beaugrand, ἵνα μὴ ἀπολεσθοῦν»*.

Καὶ ἄλλα σημεῖα ἀξιόλογα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον. Εἰς τὸ Μέρος V π.χ. ὁ Cavalieri ἐπιτυγχάνει πρῶτος μερικοὺς βαρυκεντρικοὺς προσδιορισμοὺς συνδεομένους μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ πυκνότης τῶν σχημάτων δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται κατὰ ὡρισμένον νόμον. Εἰς τὸ Μέρος VI τέλος ἀπαντᾶται τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ἑνὸς σημείου τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ προκύπτῃ ἐλάχιστον.

Μὲ αὐτὰ δὲν ἐξηντλήσαμεν βεβαίως τὸν κατάλογον τῶν συμβολῶν τοῦ Cavalieri εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν. Ἀλλὰ ὅσα εἴπομεν ἤδη γύρω ἀπὸ τὴν δρᾶσιν του πρὸς διάδοσιν τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων καὶ τελειοποίησιν τῆς τριγωνομετρίας, πρὸ πάντων δὲ τὴν σοβαράν του προσπάθειαν πρὸς τελειοποίησιν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων, ἀποτελοῦν ἐπαρκῆ τεκμήρια διὰ νὰ καταδειχθῇ πόσον στερεὰν βάσιν εἶχεν ὁ Γαλιλαῖος εἰς χεῖρας του διὰ τὸν νὰ ἀποκαλέσῃ «ἐφάμιλλον τοῦ Ἀρχιμήδους».

Evangelista Torricelli

317. Ὁ πρῶτος ποὺ ἠδυνήθη νὰ κατανοήσῃ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς νέα προβλήματα τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων εἶναι ὁ Evangelista Torricelli

* Τὸ σημαντικὸν τοῦτο Μέρος τοῦ ἔργου Exercitaziones ἐσχολιάσθη καὶ ἀπεδόθη εἰς σύγχρονον γλῶσσαν ὑπὸ τοῦ P. Bosmans (Mathésis, t. XXXVI, 1922). Διὰ περισσοτέρας λεπτομερείας ἐπὶ τοῦ θέματος παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ ἄρθρον τοῦ ἰδίου, μὴ δυνάμενοι ἐδῶ νὰ ἐκταθῶμεν περισσότερον.

(ἑλληνικὰ Τ ο ρ ι κ έ λ λ η ς). Ἐγεννήθη εἰς Modigliana τῆς Φαγεντίας (Faenza) τὴν 15ην Ὀκτωβρίου 1608. Ἡ οἰκογένειά του, μολονότι ταπεινῆς κοινωνικῆς τάξεως, ἀναγνωρίσασα ὅτι ἦτο προικισμένος μὲ ἀσυνήθη νοημοσύνην, ἠθέλησε νὰ τὸν μορφώσῃ κατὰ τὸν καλύτερον τρόπον ποὺ ἐπέτρεπεν ἡ ἐποχή των καὶ τὸν ἐνεπιστεύθησαν εἰς τὰς φροντίδας τοῦ πατρικοῦ θείου Ἀλεξάνδρου (καλύτερον γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Jacopo, ὅπερ ἔλαβεν ὅταν περιεβλήθη τὸ θρησκευτικὸν ἔνδυμα). Ὁ ἀφοσιωμένος καὶ σοφὸς ἐκεῖνος συγγενὴς ἀπησχολήθη μὲ τὴν ἀνθρωπιστικὴν μόρφωσιν τοῦ νέου, ἐνῷ τὴν ἐπιστημονικὴν αὐτοῦ διαπαιδαγώγησιν ἐνεπιστεύθη εἰς τοὺς Ἰησουΐτας. Αἱ ταχεῖαι πρόοδοι τοῦ νεαροῦ μαθητοῦ εἰς τοὺς φυσικομαθηματικοὺς κλάδους ὤθησαν τοὺς διδασκάλους του νὰ τὸν ἀποστείλουν (1627) εἰς τὴν Ρώμην, διὰ νὰ τελειοποιηθῇ ἐκεῖ ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν τοῦ Benedetto Castelli. Ἕνα ἔργον του Ἐ π ὶ τ ῆ ς κ ι ν ή σ ε ω ς τ ῶ ν φ υ σ ι κ ῶ ς π ι π τ ό ν τ ω ν σ ω μ ά τ ω ν ἀπέδειξεν ὅτι δὲν ἦσαν ἀβάσιμοι αἱ ἐλπίδες ποὺ ἀπετέθησαν εἰς τὸν νεαρὸν ἐπιστήμονα, ὁ δὲ Castelli, μεταβαίνων (Ἀπρίλιος 1641) ἀπὸ τὴν Ρώμην εἰς Βενετίαν μέσῳ Πίζης καὶ Φλωρεντίας(καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀπουσίας του εἶχεν ἐκλέξει τὸν Toricelli ὡς ἀντικαταστάτην του εἰς τὴν διδασκαλίαν) τὸ παρέλαβε μαζύ του διὰ νὰ τὸ παρουσιάσῃ εἰς τὸν Γαλιλαῖον, ὁ ὁποῖος τότε ἔσβηνε βραδέως εἰς τὸ Arcetri, καὶ ἐπρότεινεν εἰς τὸν ἀθάνατον στοχαστὴν νὰ δεχθῇ κοντά του τὸν νεαρὸν συγγραφέα διὰ νὰ τὸν βοηθῇ εἰς τὴν σύνταξιν τῶν μηχανικῶν ἐρευνῶν, μὲ τὰς ὁποίας τότε ἀπησχολεῖτο. Γενομένης ἀποδεκτῆς τῆς προτάσεως, ὁ Torricelli μετεκόμισεν εἰς τὴν Φλωρεντίαν μεταξὺ 10ης καὶ 15ης Ὀκτωβρίου 1641. Δὲν παρῆλθεν ὅμως οὔτε ἕνα τρίμηνον συμβιώσεως καὶ ὁ Γαλιλαῖος κατῆλθεν εἰς τὸν τάφον! Παραμείνας λοιπὸν χωρὶς ἀπασχόλησιν ὁ Torricelli, ἡτοιμάζετο νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς Ρώμην, ὅτε ὁ Μέγας Δοὺξ τῆς Τοσκάνης, κατ' εἰσήγησιν τοῦ συγκλητικοῦ Arrighetti, τὸν διώρισε μαθηματικὸν τῆς Αὐλῆς του εἰς τὴν κενωθεῖσαν διὰ τοῦ θανάτου τοῦ Γαλιλαίου θέσιν. Μὴ ἀρκούμενος δὲ εἰς τὴν ἐξασφάλισιν ἀξιοπρεποῦς διαβιώσεως εἰς τὸν νεαρὸν ἐπιστήμονα, ἀνέλαβεν εἰς βάρος του καὶ τὰ ἔξοδα τῆς δημοσιεύσεως τοῦ μοναδικοῦ τόμου ποὺ ἔδωσεν ὁ ἴδιος πρὸς ἐκτύπωσιν, συνεχῶς δὲ τὸν ἐνεθάρρυνε καὶ τὸν ἐνίσχυεν εἰς τὰς φυσικὰς καὶ μαθηματικὰς ἐρεύνας, τὰς ὁποίας διεξῆγεν ὁ ἐφευρέτης τοῦ βαρομέτρου. Ἡ εὔνοια τοῦ ἡγεμόνος καὶ ἡ συνεχῶς αὔξουσα γενικὴ ἐκτίμησις θὰ ἦσαν ἀρκετὰ νὰ ἐξασφαλίσουν τὴν εὐημερίαν εἰς τὸν ἄξιον ἐπιστήμονα, ἐὰν αἱ ἀνακαλύψεις τοῦ Torricelli δὲν προεκάλουν τὴν ἐμφάνισιν πλήθους δυσφημιστῶν, οἱ ὁποῖοι τὸν παρέσυρον εἰς λυπηρὰς πολεμικάς. Συνεπείᾳ τούτων ὑπενομεύθη ἡ ἀσθενική του ὑγεία τόσον, ὥστε νὰ μὴ δυνηθῇ ν' ἀντιστῇ εἰς τὴν προσβολὴν μιᾶς ὀξείας νόσου (ἐπρόκειτο κατὰ πᾶσαν πιθανότητα περὶ βαρυτάτης πνευμονίας), ἡ ὁποία τὸν ἔφερεν εἰς τὸν τάφον τὴν

25ην Ὀκτωβρίου 1647, δηλαδὴ προτοῦ συμπληρώσῃ τὸ 40όν ἔτος τῆς ἡλικίας του.

Κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ὑφέσεως τῆς ἀδυσωπήτου ἀσθενείας, ὁ Torricelli καθυπαγόρευσε (14 Ὀκτωβρίου 1647) τὰς τελευταίας του θελήσεις εἰς τὸν πιστὸν φίλον του συμβολαιογράφον Lodovico Serenai. Ἀπὸ τὴν διαθήκην αὐτὴν συνάγεται ἡ φλογερά του ἐπιθυμία, ὅπως δημοσιευθοῦν «ὅλα τὰ γραπτά του, αἱ μελέται καὶ ἔρευναί του ἐπὶ τῆς γεωμετρίας» τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ Bonaventura Cavalieri καὶ Michelangelo Ricci. Ἀλλ' ὁ θάνατος τοῦ πρώτου, ἐπελθών, ὅπως γνωρίζομεν, περίπου ἕνα μῆνα κατόπιν, καὶ ἡ ἄρνησις τοῦ δευτέρου (ἰσχυρισθέντος ὅτι εἶχε παραιτηθῆ πλέον τῶν μελετῶν), κατέστησαν πρὸς στιγμὴν ἀδύνατον τὴν ἐκπλήρωσιν τῆς θελήσεως τοῦ διαπρεποῦς ἐπιστήμονος. Δὲν θὰ κάμωμεν λόγον δι' ἄλλας ἀποτυχούσας προσπαθείας τοῦ Serenai νὰ ἐκπληρώσῃ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ φίλου του. Θὰ σημειώσωμεν μόνον ὅτι, κατόπιν πολλῶν ἀναβολῶν, τὸ ἔργον ἀνελήφθη ἀπὸ τὸν Vincenzo Viviani, ὁ ὁποῖος ἐν τούτοις, λόγῳ βαρέων ἀπασχολήσεων, δὲν ἠδυνήθη νὰ τὸ φέρῃ εἰς πέρας, πρᾶγμα ποὺ προεκάλεσεν εἰς βάρος του ὀξείας μομφάς. Ἀλλὰ πολὺ σοβαρώτερον ὑπῆρξε τὸ σφάλμα του ὅτι δὲν ἐφρόντισε διὰ τὴν ἀσφαλῆ φύλαξιν τῶν χειρογράφων, τῶν ὁποίων ἦτο ἐκεῖνος κάτοχος κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ θανάτου τοῦ Torricelli. Ὡς ἐκ τούτου, τὰ χειρόγραφα ὑπέστησαν διασκορπισμόν, ὁ ὁποῖος παρ' ὀλίγον νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἀνεπανόρθωτον ἀπώλειαν. Ἔπειτα ἀπὸ μίαν σειρὰν εὐτυχῶν περιστατικῶν ἡ ἀπώλεια ἀπεφεύχθη, εἰς τρόπον, ὥστε τὰ φύλλα ποὺ ἄφησεν ὁ διαπρεπὴς ἐπιστήμων τῆς Φαγεντίας, ὑπομνηματισθέντα ἀπὸ τὸν Viviani καὶ ἀντιγραφέντα ἐν μέρει ἀπὸ τὸν Serenai, εὑρίσκονται σήμερον καταχωρημένα εἰς τὴν φλωρεντινὴν συλλογὴν ποὺ εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸν τίτλον Μαθηταὶ τοῦ Γαλιλαίου*.

Παρὰ ταῦτα ἐχρειάσθη νὰ ἔλθῃ ἡ τρίτη ἑκατονταετηρὶς ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ μεγάλου ἐκείνου, διὰ νὰ γίνῃ κατορθωτὴ ἡ ἐπιθυμητὴ ἔκδοσις ὅλων τῶν ἔργων του**.

Τοιουτοτρόπως ἐτέθησαν εἰς τὴν διάθεσιν ὅλων τῶν διανοουμένων στοιχεῖα ἐπαρκῆ διὰ ν' ἀναγνωρίσουν, ὅτι ὁ «μαθηματικὸς» Torricelli δὲν ἦτο διόλου κατώτερος τοῦ παγκοσμίου φήμης «φυσικοῦ». Καθ' ὅσον τὰ χειρόγραφα ποὺ κατέλιπεν ἐξακολουθοῦν νὰ ἐξετάζωνται καὶ σχολιάζωνται, τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἐπαυξάνονται αἱ ἀποδείξεις ὅτι λίαν εὔστοχος

* Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐκδόσεως τῶν Ἔργων τοῦ Torricelli ἀπαντῶνται ἰδιαίτεραι λεπτομέρειαι ἐπὶ τῶν συνθηκῶν διασώσεως τῶν χειρογράφων καὶ ἐπὶ τῶν προσπαθειῶν δημοσιεύσεως τούτων.

** Μόνον μερικὰ Ἀκαδημαϊκὰ μαθήματα ἐξ ἐκείνων ποὺ ἐδίδαξεν εἰς Φλωρεντίαν ἐδημοσιεύθησαν ἐκεῖ τὸ 1715 καὶ χάρις εἰς τὴν ἐξέχουσαν λογοτεχνικὴν των ἀξίαν ἐπανεξεδόθησαν κατ' ἐπανάληψιν.

ὑπῆρξεν ὁ ἀκόλουθος ἀναγραμματισμὸς τοῦ ὀνόματός του, ὅπως ἐγένετο — μὲ κάποιαν προσέγγισιν — ἀπὸ κάποιον σύγχρονόν του: En virescit Galilaeus alter· δηλαδή: ἰδού· ἐγείρεται ἄλλος Γαλιλαῖος!

318. Πρῶτον δεῖγμα τῆς μαθηματικῆς του ἱκανότητος ἀποτελεῖ ὁ Τόμος ποὺ φέρει τὸν τίτλον Γεωμετρικὸν ἔργον (Opera geometrica, 1644). Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀποκαλύπτει, ὅτι πρῶτος ὁ συγγραφεύς του ἐπενόησε τὸν χρησιμώτατον ἐκεῖνον τρόπον χαράξεως τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας, τὸν στηριζόμενον εἰς τὴν σύνθεσιν δύο κινήσεων καὶ τὸν ὁποῖον εἴθισται ν' ἀποδίδουν εἰς τὸν Roberval, ἐνῷ ἡ ὑπὸ τούτου ἀπόδειξις ἐγένετο πολὺ ἀργότερα.

Ἐπὶ πλέον ὁ τετραγωνισμὸς τῆς παραβολῆς ἀποδεικνύεται ἐκεῖ κατὰ εἴκοσι τοὐλάχιστον τρόπους· ὅσα ἐξέθεσεν ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰ Βιβλία του Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου συμπληροῦνται κατὰ τρόπον ἀξιοσημείωτον ἐπὶ τῇ βάσει θεωρήσεως νέων σχημάτων, τὰ ὁποῖα ἀποκαλεῖ «σφαιρικὰ στερεά»· ἀποδεικνύεται τὸ πεπερασμένον τοῦ στερεοῦ τοῦ γεννωμένου ἐκ τῆς περιστροφῆς ἀπειρομήκους τόξου ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς περὶ μίαν τῶν ἀσυμπτώτων· τέλος δίδεται τετραγωνισμὸς τῆς κυκλοειδοῦς καὶ κυβισμὸς τοῦ κοχλιωτοῦ στερεοῦ τοῦ γεννωμένου ὑπὸ ὀρθογωνίου κατατομῆς (κοχλίας). Ὅλα αὐτὰ ἀποδεικνύουν μὲ πόσην ἄνεσιν καὶ ἀσφάλειαν ἐχειρίζετο ὁ συγγραφεὺς τὰς ἀρχαίας ἀπειροστικὰς μεθόδους, ἐφαρμόζων αὐτὰς τόσον εἰς γνωστὰ ὅσον καὶ εἰς νέα σχήματα.

Ἐκ τῶν ἀνεκδότων σελίδων ποὺ ἐκυκλοφόρησαν προσφάτως, σημαντικὸς ἀριθμὸς ἀναφέρεται εἰς θέματα ἀνήκοντα εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν. Πράγματι ἀπαντῶμεν ἐκεῖ μίαν ποικίλην ἀνθολογίαν μὲ τὸν παράξενον τίτλον Ἀγρὸς ἀμανιτῶν (Campo di tartufi), ὅπου διατυπώνονται θεωρήματα καὶ προβλήματα, συμπληροῦντα κατά τινα τρόπον τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Μία ἄλλη μικρὰ ἐργασία φέρει τὸν τίτλον Περὶ ἐπαφῶν (De tactionibus), ὅπου ἐξετάζονται προβλήματα διάφορα ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔλυσεν ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὸ ὁμώνυμον ἔργον του (Τόμος I, § 45), ἀλλὰ ἀναφερόμενα πάντοτε εἰς τὴν κατασκευὴν κύκλου ὑποκειμένου εἰς ἐπιτάγματα ἐπαφῶν. Τέλος τὸ Βιβλίον περὶ ἀναλογιῶν (De proportionibus liber), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὕλη τοῦ V Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου ἐκτίθεται κατὰ τρόπον διάφορον καὶ ἀνταποκρινόμενον καλύτερα εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῶν συγχρόνων σχολείων.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο βιβλίον κατέχει μάλιστα ἰδιαιτέραν ἱστορικὴν ἀξίαν, διότι περιέχει τὸ λεπτολογημένον σχέδιον μιᾶς πλήρους ἐκθέσεως (προωρισμένης νὰ φέρῃ τὸν τίτλον De lineis novis: περὶ νέων γραμμῶν) τῶν ἰδιοτήτων τῶν μέχρι τῆς ἐποχῆς του γνωστῶν καμπύλων, ἤτοι παραβολῆς, ὑπερβολῆς, ἑλίκων ἀνωτέρου βαθμοῦ καὶ κυκλοειδοῦς. Τὰ Ἀπαν-

τα ποὺ ἐδημοσιεύθησαν προσφάτως ἀποδεικνύουν, ὅτι ὁ Torricelli ἦτο ἤδη κάτοχος ὅλων τῶν στοιχείων ποὺ ἦσαν ἀπαραίτητα διὰ τὴν συγγραφὴν ἑνὸς τοιούτου ἔργου, ἀφοῦ εἶχεν ἤδη λύσει τὶς κυριωτέρας σχετικὰς δυσκολίας καὶ ἰδιαιτέρως τὰς ἀφορώσας τὸν τετραγωνισμὸν τῶν ἀνωτέρω καμπύλων. Ἂς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸ νὰ εἰσέλθωμεν εἰς μίαν λεπτομέρειαν σχετικὴν μὲ τὰς καμπύλας, αἱ ὁποῖαι γεννῶνται ἐκ τῆς παραστάσεως τῶν λογαρίθμων τόσον εἰς καρτεσιανὰς ὅσον καὶ εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

319. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν γεννᾶται ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν σήμερον «λογαριθμικὴν» καὶ τὴν ὁποίαν ὁ Torricelli, ἕνεκα κάποιας ὁμοιότητος μὲ τὴν ὑπερβολήν, ἐκάλεσε «λογαριθμικὴν ἡμι-υπερβολήν». Τῆς καμπύλης αὐτῆς εὗρε τὴν ἰδιότητα ὅτι ἔχει τὴν ὑφαπτομένην σταθεράν, προσδιώρισε δὲ καὶ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ περιστροφῆς τῆς καμπύλης περὶ τοὺς ἄξονας. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ὅσα συνέβησαν μερικὰς δεκαετίας ἀργότερα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἀξιοσημείωτα αὐτὰ συμπεράσματα περιῆλθον εἰς γνῶσιν τοῦ κοινοῦ μόλις τὸ 1690, ὅταν ὁ Huygens τὰ ἐδημοσίευσεν ἐν παραρτήματι εἰς τὸ βιβλίον του Π ε ρ ὶ τ ῆ ς α ἰ τ ί α ς τ ῆ ς β α ρ ύ τ η τ ο ς (De la cause de la pesanteur).

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ μέγας Ὀλλανδὸς δὲν παρουσιάζει τὰ συμπεράσματα αὐτὰ ὡς προϊὸν τοῦ πνεύματός του καὶ ὅτι περὶ τῶν ἐρευνῶν, τὰς ὁποίας διεξῆγεν ὁ Torricelli ἐπὶ τῆς ἡμι-υπερβολῆς εἶχε κάμει λόγον εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Cavalieri τὴν 15ην Αὐγούστου 1647 καὶ εἰς μίαν ἄλλην ἀπευθυνθεῖσαν μετὰ ἐννέα ἡμέρας εἰς τὸν Michelangelo Ricci. Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν σπουδαῖον ρόλον ποὺ ἔπαιζε τότε εἰς τοὺς κύκλους τῶν διανοουμένων ἡ ἐπιστημονικὴ ἀλληλογραφία, δὲν θὰ μᾶς φανῇ ἐστερημένη βάσεως ἡ ὑπόθεσις, ὅτι εἰς τὸν μακρυνὸν ἐκεῖνον συνάδελφον τοῦ Torricelli ἀπαντῶνται σημεῖα ἐπιδράσεως τοῦ τελευταίου.

Ἂν τώρα μεταβῶμεν εἰς πολικὰς συντεταγμένας διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τοὺς λογαρίθμους, θὰ λάβωμεν τὴν καμπύλην ποὺ ὀνομάζομεν σήμερον «λογαριθμικὴν ἕλικα», ἐνῷ ὁ Torricelli ἐκάλει «γεωμετρικὴν ἕλικα». Περὶ αὐτῆς γίνεται κατ' ἐπανάληψιν λόγος εἰς τὴν Τορρικελλιανὴν ἀλληλογραφίαν τῶν ἐτῶν 1645 καὶ 1647. Θὰ ἴδωμεν περαιτέρω ὅτι τὴν καμπύλην αὐτὴν εἶχεν ἐξετάσει καὶ ὁ Descartes, ἀλλ' ἐπειδὴ ἐκεῖνος ἐθεώρει τὴν ἐν λόγῳ καμπύλην ὡς πλαγιογώνιον τροχιὰν δέσμης ἀκτίνων, δὲν δύναται νὰ στηριχθῇ ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν ἀνεξαρτησίαν τῶν δύο θεωριῶν. Ἂς προστεθῇ ἀκόμη ὅτι ὁ Torricelli διδάσκων τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μήκους τόξου τῆς γεωμετρικῆς ἕλικος, ἔλυσε πρῶτος ἕνα πρόβλημα εὐθειοποιήσεως καὶ ἐπὶ πλέον παρετήρησεν ὅτι κάθε τόξον μετρούμενον ἀπὸ

τοῦ πόλου ἔχει μῆκος πεπερασμένον, ἐχειρίσθη δὲ περαιτέρω καὶ τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τομέως αὐτῆς.

Ἂν καὶ τ' ἀνωτέρω σημαντικὰ ἀποτελέσματα εἶδον τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος μετὰ τὴν δημοσίευσιν τῆς ἐκδόσεως τῶν Ἁπάντων τοῦ Torricelli, ἐν τούτοις ἦσαν γνωστὰ εἰς τὸ κοινὸν ἀπὸ τριῶν σχεδὸν αἰώνων, καὶ γίνεται σαφὴς μνεία τούτων εἰς μερικὰ φύλλα, ποὺ εἶχον ἀναμφιβόλως εὑρεῖαν διάδοσιν κατὰ τοὺς χρόνους ποὺ ὁ Torricelli εὑρίσκετο ἀκόμη ἐν ζωῇ. Τὰ φύλλα αὐτὰ φέρουν τὸν τίτλον: «Συλλογὴ μερικῶν προβλημάτων προταθέντων καὶ διαμειφθέντων μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν τῆς Γαλλίας καὶ τοῦ Torricelli». Ἀναφέρονται εἰς προβλήματα, ποὺ ἀνέκυψαν ἐκ τῆς ἐπαφῆς του μὲ γεωμέτρας τῶν Παρισίων, ὑπὸ τὴν προστασίαν τοῦ Niceron καὶ Mersenne, τοὺς ὁποίους ἐγνώρισεν ὁ ἴδιος ὅταν ἐταξείδευσαν εἰς Ἰταλίαν κατὰ τὰ ἔτη 1640 καὶ 1647.

Τὰ προβλήματα αὐτὰ εὑρίσκονται ἐν μέρει λελυμένα εἰς τὸ προαναφερθὲν Γεωμετρικὸν ἔργον (opera geometrica), ἐν μέρει εἰς φύλλα προωρισμένα ν' ἀποτελέσουν τὸ σχεδιαζόμενον ἔργον Περὶ νέων γραμμῶν (De lineis novis). Ἀλλ' ὑπάρχουν ἀκόμη καὶ ἄλλα ἀφορῶντα τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι εὔκολον νὰ διαβλέψωμεν τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Fermat, ὡς καὶ ἄλλα ἀκόμη, ἀναφερόμενα εἰς τὴν καθαρὰν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Μεταξὺ τούτων σημειοῦμεν τὴν βεβαίωσιν, ποὺ ἀποδίδεται συνήθως εἰς τὸν Fermat, ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $2^{2^n}+1$ εἶναι πρῶτοι (ἄλλωστε εἶναι σήμερον γνωστὸν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ πρότασις εἶναι ἐσφαλμένη, ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς $2^{32}+1$ εἶναι σύνθετος). Εἰς τὴν αὐτὴν Συλλογὴν εὑρίσκεται τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως ἑνὸς σημείου τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τριῶν ἄλλων σταθερῶν σημείων εἶναι ἐλάχιστον, μὲ τὸ ὁποῖον ἠσχολήθη καὶ ὁ B. Cavalieri (§ 316) (πιθανῶς ἔπειτα ἀπὸ τὸν Torricelli). Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπαντᾶται ἐπίσης μετ' ἄλλων εἰς τὸ μετὰ θάνατον δημοσιευθὲν ὑπόμνημά του De maximis et minimis, εἰς τρόπον, ὥστε δὲν εἶναι ἀδικαιολόγητοι αἱ ὀνομασίαι «σημεῖον τοῦ Torricelli» διὰ τὸ σημεῖον τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ «κύκλοι τοῦ Torricelli» διὰ τοὺς κύκλους ποὺ χρησιμεύουν εἰς τὸν προσδιορισμόν του. Δὲν παρασιωπῶμεν τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ὑπόμνημα λύεται, τῇ βοηθείᾳ μιᾶς διτετραγώνου παραβολῆς, τὸ πρόβλημα «vas quod aequabiliter exhauritur». Ἤτοι «δοχεῖον ὁμαλῶς ἐκκενούμενον», ποὺ ἐπρότεινεν ὁ M. Ricci.

320. Ἐνῷ εἰς τὸ Γεωμετρικὸν ἔργον του ὁ Torricelli ἀνέπτυξε θέματα, τὰ ὁποῖα εἶχε πραγματευθῇ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰ βιβλία Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, πολλαὶ σελίδες τιτλοφορούμεναι Περὶ ἀγγειομόρφων στερεῶν (De solidis vasiformis), δοθεῖσαι προσ-

φάτως εἰς τὴν δημοσιότητα, ἀποδεικνύουν πόσον ἐκτεταμέναι, βαθεῖαι καὶ καρποφόροι ὑπῆρξαν αἱ μελέται του γύρω ἀπὸ τὰ στερεὰ ποὺ ἐμελέτησεν ὁ μέγας Συρακούσιος εἰς τὸ ἄλλο του ἔργον Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων. Λυπηρὸν εἶναι ὅτι ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου ὁ Torricelli δὲν κατέλιπεν ἐργασίας ὁριστικάς, ἀλλὰ μόνον ἁπλᾶ σχέδια τούτων.

Δὲν δύναται ὅμως νὰ ἐπαναληφθῇ τοῦτο ἀναφορικῶς πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ κέντρου βάρους κυκλικοῦ τομέως, τὸ ὁποῖον ὁ Torricelli ἔλυσε κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι μὲ τὴν κλασσικὴν μέθοδον καὶ μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων. Τὸ ὑπόμνημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἀνωτέρω κέντρον βάρους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου διχοτόμου τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐκφραζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{2}{3}\,(\text{ἀκτίς})\cdot\frac{\text{χορδή}}{\text{τόξον}}\,.$$

συνετάχθη ὑπὸ τὴν ὁριστικήν του μορφὴν κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ θανάτου του. Ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του μὲ τὸν R. Magiotti καὶ B. Cavalieri ἀποκαλύπτεται, ὅτι ἤρχισε ν' ἀσχολῆται ἀπὸ τοῦ 1643 μὲ τὴν ἔρευναν αὐτήν, τῆς ὁποίας τὸ πέρας ἐπέπρωτο νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ πέρας τῆς ζωῆς του.

Ἡ δικαιοσύνη ἀπαιτεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἔρευνα εἶχεν ἤδη διεξαχθῆ ἐπιτυχῶς προηγουμένως εἰς ἕνα μικρὸν ἔργον Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis, ποὺ ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Ἀμβέρσαν τὸ 1632 καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Torricelli (Βλ. πράγματι ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Magiotti 14 Φεβρουαρίου 1643). Συγγραφεὺς τοῦ ὑπομνήματος τούτου εἶναι ὁ Giancarlo della Faille, ὁ ὁποῖος γεννηθεὶς εἰς τὴν πόλιν ἐκείνην τὴν 1ην Μαρτίου 1597, εἰσῆλθεν εἰς τὴν ἑταιρείαν τοῦ Ἰησοῦ καὶ ἀπεστάλη ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρους του εἰς τὴν Ἱσπανίαν τὴν 26ην Μαρτίου 1629, ἀνῆλθεν εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ διδασκάλου τοῦ προσωπικοῦ τῆς Αὐλῆς τοῦ Φιλίππου IV καὶ κατόπιν διωρίσθη εἰς τὴν ἀκολουθίαν τοῦ Δὸν Ζουὰν τῆς Αὐστρίας. Ἀπέθανε κατὰ τὴν πολιορκίαν τῆς Βαρκελώνης τὴν 14ην Νοεμβρίου 1652. Ἡ ἀπεραντολογία του ὅμως, τὴν ὁποίαν ψέγει ὁ Montucla, δὲν ἀποτελεῖ βεβαίως γνώρισμα τοῦ μεγάλου τέκνου τῆς Φαγεντίας.

Προτοῦ κλείσωμεν τὰς συντόμους αὐτὰς πληροφορίας ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ Torricelli, ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ ἑνὸς ἀπανθίσματος Περὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀδιαιρέτων ἐσφαλμένως ἐφαρμοζομένης (De indivisibilium doctrina perperam usurpata), τὸ ὁποῖον περισυνέλεξεν ὁ Viviani ἐκ σημειώσεων τοῦ Torricelli. Μολονότι τὸ ἐν λόγῳ ἀπάνθισμα δὲν περιέχει κάτι τὸ νέον καὶ σημαντικόν, ἀπὸ ἱστορικῆς ἀπόψεως θεωρεῖται σημαντικώτατον, διότι ἀποτελεῖ ἀδιαφιλονίκητον τεκμήριον τῶν ἀμφιβο-

λιῶν καὶ ἀβεβαιοτήτων ποὺ ἐβασάνιζον τοὺς μαθηματικοὺς εἰς μίαν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν μεγάλας κατέβαλλον προσπαθείας νὰ ὑποτάξουν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν λύσιν τῶν ὑψηλοτέρων προβλημάτων τῆς γεωμετρίας.

Vincenzo Viviani

321. Ἡ δόξα ὅτι ἐβοήθησε καὶ ἐνεκαρδίωσε τὸν Γαλιλαῖον κατὰ τὴν τελευταίαν καὶ δυστυχεστέραν περίοδον τῆς ζωῆς του ἀνήκει, ἀκόμη περισσότερον τοῦ Torricelli, εἰς τὸν Vincenzo Viviani, ὁ ὁποῖος μέχρι τέλους τῆς μακρᾶς ζωῆς του ἐκοσμεῖτο μὲ τὸ ἐπίθετον «τελευταῖος μαθητὴς» τοῦ μεγάλου διδασκάλου καὶ ὁ ὁποῖος, μετὰ τὸν θάνατον ἐκείνου, ἔγραψε μίαν Ἱστορικὴν ἀφήγησιν (Racconto storico) τῆς σταδιοδρομίας τοῦ διδασκάλου καὶ εἰργάσθη μὲ ἀσθμαίνοντα ζῆλον εἰς τὸ νὰ ἴδῃ τὸ φῶς μία πλήρης ἔκδοσις τῶν ἔργων του. Καὶ εἶναι ἀληθὲς ὅτι καίτοι δὲν ἐπέτυχε τοῦτο, ἐξ ὑπαιτιότητος τῆς ἀδιαλλάκτου ἀντιθέσεως τῆς Ἐκκλησίας, κατέστησε πάντως δυνατὴν τὴν πραγμάτωσιν τοῦ σκοποῦ, εἰς καλυτέρους καιρούς.

Ἐγεννήθη εἰς Φλωρεντίαν τὴν 5ην Μαΐου 1622 ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν ὑπὸ ἔποψιν πλούτου καὶ εὐγενείας. Αἱ μαθητικαί του ἐπιτυχίαι ἐπέσυραν τὴν προσοχὴν τοῦ Φερδινάνδου II, τοῦ Μεγάλου Δουκὸς τῆς Τοσκάνης, κατὰ σύστασιν τοῦ ὁποίου, ὁ νεαρὸς Viviani, τὸ φθινόπωρον τοῦ 1639, ἐγκατεστάθη εἰς τὸ Arcetri, ὡς γραμματεὺς τοῦ Μεγάλου διωκομένου. Ἡ ὑπόληψις, τῆς ὁποίας ἔχαιρε πάντοτε εἰς τὴν Αὐλήν, ὑπῆρξεν ἀφορμὴ νὰ τοῦ δοθοῦν πολλὰ ἀξιώματα τιμητικὰ μέν, ἀλλὰ τόσον βαρέα, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ διαθέτῃ συνεχῶς χρόνον καὶ προσοχὴν εἰς τὰς προσφιλεῖς του μελέτας. Ὡς ἐκ τούτου οἱ καρποὶ τῶν μελετῶν του εἶδον τὸ φῶς ἀργότερα, κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος, ὅταν δηλαδὴ τὰ μαθηματικὰ πνεύματα ἐστρέφοντο πρὸς ἐρεύνας πολὺ διαφόρους ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ὑπῆρχον πάντοτε εἰς τὴν καρδίαν τοῦ ὀψίμου τούτου ἐπιγόνου τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων γεωμετρῶν.

Διὰ τοῦτο, προκειμένου ν' ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸν Viviani, δὲν περιπίπτομεν εἰς τὸν ἀναχρονισμόν, τὸν ὁποῖον θὰ μᾶς κατελόγιζεν ἴσως ὁ ἀναγνώστης ὁ περιορίζων τὸ ἐνδιαφέρον του μόνον εἰς τὴν περίοδον καθ' ἣν ἐδημοσιεύθησαν τὰ ἔργα τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος συγγραφέως.

Μολονότι ὁ Viviani, θεωρούμενος ὡς σύγχρονος τῶν κορυφαίων, εἰς τοὺς ὁποίους στηρίζεται ἡ δόξα τοῦ αἰῶνος XVII, παρουσιάζεται ἐνώπιόν μας ὡς ἕνα φαινόμενον ἐν ὑστερήσει φάσεως, ἐν τούτοις, ἴσως χάρις εἰς τὴν πασίγνωστον προστασίαν τῆς ὁποίας ἀπελάμβανεν ὑπὸ τῆς Κυβερνήσεως τῆς Τοσκάνης, ἐπέτυχε τὰς ὑψηλοτέρας τιμητικὰς διακρίσεις τῆς ἐποχῆς του. Οὕτω τὸ 1696 ἔγινεν ἑταῖρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λον-

λιῶν καὶ ἀβεβαιοτήτων ποὺ ἐβασάνιζον τοὺς μαθηματικοὺς εἰς μίαν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν μεγάλας κατέβαλλον προσπαθείας νὰ ὑποτάξουν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν λύσιν τῶν ὑψηλοτέρων προβλημάτων τῆς γεωμετρίας.

Vincenzo Viviani

321. Ἡ δόξα ὅτι ἐβοήθησε καὶ ἐνεκαρδίωσε τὸν Γαλιλαῖον κατὰ τὴν τελευταίαν καὶ δυστυχεστέραν περίοδον τῆς ζωῆς του ἀνήκει, ἀκόμη περισσότερον τοῦ Torricelli, εἰς τὸν Vincenzo Viviani, ὁ ὁποῖος μέχρι τέλους τῆς μακρᾶς ζωῆς του ἐκοσμεῖτο μὲ τὸ ἐπίθετον «τελευταῖος μαθητὴς» τοῦ μεγάλου διδασκάλου καὶ ὁ ὁποῖος, μετὰ τὸν θάνατον ἐκείνου, ἔγραψε μίαν Ἱστορικὴν ἀφήγησιν (Racconto storico) τῆς σταδιοδρομίας τοῦ διδασκάλου καὶ εἰργάσθη μὲ ἀσθμαίνοντα ζῆλον εἰς τὸ νὰ ἴδῃ τὸ φῶς μία πλήρης ἔκδοσις τῶν ἔργων του. Καὶ εἶναι ἀληθὲς ὅτι καίτοι δὲν ἐπέτυχε τοῦτο, ἐξ ὑπαιτιότητος τῆς ἀδιαλλάκτου ἀντιθέσεως τῆς Ἐκκλησίας, κατέστησε πάντως δυνατὴν τὴν πραγμάτωσιν τοῦ σκοποῦ, εἰς καλυτέρους καιρούς.

Ἐγεννήθη εἰς Φλωρεντίαν τὴν 5ην Μαΐου 1622 ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν ὑπὸ ἔποψιν πλούτου καὶ εὐγενείας. Αἱ μαθητικαί του ἐπιτυχίαι ἐπέσυραν τὴν προσοχὴν τοῦ Φερδινάνδου II, τοῦ Μεγάλου Δουκὸς τῆς Τοσκάνης, κατὰ σύστασιν τοῦ ὁποίου, ὁ νεαρὸς Viviani, τὸ φθινόπωρον τοῦ 1639, ἐγκατεστάθη εἰς τὸ Arcetri, ὡς γραμματεὺς τοῦ Μεγάλου διωκομένου. Ἡ ὑπόληψις, τῆς ὁποίας ἔχαιρε πάντοτε εἰς τὴν Αὐλήν, ὑπῆρξεν ἀφορμὴ νὰ τοῦ δοθοῦν πολλὰ ἀξιώματα τιμητικὰ μέν, ἀλλὰ τόσον βαρέα, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ διαθέτῃ συνεχῶς χρόνον καὶ προσοχὴν εἰς τὰς προσφιλεῖς του μελέτας. Ὡς ἐκ τούτου οἱ καρποὶ τῶν μελετῶν του εἶδον τὸ φῶς ἀργότερα, κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος, ὅταν δηλαδὴ τὰ μαθηματικὰ πνεύματα ἐστρέφοντο πρὸς ἐρεύνας πολὺ διαφόρους ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ὑπῆρχον πάντοτε εἰς τὴν καρδίαν τοῦ ὀψίμου τούτου ἐπιγόνου τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων γεωμετρῶν.

Διὰ τοῦτο, προκειμένου ν' ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸν Viviani, δὲν περιπίπτομεν εἰς τὸν ἀναχρονισμόν, τὸν ὁποῖον θὰ μᾶς κατελόγιζεν ἴσως ὁ ἀναγνώστης ὁ περιορίζων τὸ ἐνδιαφέρον του μόνον εἰς τὴν περίοδον καθ' ἣν ἐδημοσιεύθησαν τὰ ἔργα τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος συγγραφέως.

Μολονότι ὁ Viviani, θεωρούμενος ὡς σύγχρονος τῶν κορυφαίων, εἰς τοὺς ὁποίους στηρίζεται ἡ δόξα τοῦ αἰῶνος XVII, παρουσιάζεται ἐνώπιόν μας ὡς ἕνα φαινόμενον ἐν ὑστερήσει φάσεως, ἐν τούτοις, ἴσως χάρις εἰς τὴν πασίγνωστον προστασίαν τῆς ὁποίας ἀπελάμβανεν ὑπὸ τῆς Κυβερνήσεως τῆς Τοσκάνης, ἐπέτυχε τὰς ὑψηλοτέρας τιμητικὰς διακρίσεις τῆς ἐποχῆς του. Οὕτω τὸ 1696 ἔγινεν ἑταῖρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λον-

δίνου, καὶ μετὰ τριετίαν ἐξελέγη ὡς ἕνας ἐκ τῶν ὀκτὼ ξένων ἑταίρων τῆς ἀνανεωθείσης Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων. Ἀπέθανεν εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν τὴν 22αν Σεπτεμβρίου 1703.

322. Τὸ πρῶτον ἔργον ποὺ ἐδόθη ἀπὸ τὸν ἴδιον εἰς τὴν δημοσιότητα ἀναφέρεται εἰς τὸν Ἀπολλώνιον. Τοῦ μεγάλου ἔργου περὶ κωνικῶν τομῶν, ποὺ ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ ἐκ Πέργης γεωμέτρου, εἶχον ἀνακαλυφθῆ καὶ δοθῆ εἰς τὴν δημοσιότητα διὰ τοῦ τύπου τὰ πρῶτα τέσσαρα Βιβλία, ὁ δὲ Μαυρόλυκος (§ 257) εἶχεν ἐπιδοθῆ εἰς τὴν διὰ φαντασίας ἀναπαραγωγὴν τοῦ ὑπολοίπου. Τῆς προσπαθείας ὅμως ἐκείνης κριθείσης μετρίως ἱκανοποιητικῆς, ὁ Viviani ἐσκέφθη ν' ἀποδυθῇ εἰς νέαν προσπάθειαν ἐνῷ ἀκόμη ἦτο εἰκοσαετὴς (1640 - 1642), ἀλλὰ περισπασθεὶς ὑπὸ ἄλλων φροντίδων πλέον τῆς δεκαπενταετίας ἔπαυσεν ἀσχολούμενος μὲ τὸ θέμα. Συνέβη ὅμως κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ Ἰουνίου 1658 νὰ διέλθῃ ἐκ Φλωρεντίας ἕνας καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Πίζης, γεωμέτρης περὶ τοῦ ὁποίου θ' ἀσχοληθῶμεν κατωτέρω (§ 326), ὁ G.A. Borelli, καὶ νὰ ἐξετάσῃ τοὺς ἀνατολικοὺς κώδικας τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ μεγάλου δουκάτου. Τὴν προσοχήν του ἀμέσως ἐφείλκυσεν ἕνας φάκελλος ἐγγράφων, φέρων εἰς Ἰταλικὴν γλῶσσαν τὴν ἐπιγραφὴν «Ὀκτὼ Βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου». Ὁ Borelli, ἂν καὶ ἀγνοῶν τὴν Ἀραβικήν, παρατηρῶν τὰ ἐν τῷ κειμένῳ σχήματα καὶ ἀναγνωρίζων τὴν ταυτότητα τούτων πρὸς ἐκεῖνα τῶν βιβλίων τοῦ Περγαίου ποὺ εἶχον ἐκτυπωθῆ, ἐδοκίμασεν «ἄφατον ἀγαλλίασιν» καὶ ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ του νὰ καταστήσῃ εἰς τὸν κόσμον γνωστὰ τὰ τελευταῖα τέσσαρα, ἐζήτησε καὶ ἐπέτυχε τὴν ἔγκρισιν τοῦ Μεγάλου Δουκὸς νὰ παραλάβῃ μαζύ του εἰς τὴν Ρώμην τὸν κώδικα ἐκεῖνον, ἐλπίζων νὰ εὕρῃ μεταξὺ τῶν Ἀνατολιστῶν τοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Προπαγάνδας ἀξιόπιστα πρόσωπα δυνάμενα ν' ἀναλάβουν τὸ ἔργον τῆς μεταφράσεως. Ἠρωτήθησαν μάλιστα σχετικῶς καὶ μερικοὶ Μαρωνῖται διερχόμενοι τυχαίως τότε ἐκ Φλωρεντίας καὶ οὕτω ἐδόθη ἀφορμὴ νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι ἐκ τοῦ κώδικος ἐκείνου ἔλειπε τὸ τελευταῖον Βιβλίον. Εἰς τὴν Ρώμην ὁ Borelli εὗρε τὸν Ἀβραὰμ ἀπὸ τὸ Echel τῆς Συρίας, πρόσωπον κατάλληλον καὶ πρόθυμον νὰ μεταφράσῃ τὸ ἀραβικὸν κείμενον, καὶ οὕτω τὴν 29ην Ἰουνίου 1658 ἦτο εἰς θέσιν νὰ γράψῃ εἰς τὸν Viviani, ὅτι ἡ μετάφρασις ἐπροχώρει ἀπὸ συμφώνου μὲ τὴν συνεργασίαν τοῦ ἀνατολιστοῦ καὶ τοῦ μαθηματικοῦ. Τότε ὁ Viviani, ἐπιθυμῶν εὐλόγως νὰ κατοχυρωθῇ κατὰ τρόπον ἀναντίρρητον ἡ πρωτοτυπία τῆς ἐργασίας του διὰ τὴν ἀπὸ φαντασίας ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου, ἐπέτυχεν ἀπὸ τὸν Πρίγκιπα Λεοπόλδον τὴν εὔνοιαν νὰ ἐξετάσῃ τὴν παλαιάν του ἐργασίαν καὶ νὰ ἐπικυρώσῃ τὰ φύλλα δι' ἐναποθέσεως τῆς ὑπογραφῆς του (8 Ἰουλίου 1658). Ὁ Borelli ἐπέστρεψεν εἰς Φλωρεντίαν περὶ τὸ τέλος τοῦ ἰδίου ἔτους μὲ τὴν μετάφρασιν πλήρη καὶ ἔλαβεν ἐκ μέρους τοῦ Μεγάλου Δουκὸς

τὴν διαταγὴν νὰ μὴ ἀφίσῃ τίποτε νὰ διαρρεύσῃ πρὸ τῆς διὰ τοῦ τύπου δημοσιεύσεως τῆς ἐργασίας τοῦ Viviani. Ἡ τελευταία πράγματι ἐδημοσιεύθη τοὺς πρώτους μῆνας τοῦ 1659, ἐνῷ ἡ μετάφρασις τοῦ Borelli φέρει ἔτος ἐκδόσεως 1661*.

Ἐξασφαλισθείσης τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δύο ἐργασιῶν, ἠγέρθη φυσικὰ τὸ ζήτημα κατὰ ποῖον μέτρον ὁ Viviani ἐπέτυχε ν' ἀποδώσῃ τὴν σκέψιν τοῦ ἀρχαίου γεωμέτρου. Ἡ σύγκρισις λοιπὸν τῶν δύο τούτων ἐργασιῶν ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ νέον ἔργον περιέχει περισσότερα καὶ ὀλιγώτερα τοῦ ἀρχαίου. Περισσότερα ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τοῦ ἐρευνηθέντος πεδίου, ὀλιγώτερα δὲ ὡς πρὸς τὸ βάθος τῶν ἐρευνῶν. Περισσότερα, διότι ἀφοῦ ἐργασθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἐξέρχεται κατόπιν εἰς τὸν χῶρον· ὀλιγώτερα, διότι ἀκροθιγῶς μόνον ἅπτεται τῶν προβλημάτων τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς κωνικάς, τὰ ὁποῖα ὅμως ὁ Ἕλλην γεωμέτρης πραγματεύεται καθ' ὅλον τὸ βάθος, εἰς δόξαν του ἀδιαφιλονίκητον καὶ ἀΐδιον.

323. Ἄλλο τεκμήριον τῆς μεγάλης οἰκειότητος τοῦ Viviani πρὸς τὴν ἀρχαίαν γεωμετρίαν ἀποτελεῖ ἕνα πολὺ ἀξιόλογον σχόλιόν του εἰς ἕνα διάλογον τοῦ Γαλιλαίου ἐπὶ τῶν ὁρισμῶν τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τὸν τίτλον Τὸ Πέμπτον Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου ἑρμηνευόμενον κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ Γαλιλαίου. Ἐν παραρτήματι εὑρίσκονται μερικαὶ σελίδες φέρουσαι τὸν τίτλον Γεωμετρικὸς περίπατος (Diporto geometrico), εἰς τὰς ὁποίας λύονται μὲ τὴν ἐξονυχιστικὴν αὐστηρότητα τῶν ἀρχαίων πολλὰ ἄλλα προβλήματα, σχετικὰ μὲ κατασκευὰς τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἐπροτάθησαν εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τῆς Ἰταλίας καὶ τῆς Γερμανίας ἀπὸ ἕνα γεωμέτρην τῆς Leiden, κρυπτόμενον «ὑπὸ τὴν τράπεζαν». Τὰ προβλήματα αὐτὰ ἦσαν τόσον ἁπλᾶ, ὥστε ὁ Viviani δὲν εἶχε καμμίαν πρόθεσιν νὰ τὰ παρουσιάσῃ εἰς ἰδιαίτερον δημοσίευμα**. Ἐὰν προέβη εἰς τὸ βῆμα τοῦτο, τὸ ἔκαμε διὰ νὰ εὐχαριστήσῃ τὸν Πρίγκηπα Λεοπόλδον τῶν Μεδίκων, τοῦ ὁποίου τὴν προσοχὴν εἶχον ἑφελκύσει τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, λόγῳ τῶν ὀξυτάτων κριτικῶν ποὺ ἐστράφησαν ἐναντίον τοῦ Alessandro Marchetti (1632 - 1714) — καθηγητοῦ εἰς Πίζαν καὶ γνω-

* Ἐν παραρτήματι ἀπαντᾶται ἡ πρώτη ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ μετάφρασις τῶν Λημμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους (Τόμος Ι, § 44).

** Τὸ ἐνδιαφέρον ποὺ παρουσιάζουν τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα προέρχεται μόνον ἀπὸ τὰ πρόσωπα ποὺ ἠσχολήθησαν μὲ αὐτά, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται καὶ αὐτὸς ὁ Leibniz. Εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ προβλήματα ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον γνωστῆς οὔσης τῆς διαφορᾶς τῶν ἐπὶ τὴν βάσιν προβολῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ ἐπὶ πλέον μία τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Ἐκεῖνο ποὺ μεταβάλλεται ἀπὸ τὴν μίαν εἰς τὴν ἄλλην ἐκ τῶν 12 ἀπαριθμουμένων περιπτώσεων εἶναι τὸ τρίτον δεδομένον, ὅπερ ἐκφράζεται ὑπὸ μιᾶς συναρτήσεως τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

στοῦ ὡς μεταφραστοῦ τοῦ Λουκρητίου — ὁ ὁποῖος εἶχε δώσει λύσεις εἰς ἕξ μόνον ἐξ αὐτῶν καὶ μὲ μικρὰν ἐπιτυχίαν. Εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ ὁ Viviani προσέθεσεν ἐξ ἰδίων ἄλλα εἰκοσιτέσσαρα, τῶν ὁποίων ἡ ἀναλογία πρὸς ἄλλα δημοσιευθέντα εἰς τὴν Ἐφημερίδα τῶν Λογίων (Journal des Sçavants) ἀπὸ τὸν ἐκκλησιαστικὸν Comiers τοῦ ἔδωσεν ἀφορμὴν νὰ ἐπανέλθῃ ἐπὶ τοῦ θέματος μὲ ἕνα ἄλλο εἰδικὸν δημοσίευμα.

Αἱ τελευταῖαι σελίδες τοῦ «Πέμπτου Βιβλίου...» ἀφοροῦν τὰ προβλήματα τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου. Τὸ πρῶτον λύεται μέσῳ τῆς κυλινδρικῆς ἕλικος, τῆς κυκλοειδοῦς ἢ μιᾶς ἡμιτονοειδοῦς λαμβανομένης εἰς τὸ ἀνάπτυγμα κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τεμνομένης λοξῶς ὑπὸ ἐπιπέδου. Τὸ δεύτερον, μέσῳ κωνικῶν καὶ μέσῳ τῆς καμπύλης $xy^2 = a$ (σταθερόν), ἡ ὁποία ὠνομάσθη, διὰ τὸν λόγον τοῦτον, μεσολαβικὴ ὑπερβολὴ (Σ.τ.Μ.: ἀπὸ τὸν μεσόλαβον τοῦ Ἐρατοσθένους, Τόμος I, § 51). Ὁ Viviani προσθέτει ὅτι πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν ὁ πατὴρ Villapaudo ἔκαμε χρῆσιν μιᾶς ἄλλης καμπύλης, ἡ ὁποία ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ ἰδίου δευτερεύουσα ἀναλογία, καὶ ἡ ὁποία εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3.$$

Εἰς τὸν Viviani ὀφείλεται ἐπίσης μία μετάφρασις εἰς τὴν Ἰταλικὴν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν θὰ εἴπωμεν ἐκ μέρους μας τίποτε περὶ αὐτῆς, διότι ἡ μεγάλη ἀξία της πιστοποιεῖται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι, ὅταν τὸ 1867 οἱ E. Betti καὶ F. Brioschi, διὰ ν' ἀνυψώσουν τὸ ἐπίπεδον τῶν γεωμετρικῶν σπουδῶν εἰς τὴν Ἰταλίαν, ἀπεφάσισαν ὁμοφώνως τὴν ἐπιστροφὴν τῆς ἐκπαιδεύσεως εἰς τὸν κορυφαῖον ἀλεξανδρινὸν γεωμέτρην, δὲν εὗρον τίποτε καλύτερον νὰ κάμουν ἀπὸ τοῦ ν' ἀνατυπώσουν τὴν μετάφρασιν ποὺ εἶχε κάμει ὁ «τελευταῖος μαθητὴς τοῦ Γαλιλαίου».

Εἰς τὸν ἴδιον χρεωστοῦμεν ἀκόμη τὴν ἰταλικὴν μετάφρασιν τοῦ μεγαλυτέρου μέρους τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία ὅμως παραμένει ἀκόμη ἀνέκδοτος. Καὶ ἀσφαλῶς εἰς αὐτὴν θὰ προστρέξουν ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι θ' ἀποφασίσουν κάποτε νὰ μεταφέρουν εἰς τὰ ἰταλικὰ ὅλα τὰ ἔργα τοῦ διασήμου Ἕλληνος μαθηματικοῦ.

Ἀκολουθῶν τὸ παράδειγμα ἄλλων συγχρόνων του, ὁ Viviani ἐπρότεινεν ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὸ ὄνομα «φλωρεντινὸν αἴνιγμα» ἔλαβεν εὐρεῖαν διασημότητα ἀφοῦ ἠσχολήθησαν μὲ αὐτὸ οἱ μεγαλύτεροι μαθηματικοὶ τοῦ τέλους τοῦ XVII αἰῶνος. Ἐπρόκειτο νὰ διατρηθῇ ἕνας σφαιρικὸς θόλος (ἢ «οὐρανός», ὅπως ἐλέγετο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην) διὰ τεσσάρων ἀνοιγμάτων ἴσων μεταξύ των καὶ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀπομένουσα ἐπιφάνεια νὰ εἶναι τετραγωνίσιμος. Ὁ Viviani ἐδημοσίευσε τὴν λύσιν εἰς ἕνα εἰδικὸν

ἔργον, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἐνθουσιαστικὸν ἀντίκτυπον ὄχι μόνον μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν καλλιτεχνῶν, οἱ ὁποῖοι ἔμαθον ἐξ αὐτοῦ νέας ἀξιολόγους μορφάς, δυναμένας νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς τὰ ὑπερῷα.

324. Ἡ εὐμενὴς ὑποδοχὴ τῆς ὁποίας ἔτυχεν ἡ ἀνακατασκευὴ τοῦ Βιβλίου V τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἐνεθάρρυνε τὸν Viviani νὰ κλείσῃ τὴν συγγραφικήν του δραστηριότητα μὲ μίαν ὁμοίαν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀρισταίου τοῦ Πρεσβυτέρου (Τόμος I, § 32) περὶ κωνικῶν τομῶν, ὑπὸ τὸν τίτλον Στερεοὶ Τόποι, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἤδη ἀρχίσει ἐπιχειρῶν ἀπὸ ἡλικίας μόλις εἰκοσιτεσσάρων ἐτῶν.

Δὲν εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ βεβαιώσωμεν σήμερον κατὰ πόσον τὸ ἔργον αὐτὸ (Divinatio Aristaei) πληροῖ τὸ κενὸν ποὺ ἄφησεν ἡ ἀπώλεια τοῦ ἑλληνικοῦ ἔργου· διότι, ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν, τίποτε δὲν ἐγγυᾶται ὅτι τὰ ὑπὸ τοῦ Viviani ἐκτιθέμενα ἀνταποκρίνονται πράγματι εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τῆς ἐξελίξεώς της· καί, ὡς πρὸς τὴν μορφήν, τίποτε δὲν ἐγγυᾶται ὅτι ἡ ἀνυπέρβλητος καὶ ἄψογος τελειότης τῆς μορφῆς, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ὁ Viviani κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν ἑλληνικῶν ἔργων τῆς χρυσῆς περιόδου, εἶχεν ἤδη ὀργανωθῆ καὶ τηρηθῆ ἀπὸ μαθηματικὸν ζήσαντα ἕνα περίπου αἰῶνα πρὸ τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἀλλ' ἐὰν κρίνωμεν ἀπὸ τὸν σκοπόν, τὸν ὁποῖον προέταξεν ὁ Viviani καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ὄγκον τοῦ ἔργου, ὡς πρωτοτύπου ἐμπνεύσεως ἀποβλεπούσης εἰς τελειοτέραν γνῶσιν τῶν ἐνδόξων καμπύλων, εἴμεθα ἠναγκασμένοι ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἦτο προικισμένος μὲ πολύτιμον ἐφευρετικὸν δαιμόνιον. Καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ νὰ προκαλῇ λύπην τὸ γεγονός, ὅτι μὲ τὸ νὰ δαπανήσῃ τὸν χρόνον καὶ τὸ γεωμετρικόν του δαιμόνιον εἰς τὴν ἀνακατασκευὴν ἑνὸς οἰκοδομήματος, τοῦ ὁποίου δὲν ἐσώζετο πλέον παρὰ μία δρὰξ τέφρας, ἐστέρησε τὴν ἐπιστήμην ἀπὸ νέους καρποὺς τῆς διανοίας του.

Τοῦτο δικαιολογεῖ τὴν εὐχήν, τὴν ὁποίαν διατυπώνομεν ἐν κατακλεῖδι, ὅπως μελετηθοῦν ἐπισταμένως τὰ πολυάριθμα χειρόγραφά του, διὰ ν' ἀντλήσωμεν ἐκ τῶν ἀνεκδότων πᾶν ὅ,τι ὑπάρχει νέον καὶ ἀξιόλογον, χωρὶς νὰ παραμεληθῇ ἐκ παραλλήλου μία ἀκριβολογημένη διονύχισις τῆς ἐκτεταμένης ἐπιστημονικῆς ἀλληλογραφίας, τὴν ὁποίαν διετήρει ὁ Viviani μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους μαθηματικοὺς τῆς ἐποχῆς του.

M. A. Ricci - G. A. Borelli

325. Κατὰ τὴν ἐπισκόπησιν τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τῶν ἐξοχωτέρων μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου, μᾶς συνέβη ν' ἀναφέρωμεν δύο μαθηματικούς, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ δὲν ἐπωφελήθησαν τῆς διδασκαλίας τοῦ μεγάλου ἐκείνου διδασκάλου, ἔζησαν πιστοὶ εἰς τὴν γαλιλαϊκὴν τροχιάν, καὶ διὰ τοῦτο

ἔργον, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἐνθουσιαστικὸν ἀντίκτυπον ὄχι μόνον μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν καλλιτεχνῶν, οἱ ὁποῖοι ἔμαθον ἐξ αὐτοῦ νέας ἀξιολόγους μορφάς, δυναμένας νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς τὰ ὑπερῷα.

324. Ἡ εὐμενὴς ὑποδοχὴ τῆς ὁποίας ἔτυχεν ἡ ἀνακατασκευὴ τοῦ Βιβλίου V τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἐνεθάρρυνε τὸν Viviani νὰ κλείσῃ τὴν συγγραφικήν του δραστηριότητα μὲ μίαν ὁμοίαν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀρισταίου τοῦ Πρεσβυτέρου (Τόμος I, § 32) περὶ κωνικῶν τομῶν, ὑπὸ τὸν τίτλον Στερεοὶ Τόποι, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἤδη ἀρχίσει ἐπιχειρῶν ἀπὸ ἡλικίας μόλις εἰκοσιτεσσάρων ἐτῶν.

Δὲν εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ βεβαιώσωμεν σήμερον κατὰ πόσον τὸ ἔργον αὐτὸ (Divinatio Aristaei) πληροῖ τὸ κενὸν ποὺ ἄφησεν ἡ ἀπώλεια τοῦ ἑλληνικοῦ ἔργου· διότι, ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν, τίποτε δὲν ἐγγυᾶται ὅτι τὰ ὑπὸ τοῦ Viviani ἐκτιθέμενα ἀνταποκρίνονται πράγματι εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τῆς ἐξελίξεώς της· καί, ὡς πρὸς τὴν μορφήν, τίποτε δὲν ἐγγυᾶται ὅτι ἡ ἀνυπέρβλητος καὶ ἄψογος τελειότης τῆς μορφῆς, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ὁ Viviani κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν ἑλληνικῶν ἔργων τῆς χρυσῆς περιόδου, εἶχεν ἤδη ὀργανωθῆ καὶ τηρηθῆ ἀπὸ μαθηματικὸν ζήσαντα ἕνα περίπου αἰῶνα πρὸ τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἀλλ' ἐὰν κρίνωμεν ἀπὸ τὸν σκοπόν, τὸν ὁποῖον προέταξεν ὁ Viviani καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ὄγκον τοῦ ἔργου, ὡς πρωτοτύπου ἐμπνεύσεως ἀποβλεπούσης εἰς τελειοτέραν γνῶσιν τῶν ἐνδόξων καμπύλων, εἴμεθα ἠναγκασμένοι ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἦτο προικισμένος μὲ πολύτιμον ἐφευρετικὸν δαιμόνιον. Καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ νὰ προκαλῇ λύπην τὸ γεγονός, ὅτι μὲ τὸ νὰ δαπανήσῃ τὸν χρόνον καὶ τὸ γεωμετρικόν του δαιμόνιον εἰς τὴν ἀνακατασκευὴν ἑνὸς οἰκοδομήματος, τοῦ ὁποίου δὲν ἐσώζετο πλέον παρὰ μία δρὰξ τέφρας, ἐστέρησε τὴν ἐπιστήμην ἀπὸ νέους καρποὺς τῆς διανοίας του.

Τοῦτο δικαιολογεῖ τὴν εὐχήν, τὴν ὁποίαν διατυπώνομεν ἐν κατακλεῖδι, ὅπως μελετηθοῦν ἐπισταμένως τὰ πολυάριθμα χειρόγραφά του, διὰ ν' ἀντλήσωμεν ἐκ τῶν ἀνεκδότων πᾶν ὅ,τι ὑπάρχει νέον καὶ ἀξιόλογον, χωρὶς νὰ παραμεληθῇ ἐκ παραλλήλου μία ἀκριβολογημένη διονύχισις τῆς ἐκτεταμένης ἐπιστημονικῆς ἀλληλογραφίας, τὴν ὁποίαν διετήρει ὁ Viviani μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους μαθηματικοὺς τῆς ἐποχῆς του.

M. A. Ricci - G. A. Borelli

325. Κατὰ τὴν ἐπισκόπησιν τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τῶν ἐξοχωτέρων μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου, μᾶς συνέβη ν' ἀναφέρωμεν δύο μαθηματικούς, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ δὲν ἐπωφελήθησαν τῆς διδασκαλίας τοῦ μεγάλου ἐκείνου διδασκάλου, ἔζησαν πιστοὶ εἰς τὴν γαλιλαϊκὴν τροχιάν, καὶ διὰ τοῦτο

ἀξίζουν ἰδιαιτέρας μνείας μέσα εἰς τὰ πλαίσια ποὺ προσπαθοῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦτο. Ἕνας εἶναι ὁ Ricci, συνδεόμενος μὲ τὸν Torricelli· ὁ ἄλλος εἶναι ὁ Borelli, συνδεόμενος μὲ τὸν Viviani.

Ὁ Michelangelo Ricci ἐγεννήθη εἰς τὴν Ρώμην τὴν 30ὴν Ἰανουαρίου 1619. Ἐκεῖ συνῆψε φιλίαν μὲ τὸν ἐξέχοντα μαθηματικὸν τῆς Φαγεντίας, ὅταν καὶ οἱ δύο ἐσπούδαζον ὑπὸ τὴν σοφὴν καθοδήγησιν τοῦ B. Castelli. Αἱ ἐπιστολαί, τὰς ὁποίας ἀντήλλαξαν ἀπὸ τὸ 1643 μέχρι τοῦ μηνὸς τοῦ προηγηθέντος τοῦ θανάτου τοῦ Torricelli, θὰ ἠδύναντο νὰ ὁδηγήσουν εἰς τὴν ἰδέαν ὅτι τὸ αἴσθημα ἐκεῖνο δὲν ἐξησθένησεν ἡ γεωγραφικὴ ἀπόστασις. Ἀλλ' ἡ ἀποφασιστικὴ ἄρνησις, τὴν ὁποίαν προέβαλεν ὁ Ricci εἰς τὴν παράκλησιν ν' ἀναλάβῃ τὴν ἐπιμέλειαν τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Torricelli, δίδει λαβὴν νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι εἰς τὰς σχέσεις του μὲ τὸν τελευταῖον ἡ καρδία δὲν εἶχε καμμίαν θέσιν. Ἡ προβληθεῖσα δικαιολογία τῆς ἀρνήσεώς του, ὅτι δηλαδὴ εἶχε δῆθεν παραιτηθῆ τῶν ἐπιστημονικῶν ἀπασχολήσεων, φαίνεται διαψευδομένη ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ 1666 ὁ Ricci ἐδημοσίευσεν ἕνα ἀξιόλογον ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Γεωμετρικὴ ἄσκησις (Exercitatio geometrica) ὅπου διὰ καθαρῶς γεωμετρικῶν μεθόδων ἐρευνῶνται μέγιστα καὶ ἐλάχιστα καὶ προσδιορίζονται ἐφαπτόμεναι διαφόρων καμπύλων. Ἡ δημοσίευσις ἐξ ἄλλου τῶν Ἀπάντων τοῦ Torricelli ἀποδεικνύει ὅτι οὗτος εἰς τὴν λύσιν ἀρκετῶν προβλημάτων εἶχε προηγηθῆ τοῦ παλαιοῦ συμμαθητοῦ του. Ἀλλ' ὅταν τὸ ἔργον ἐκεῖνο εἶδε τὸ φῶς, ἐκρίθη τόσον ἀξιόλογον, ὥστε ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία τοῦ Λονδίνου τὸ ἀνετύπωσεν ἐν παραρτήματι εἰς τὴν Λογαριθμοτεχνίαν τοῦ N. Mercator (Λονδῖνον, 1688). Ἂς σημειωθῆ ὅτι ὡς ἀξιόλογον συμπλήρωμα εἰς τὰ ἐκεῖ ἐκτιθέμενα ἀπαντᾶται μία ἐπιστολὴ τοῦ Huygens ὑπὸ χρονολογίαν 6 Μαΐου 1674, ὅπου καθίσταται γνωστὴ μία κομψὴ μετρικὴ ἰδιότης, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει ὁλόκληρον κλάσιν καμπύλων γενικωτέρων τῆς συνήθους κυκλοειδοῦς.

Ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν γραφεῖσαν τὸ 1665 ὑπὸ τοῦ Ricci καὶ ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Λεοπόλδον τῆς Τοσκάνης, δημοσιευθεῖσαν δὲ ὑπὸ τοῦ Tiraboschi εἰς τὸ ἔργον του Ἱστορία τῆς Ἰταλικῆς λογοτεχνίας, προκύπτει ὅτι ὁ Ricci, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς ἄλλους τοὺς ἀνήκοντας εἰς τὴν γαλιλαϊκὴν τράπεζαν, ἦτο τόσον οἰκεῖος μὲ τὸν χειρισμὸν τῆς ἀλγέβρας, ὥστε ἠδυνήθη εἰς βραχύτατον χρόνον νὰ λύσῃ ἕνα πρόβλημα, ποὺ τοῦ ἐπροτάθη ὡς πρόκλησις ἐκ μέρους μερικῶν ξένων μαθηματικῶν κατὰ μίαν ἐπίσκεψίν των εἰς τὴν Ἰταλίαν. Τὸ δεδομένον αὐτὸ φαίνεται ὅτι εὑρίσκει ἐπιβεβαίωσιν εἰς ἕνα χειρόγραφον τεῦχος τιτλοφορούμενον Ἄλγεβρα τοῦ Michel Angelo Ricci, τοῦ μετέπειτα καρδιναλίου, τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν διασπορὰν τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Boncompagni, κατέληξεν εἰς χεῖρας τοῦ συγγραφέως τῆς παρούσης Ἱστο-

ρίας. Τὸ τεῦχος αὐτὸ περιέχει τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς, μὲ χρῆσιν τῶν συμβολισμῶν τοῦ Viète, καὶ μὲ ἐφαρμογὰς ἐπὶ προβλημάτων ληφθέντων ἀπὸ τὸ μοναδικὸν κατονομαζόμενον ἔργον τοῦ M. Ghetaldi, De resolutione et compositione mathematica [11].

Τὴν 1ην Σεπτεμβρίου 1681 ὁ Ricci ἀνῆλθεν εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ Καρδιναλίου καὶ ἀπέθανε τὴν 12ην Μαΐου τοῦ ἑπομένου ἔτους.

326. Ὁ Giovanni Alfonso Borelli ἐγεννήθη εἰς τὴν Νεάπολιν* τὴν 28ην Ἰανουαρίου 1608 ἀπὸ ἕνα ἰσπανὸν στρατιώτην, τὸν Michele Alonzo, καὶ τὴν Laura Perello. Εἰς τὴν κολυμβήθραν τοῦ ἐδόθησαν τὰ ὀνόματα Giovanni καὶ Francesco, τὸ δεύτερον ὅμως μετεβλήθη εἰς Alfonso, ποὺ δὲν εἶναι παρὰ ἰταλικὴ ἀπόδοσις τοῦ ἰσπανικοῦ ἐπιθέτου τοῦ πατρός του εἰς τὴν θέσιν τοῦ ὁποίου ἐτοποθέτησε τὸ ὄνομα τῆς μητρός του, διορθωθὲν κατόπιν εἰς Borelli. Ἠκολούθησε τὸν πατέρα του εἰς τὴν Ρώμην καὶ ἐγένετο ἐκεῖ μαθητὴς τοῦ Castelli καὶ συμμαθητὴς τοῦ Torricelli. Ἐδίδαξε μαθηματικὰ εἰς τὴν Messina τὰ ἔτη 1635 - 1636. Κατόπιν ἦλθεν εἰς Πίζαν, κατόπιν συστάσεων τοῦ Γαλιλαίου καὶ τοῦ Castelli. Ἡ ἐκτίμησις τὴν ὁποίαν ἔτρεφε πρὸς αὐτὸν ἡ κυβέρνησις τῆς Τοσκάνης ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ ἐπεισόδιον, τὸ σχετικὸν μὲ τὸ ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω (§ 322). Ὑποχρεωθεὶς διὰ λόγους, ὡς φαίνεται, ὑγείας νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν Τοσκάνην, ἐπέστρεψεν εἰς Messina, ὅπου διέμεινε ἀπὸ τοῦ 1667 μέχρι τοῦ 1672. Πολιτικαὶ περιπέτειαι τὸν ἠνάγκασαν νὰ ἐγκαταλείψῃ καὶ αὐτὴν τὴν πόλιν καὶ νὰ καταφύγῃ εἰς τὴν Ρώμην, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 31ην Δεκεμβρίου 1679, φιλοξενούμενος τῶν πατέρων Scolopi. Ἐκ τῶν πολλῶν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα κατέλιπεν, ἕνα μέρος μόνον διέφυγε τὴν καταστροφήν.

Ἄνθρωπος μὲ ζωηρὸν πνεῦμα ὁ Borelli συνέλαβε τὴν ἰδέαν, ὅτι θὰ ἠδύνατο ν' ἀποκαλύψῃ τοὺς νόμους ποὺ διέπουν τὴν μηχανικὴν τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος καὶ μὲ τοιαύτην ἐπιτυχίαν ἐπραγματεύθη τὸ ἐπιβλητικὸν αὐτὸ ζήτημα, ὥστε τὸ μετὰ τὸν θάνατόν του δημοσιευθὲν ἔργον του De motu animalium ἀναφέρεται ἀκόμη σήμερον καὶ θεωρεῖται κλασσικὸν εἰς τὸ εἶδος του. Δι' ἡμᾶς ὅμως εἶναι μεγαλυτέρου ἐνδιαφέροντος τὸ ἔργον του Euclides restitutus (Ὁ Εὐκλείδης ἀποκατεστημένος), τὸ ὁποῖον ἐκρίθη εἰς τὴν ἐποχήν του λίαν εὐνοϊκῶς, ὅπως ἄλλως τε συνάγεται ἀπὸ τὰς πολυαρίθμους ἐκδόσεις, τῶν ὁποίων ἔτυχε τόσον εἰς τὴν πρωτότυπον λατινικὴν γλῶσσαν ὅσον καὶ εἰς τὴν ἰταλικήν. Ἡ κρίσις δὲ αὕτη δύναται χωρὶς δισταγμὸν νὰ ἐπικυρωθῇ καὶ σήμερον· διότι ἡ νέα θεωρία τῶν ἀναλογιῶν

---

* Μερικοὶ ἠθέλησαν τὴν Messina ὡς γενέθλιον πόλιν τοῦ Borelli· ἀλλὰ τὰ προσαγόμενα ἐπιχειρήματα εἰς ὑποστήριξιν τῶν ἰσχυρισμοῦ τούτου δὲν φαινονται πειστικά.

ποὺ ἐκτίθεται ἐκεῖ παρουσιάζεται ὡς ἕνα πλῆρες ὀργανικὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον προσφέρει ἐκπληκτικὴν ἀναλογίαν πρὸς τὴν σύγχρονον θεωρίαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· οὕτως, ὥστε μεταξὺ τῶν πολλῶν ποὺ ἐπεχείρησαν, διαρκοῦντος τοῦ XVII αἰῶνος, νὰ ἐκσυγχρονίσουν τὴν ὕλην τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων, ὁ Borelli κατέχει ἐξέχουσαν θέσιν.

Ἐπὶ πλέον, ὅσον ἀφορᾷ τὴν θεωρίαν τῶν παραλλήλων, ὑπέδειξε μίαν τροποποίησιν τοῦ εὐκλειδείου ὑποδείγματος πολὺ ὁμοιάζουσαν πρὸς ἐκείνην ποὺ εἰσηγήθη ὁ Κλάβιος καὶ κατόπιν ὁ Patrici καὶ ὁ Cataldi, ἀφοῦ ἐπρότεινε τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ περιφήμου αἰτήματος μὲ τὴν ἀκόλουθον πρότασιν : Ἂν μία εὐθεῖα (πεπερασμένη) κινεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ μίαν ἄλλην, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἕνα ἄκρον τῆς πρώτης, τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς θὰ γράψῃ μίαν δευτέραν εὐθεῖαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIII

ΑΙ ΠΑΡΑΜΟΝΑΙ ΤΗΣ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

A. Girard

327. Κατὰ τὴν περίοδον, ποὺ προηγεῖται ἀμέσως τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Descartes εἰς τὸ προσκήνιον τοῦ ἐπιστημονικοῦ κόσμου, ἀπαντᾶται εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀλγέβρας — διὰ νὰ μὴ ὁμιλήσωμεν περὶ ἐκείνων ποὺ ἐβάδισαν πιστῶς ἐπὶ τὰ ἴχνη τοῦ Viète * — μία ὁμὰς μαθηματικῶν ἀναμφισβητήτου ἀξίας, τῶν ὁποίων ἡ γνωριμία εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ ἐκτιμήσῃ μὲ ἥρεμον δικαιοσύνην τὴν οὐσίαν τῆς συμβολῆς τοῦ συγγραφέως τοῦ Λόγου περὶ μεθόδου (Discours de la méthode) εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἀλγέβρας. Ἀκριβῶς εἰς τὴν μελέτην τοῦ σημαντικοῦ ἔργου τῶν μαθηματικῶν τούτων, οἱ ὁποῖοι προπαρεσκεύασαν ἀποτελεσματικῶς τὴν ἐκδήλωσιν ἑνὸς μεγάλου γεγονότος, ἀφιεροῦται τὸ Κεφάλαιον τοῦτο τῆς Ἱστορίας μας.

Πρῶτος ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ Albert Girard, τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἤδη ἀπαντήσει ὑπὸ τὴν ἰδιότητα ἐκδότου καὶ σχολιαστοῦ τοῦ Stévin (§ 247). Ὁ Girard ἐγεννήθη εἰς τὸ St. Mihiel τῆς Λωρραίνης, ἔζησεν εἰς τὴν Ὀλλανδίαν ἀπὸ τοῦ 1525, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὸ 1633. Τὸ ἔργον του (μέτριον εἰς ὄγκον, ἀλλὰ κατάμεστον πρωτοτύπων ἰδεῶν) φέρει τὸν τίτλον Νέα ἐφεύρεσις εἰς τὴν ἄλγεβραν (Invention nouvelle en l'algèbre) καὶ παρουσιάζει συγκεντρωμένας καὶ ταξινομημένας τὰς ἰδίας του ἀνακαλύψεις, εἰς τὰς ὁποίας κατέληξεν ἐνῷ ἠσχολεῖτο μὲ τὴν διάρθρωσιν καὶ τὸν σχολιασμὸν ἔργων ἀνηκόντων εἰς ἄλλους. Κατὰ δήλωσιν τοῦ ἰδίου, τὸ ἔργον του περιλαμβάνει τρία μέρη μὴ διακεκριμένα τυπογραφικῶς, ἀλλ' ἀνταποκρινόμενα εἰς τὴν ὕλην ποὺ περιέχεται εἰς τὸ βιβλίον.

* Μεταξὺ τούτων ἰδιαιτέρας μνείας ἄξιος εἶναι ὁ Carlo Renaldini, χάρις εἰς τὴν ὀγκώδη καὶ ποικίλην δημιουργίαν του. Ἐγεννήθη εἰς Ancona τὴν 30ὴν Δεκεμβρίου 1615, ὑπηρέτησεν ὡς μηχανικὸς τοὺς πάπας Οὐρβανὸν VIII καὶ Ἰννοκέντιον X, κατόπιν δὲ (1649) κατέλαβε μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Πίζης, τὴν ὁποίαν βραδύτερον ἐγκατέλειψε χάριν μιᾶς ἄλλης εἰς Padova. Ἀποσυρθείς, λόγῳ ἡλικίας, τὸ 1698 εἰς τὴν ἰδιαιτέραν του πατρίδα, ἀπέθανεν ἐκεῖ τὴν 18ην Ἰουλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Τὸ ὀλιγώτερον ἐνδιαφέρον εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν τὸ πρῶτον μέρος, περιεχομένου καθαρῶς ἀριθμητικοῦ. Τοῦτο ἀρχίζει μὲ μίαν πρότασιν, σκοπὸς τῆς ὁποίας εἶναι νὰ καταστήσῃ δυνατὴν καὶ εὔκολον τὴν ἀνάγνωσιν τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, καὶ τῆς ὁποίας ἡ οὐσία συνίσταται εἰς τὴν μεθοδικὴν εἰσαγωγὴν περιόδων μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν 1000. Γεννῶνται τοιουτοτρόπως αἱ ὁμάδες: μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, χιλιάδες ἑκατομμυρίων, δισεκατομμύρια, χιλιάδες δισεκατομμυρίων, τρισεκατομμύρια κλπ. Ἀκολουθοῦν οἱ κανόνες ἐκτελέσεως τῶν τεσσάρων πράξεων μὲ ἀκεραίους καὶ κατόπιν μὲ κλάσματα, ἔπειτα δὲ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν. Οἱ προηγούμενοι κανόνες ἐπεκτείνονται κατόπιν εἰς προσημασμένους ἀριθμοὺς καὶ τέλος εἰς τὸν λογισμὸν μὲ ριζικὰ ἁπλᾶ ἢ σύνθετα, μονώνυμα καὶ διώνυμα.

Τὸ δεύτερον μέρος εἶναι ἀλγεβρικοῦ περιεχομένου μὲ εὐδιάκριτον ἐπίδρασιν τοῦ Viète ὡς καὶ τοῦ Stévin εἰς τὸ σύστημα π.χ. παραστάσεως τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν δυνάμεών των. Πρώτη περίπτωσις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Girard ἐξεδήλωσεν ἰδικήν του πρωτοτυπίαν, εἶναι ἡ πρότασίς του νὰ θεωροῦμεν πάντοτε ὡς πλήρη μίαν οἱανδήποτε ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν, ἔστω καὶ ἂν στερῆται αὕτη μερικῶν ὅρων, ἀφοῦ δυνάμεθα νὰ θεωροῦμεν πάντοτε τούτους ὡς ὑπάρχοντας μὲ συντελεστὰς ὅμως μηδενικούς. Ἡ τόσον προφανὴς αὐτὴ παρατήρησις διευκολύνει τὴν ἐκφώνησιν μερικῶν θεωρημάτων, χωρὶς τὴν ἀνάγκην διατυπώσεως περιορισμῶν. Δίδει ἀμέσως ἕνα παράδειγμα εἰς τὴν πρᾶξιν (isomère) τοῦ μετασχηματισμοῦ μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως:

$$x^{\nu} + p_1 x^{\nu-1} + p_2 x^{\nu-2} + \ldots = 0,$$

μέσῳ τῆς σχέσεως $y = x/\alpha$, διότι ὁ Girard δύναται νὰ διατυπώσῃ τὸ γενικὸν συμπέρασμα, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῆς μετεσχηματισμένης προκύπτουν ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς τῆς ἀρχικῆς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ α ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς νυοστῆς. Δὲν παραλείπει μάλιστα νὰ ἐξάρῃ τὴν χρησιμότητα τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ, ὅταν θέλωμεν ν' ἀπαλλάξωμεν μίαν ἐξίσωσιν κλασματικῶν συντελεστῶν ἢ νὰ καταστήσωμεν μικρότερον τὸ μέγεθος τῶν συντελεστῶν κλπ.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς τριτοβαθμίους ἐξισώσεις, ὁ Girard ἐδίδαξε μὲ μεγάλην διαύγειαν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἀνάγεται εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας ἡ ἐξίσωσις

$$x^3 = px + q, \tag{1}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν ἀνάγωγον περίπτωσιν. Ὅταν εὑρεθῇ μία ρίζα x_1, αἱ ἄλλαι δύο θὰ προκύψουν μέσῳ μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἐχούσης:

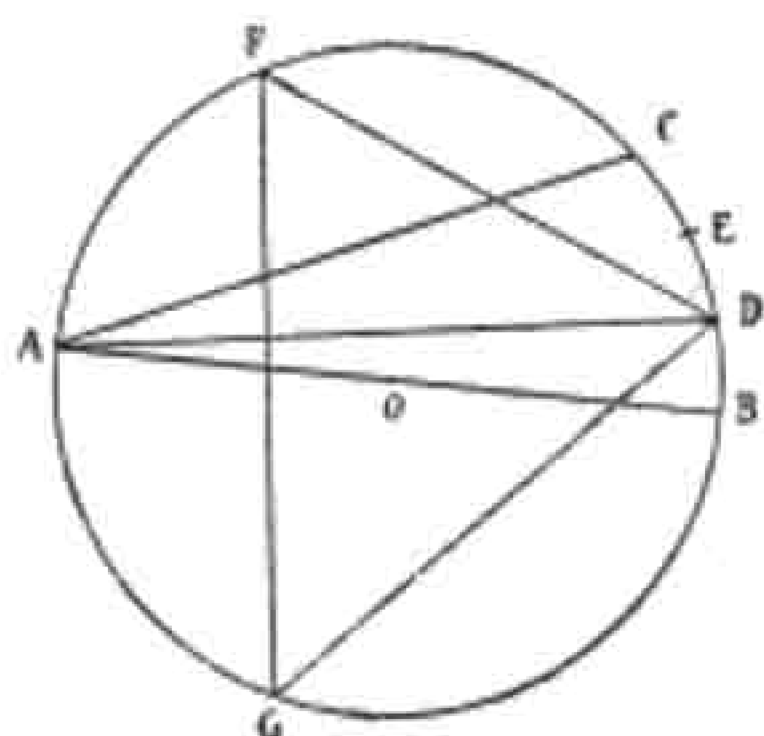
$$x_2 + x_3 = -x_1, \quad x_2 x_3 = -q/x_1. \tag{2}$$

Εἰς αὐτὰς τὰς ἀλγεβρικὰς θεωρίας ὁ Girard προσθέτει μίαν γεωμετρι-

τρικὴν κατασκευήν, ἡ ὁποία δὲν ἐβράδυνε νὰ καταστῇ κλασσικὴ καὶ τὴν ὁποίαν, διὰ τοῦτο, ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν. Ἄς γραφῇ περιφέρεια (σχ. 18) κέντρου O καὶ διαμέτρου $AB = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ χορδὴ $AC = q = \frac{p}{3}$, πρᾶγμα δυνατόν, διότι τῆς ἐξισώσεως (1) ὑπαγομένης εἰς τὴν μὴ ἀναγομένην περίπτωσιν εἶναι πάντοτε:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0. \tag{3}$$

Ἔστω 3α ἡ γωνία BAC καὶ ἄς διαιρεθῇ τὸ τόξον BC εἰς τρία ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα D,E. Τότε τὸ τμῆμα AD θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν θετικὴν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως. Καὶ ἄν τὸ τρίγωνον DFG εἶναι ἰσόπλευρον, τὰ τμήματα AF καὶ AG θὰ δίδουν τὰ μέτρα τῶν ἀρνητικῶν ριζῶν. Διὰ νὰ πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ συμπεράσματος τούτου, παρατηροῦμεν ὅτι, ἄν θέσωμεν AD = x, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 18

$$\text{συν}\,3\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{q}{p/3} : 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}},$$

$$\text{συν}\,\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{p}},$$

καὶ ἄν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ταυτότητα:

$$\text{συν}\,3x = 4\text{συν}^3\alpha - 3\text{συν}\,\alpha \tag{4}$$

καὶ κάμωμεν τὰς δεούσας ἀντικαταστάσεις, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1). Συνεπῶς ἡ χορδὴ AD δίδει τὸ μέτρον τῆς θετικῆς ρίζης, ἐνῷ αἱ χορδαὶ AF καὶ AG δίδουν τὰς λοιπὰς δύο μὲ ἀλλαγὴν σημείου.

328. Παραβλέποντες ἄλλας παρατηρήσεις τοῦ Girard, χρησίμους εἰς τὴν λύσιν τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, θὰ σημειώσωμεν τρία θεωρήματα τοῦ ἰδίου, θεμελιώδους σημασίας διὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας μάλιστα ὁ Girard γράφει ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν:

$$x^\nu + \alpha_2 x^{\nu-2} + \alpha_4 x^{\nu-4} + \ldots = \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_3 x^{\nu-3} + \ldots \tag{5}$$

Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν θεωρημάτων τούτων βεβαιώνει τὴν ὕπαρξιν ν ριζῶν εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (5). Θὰ ἴδωμεν κατὰ τὴν διαδρομὴν τῆς Ἱστορίας μας ὅτι ἐδέησε νὰ παρέλθουν περισσότερα τῶν 170 ἐτῶν πρὶν ἡ ἐν λόγῳ πρότασις ἀποδειχθῇ μὲ τὴν προσήκουσαν γενικότητα καὶ αὐστηρότητα, ἀλλὰ εἰς τὸν Girard ἀνήκει ἡ τιμὴ τῆς διατυπώσεώς της.

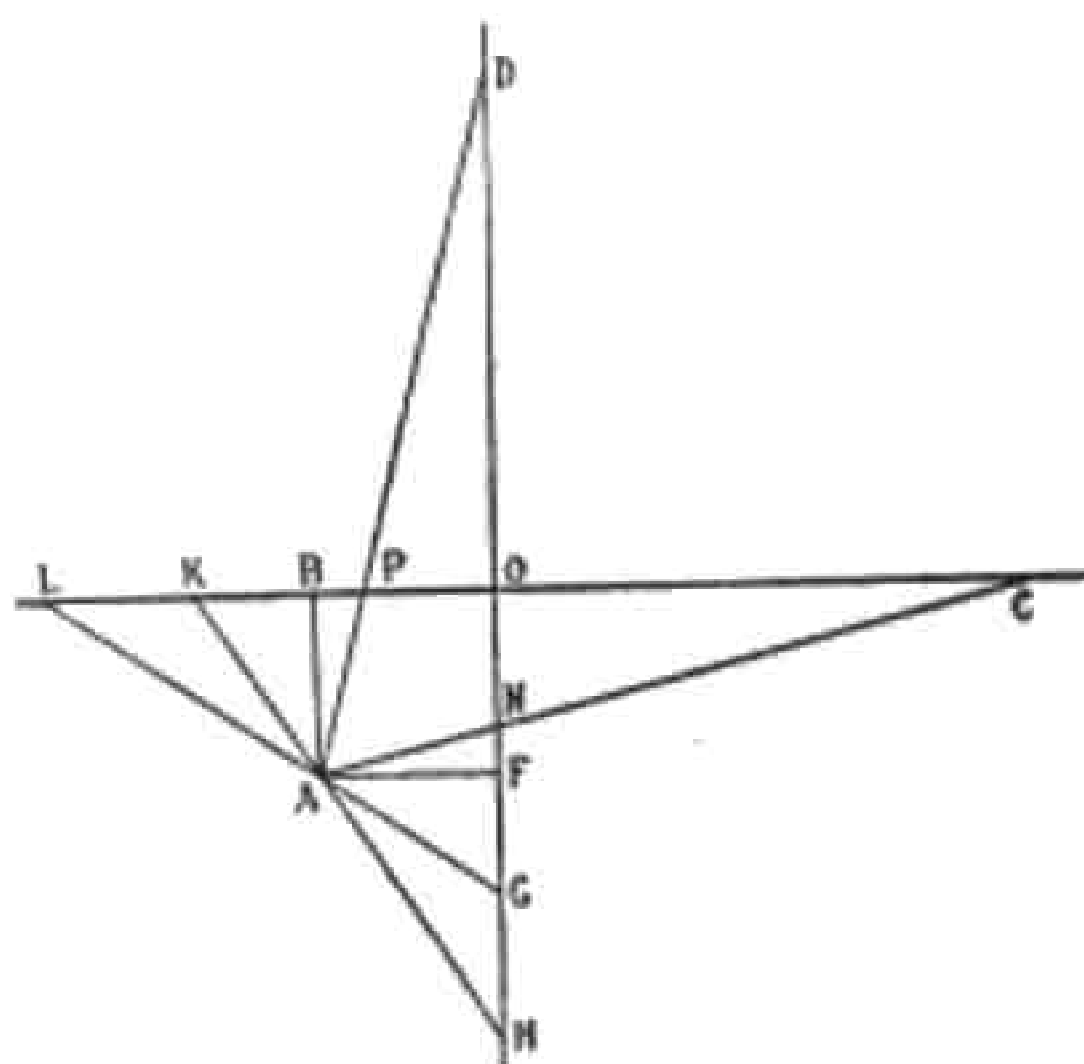
Τὸ δεύτερον θεώρημα διδάσκει τὰς σχέσεις ποὺ ὑφίστανται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν, δηλαδὴ τὰς σχέσεις:

$$a_1 = \Sigma x_i\,, \quad a_2 = \Sigma x_i\, x_h\,, \ldots \qquad (6)$$

Τὸ τρίτον, τέλος, καθιστᾷ γνωστὰ τὰ ἀθροίσματα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ριζῶν, συναρτήσει τῶν συντελεστῶν. Σήμερον ἀκόμη αἱ ὡς ἄνω θεμελιώδεις σχέσεις φέρουν δικαίως τὸ ὄνομα «τύποι τοῦ Girard».

Σημειωτέον ὅτι διὰ νὰ διατυπώσῃ τὰ θεωρήματα αὐτὰ μὲ πλήρη γενικότητα, ὁ Girard ἐστηρίχθη ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ἡ ἐξίσωσις νοεῖται πάντοτε πλήρης διὰ τῆς εἰσαγωγῆς καὶ τῶν τυχὸν ἐλλειπόντων ὅρων μὲ συντελεστὰς μηδενικούς.

Προσθέτομεν δὲ ὅτι τὰ ἐν λόγῳ θεωρήματα ἔχουν σημασίαν μόνον ὅταν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν ἀκόμη καὶ αἱ ἀρνητικαὶ καὶ φανταστικαὶ ρίζαι. Ἐπ' αὐτοῦ ὁ Girard ἐκφέρει μὲ ὀξυδέρκειαν τὴν ἀκόλουθον παρατήρησιν: «θὰ ἠδυνάμεθα νὰ διερωτηθῶμεν εἰς τί χρησιμεύουν λοιπὸν αἱ λύσεις αὐταὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀδύνατοι; ἀπαντῶ: εἰς τρία πράγματα· εἰς ἐπιβεβαίωσιν τοῦ γενικοῦ κανόνος· εἰς τὴν βεβαιότητα τῆς μὴ ὑπάρξεως ἄλλης λύσεως· εἰς τὴν χρησιμότητά των, ἡ ὁποία εἶναι ἀξιόλογος, διότι ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἐπινόησιν ὁμοίων ἐξισώσεων».



Σχ. 19

Διὰ νὰ ἐξάρῃ τὴν χρησιμότητα τῆς θεωρήσεως καὶ τῶν ἀρνητικῶν ριζῶν, ὁ Girard λύει τὸ πρόβλημα (σχ. 19): ν' ἀχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς A ἑνὸς τετραγώνου AFOB πλευρᾶς 4 μία διατέμνουσα ANC τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ἀποτεμνόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν OB, OF τοῦ τετραγώνου νὰ ἔχῃ μῆκος $\sqrt{153}$. Ἐκλέγομεν ὡς κύριον ἄγνωστον τὸ μῆκος FN=x. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων AFN, ONC προκύπτει ἀμέσως ἡ ἀναλογία:

$$\frac{\sqrt{16+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{153}}{4-x},$$

ἡ ὁποία μετασχηματίζεται δι' ἀλγεβρικῶν πράξεων εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^4 - 8x^3 - 121x^2 - 128x + 256 = 0.$$

Αὕτη ἔχει δύο ρίζας ἀκεραίας καὶ θετικὰς 1 καὶ 16. Ἀνάγεται λοιπὸν εἰς δευτεροβάθμιον, ἐξ ἧς λαμβάνονται αἱ ἄλλαι δύο ρίζαι, ἀμφότεραι ἀρνητικαί :

$$-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{4\frac{1}{4}}\,.$$

Ὁ Girard ἑρμηνεύει τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δεικνύων ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τέσσαρας πραγματικὰς λύσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἀνταποκρίνονται αἱ τέσσαρες διατέμνουσαι NC, PD, HK, GL.

Μία τελευταία τελειοποίησις ἐξ ὅσων ἐπέτυχεν ὁ Girard εἰς τὴν ἄλγεβραν ἀναφέρεται εἰς τὰ ὡρισμένα συστήματα ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, καὶ συνίσταται εἰς ἕνα τέχνασμα, χάρις εἰς τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ χειρισθῶμεν συγχρόνως πολλοὺς ἀγνώστους (ἐνθυμητέον ὅτι τοῦτο ἦτο ἀδύνατον μὲ διοφαντικὸν συμβολισμόν, διατηρηθέντα οὐσιαστικῶς καὶ ὑπὸ τοῦ Bombelli). Τὸ τέχνασμα τοῦτο ἐφαρμόζει εἰς ἕνα πρόβλημα ποὺ εἶχον ἤδη λύσει ὁ Cardano καὶ ὁ Stévin, ἀναγόμενον εἰς τὸ σύστημα :

$$x + y + z = 26$$
$$x^2 = yz$$
$$x^2 = 2xy + 6y$$

Ἀλλ' αἱ ταχεῖαι πρόοδοι, ποὺ ἠκολούθησαν ὀλίγον ἔπειτα εἰς τὴν ἄλγεβραν, συνετέλεσαν εἰς τὴν ἐγκατάλειψιν καὶ εἰς τὴν λήθην τῶν σχετικῶν προτάσεων τοῦ Girard, διὸ καὶ δὲν θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ ἐνδιατρίψωμεν.

329. Δὲν εἶναι ὀλιγώτερον πρωτότυπον καὶ ἐνδιαφέρον τὸ τελευταῖον μέρος τῆς Νέας Ἐφευρέσεως, ὅπου γίνεται λόγος περὶ μιᾶς «ἐπιστήμης ἀγνώστου, ἂν μὴ περὶ ἑνὸς κατακλυσμοῦ», ἐφαρμοζομένης εἰς τὴν μέτρησιν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων. Ὁ ἀνωτέρω χαρακτηρισμὸς πάσχει βεβαίως ἀπὸ κάποιαν ὑπερβολήν, διότι δὲν ἔλειψαν προγενέστεραι προσπάθειαι ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος. Ἀληθὲς ὅμως εἶναι ὅτι εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ τοῦ Girard ἀναγράφεται διὰ πρώτην φορὰν ἡ ἀκόλουθος θεμελιώδης πρότασις : «πᾶν σφαιρικὸν πολύγωνον ἔχον πλευρὰς τόξα μεγίστων κύκλων περιέχει ἀριθμὸν μοιρῶν ἐκφραζόμενον ἀπὸ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἐπιπέδου πολυγώνου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὅλης σφαίρας τιθεμένου ἴσου πρὸς 720°».

Ἡ ἀπόδειξις, στηριζομένη ἐπὶ τῆς χρήσεως ἀπειροστῶν, ἔθεσε τὸν συγγραφέα εἰς ἀμηχανίαν ὡς πρὸς τὴν ἀκρίβειάν της, διὸ καὶ ἐχαρακτήρισε τὴν πρότασίν του «ὡς πιθανὸν συμπέρασμα». Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Lagrange ἡ ἀπόδειξις ἐφάνη ὄχι τόσον αὐστηρά, ἀλλ' ἐπετεύχθη (Vacca) νὰ ἐκτεθῇ τελικῶς ὑπὸ μορφὴν πλήρους λογικῆς αὐστηρότητος εἰς τρόπον, ὥστε

πάντες ὁμοφώνως ἀποδέχονται, ὅτι ὁ Girard, διὰ τῆς ἐν λόγῳ προτάσεως, ἐπέφερεν εἰς τὴν γεωμετρίαν τῆς σφαίρας σπουδαιοτάτην πρόοδον.

330. Πρὸ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ ἔργου, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω, ὁ Girard εἶχε κάμει εἰς τὴν σφαιρομετρίαν μίαν ἄλλην συμβολὴν διαφορετικοῦ χαρακτῆρος. Ἐνῷ ἡ Νέα ἐφεύρεσις ἔχει τὴν ὄψιν ἐπιστημονικῆς πραγματείας προοριζομένης διὰ μαθηματικοὺς ἤδη ἐμπείρους, τὸ κείμενον περὶ τοῦ ὁποίου θὰ κάμωμεν τώρα λόγον ἔχει χαρακτῆρα στοιχειώδη. Πρόκειται περὶ ἑνὸς πίνακος τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ὑπολογισθεισῶν βάσει ἀκτῖνος 10000, εἰς τὸν ὁποῖον προσαρτᾶται μία Σύνοψις μαθημάτων τριγωνομετρίας (Traité succinct de la trigonométrie), ὅπου ἀναφέρονται καινοτομίαι ἄξιαι νὰ μνημονευθοῦν ἐνταῦθα. Γενικὸν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα εἶναι ἡ ἔλλειψις τῶν ἀποδείξεων, πρᾶγμα δίδον λαβὴν εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἔγραψε τὸ βιβλίον του διὰ πρακτικούς, ἀπεχθανομένους ἢ παραβλέποντας τοὺς μαθηματικοὺς συλλογισμούς.

Εἰς τὸ προοίμιον τὸ σχετικὸν μὲ τὴν εὐθύγραμμον τριγωνομετρίαν ἀπαντᾶται τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, κατόπιν τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων καὶ τέλος ἡ θεμελιώδης παρατήρησις ὅτι ὁλόκληρος ἡ τριγωνομετρία δύναται νὰ συνοψισθῇ εἰς τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Δοθέντων τριῶν στοιχείων, ποὺ δὲν εἶναι καὶ τὰ τρία γωνίαι, ἑνὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ λοιπά». Τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία, ὁ Girard πραγματεύεται ἐκμεταλλευόμενος τὸν τύπον τοῦ Finck:

$$\frac{a+b}{a-b} = \text{εφ}\,\frac{A+B}{2} : \text{εφ}\,\frac{A-B}{2}$$

ἢ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, τὸ ὁποῖον γράφει ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$c^2 = (a-b)^2 + \frac{2}{R}\,ab \sin \text{ver}\, C$$

(R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου), τὴν ὁποίαν καὶ ἀποκαλεῖ «ἐφεύρεσίν του». Ἀκολουθοῦν ἄλλαι θεωρίαι ἀφορῶσαι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ἄλλαι σχετικαὶ μὲ τὰ πολύγωνα ἐν γένει, μὲ τὰς ὁποίας, χάριν συντομίας, δὲν θ' ἀσχοληθῶμεν, διὰ νὰ μεταβῶμεν εἰς τ' ἀφορῶντα τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.

Τὸ μέρος τοῦτο ἀρχίζει μὲ γενικότητας ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀπαντῶνται εἰς τὸν Εὐκλείδην. Ἀπαντᾶται κατόπιν τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων διὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα καὶ ἐν συνεχείᾳ αἱ ἓξ περιπτώσεις ἐπιλύσεως τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων. Δὲν ἀπουσιάζουν οἱ θεμελιώδεις τύποι προσθαφαιρέσεως:

$$ημ A \cdot ημ B = \frac{1}{2}\{συν(A - B) - συν(A + B)\},$$

$$συνA \cdot συνB = \frac{1}{2}\{συν(A - B) + συν(A + B)\},$$

ἐπὶ τῶν ὁποίων φυσικὰ ὁ Girard δὲν διεκδικεῖ ὑπὲρ αὐτοῦ πρωτοτυπίαν. Ἀσχολούμενος μὲ τὴν λύσιν μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων, διδάσκει πῶς ἐξ ἑνὸς τοιούτου λαμβάνονται ἄλλα, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ συμπληρωματικὸν τρίγωνον, ἡ σπουδαιότης τοῦ ὁποίου καθίσταται φανερὰ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἀνάγει εἰς τρεῖς μόνον τὰς ἓξ θεμελιώδεις περιπτώσεις ἐπιλύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Περιττὸν νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεύς μας γνωρίζει καὶ ἐφαρμόζει τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου. Πρᾶγμα ἄξιον ἐξάρσεως εἶναι ὅτι διδάσκει τέσσαρας νέους τύπους, τοὺς ὁποίους ἀποδίδει εἰς τὸν Viète, μολονότι οὐδαμοῦ εἰς τὰ περισωθέντα ἔργα τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ ἀπαντῶνται. Οἱ τύποι αὐτοὶ ἀναφέρονται εἰς ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον ABC, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ἀχθῆ διὰ τῆς κορυφῆς A τὸ τόξον AD κάθετον ἐπὶ τὴν ἀντικειμένην πλευράν. Μὲ σύγχρονον συμβολισμὸν αἱ τέσσαρες σχέσεις, περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, γράφονται:

$$τεμ\,BAD : τεμ\,CAD = εφ\,AB : εφ\,AC$$

$$τεμ\,BD : τεμ\,CD = τεμ\,AB : τεμ\,AC$$

$$ημ\,CD : ημ\,BD = εφ\,B : εφ\,C$$

$$ημ\,BAD : ημ\,CAD = τεμ\,C : τεμ\,B.$$

Ὁ Girard τελειώνει τὸ βιβλίον του πραγματευόμενος τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Εἰς σφαιρικὸν πολύγωνον μὲ τέσσαρας κορυφὰς νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη πλευρά, ὅταν δίδωνται αἱ λοιπαὶ πέντε». Ὁ Stévin δὲν κατώρθωσε νὰ δώσῃ λύσιν. Καὶ ἐπειδή, ὅταν τὸ βιβλίον ἐτυπώθη, ὑπελείφθησαν μερικαὶ σελίδες εἰς τὴν διάθεσίν του, ὁ Girard ἐπωφελήθη τοῦ γεγονότος διὰ νὰ λύσῃ δύο ἄλλα προβλήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα, λυθὲν ἤδη ὑπὸ τοῦ Snellius, συνίσταται εἰς τὴν ἐπίλυσιν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν του, χωρὶς τὴν χρῆσιν τοῦ πίνακος τῶν ἡμιτόνων. Τὸ ἄλλο ἔχει ὡς θέμα τὰ τρία ἐπίπεδα τετράπλευρα ποὺ γεννῶνται ἂν θεωρήσωμεν, εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς διατάξεις, τέσσαρα τυχόντα σημεῖα μιᾶς περιφερείας. Ὁ μαθηματικός μας ἀποδεικνύει ὅτι «τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων διαιρούμενον διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἐκείνου ἐκ τῶν τριῶν τετραπλεύρων τὸ ὁποῖον εἶναι κυρτόν». Συμπέρασμα κομψότατον, διὰ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ χρεωστοῦμεν χάριτας εἰς τὸν τυπογράφον ἐκεῖνον, ποὺ ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ συγγραφέως μερικὰς σελίδας ἐπὶ πλέον ἐκείνων, ποὺ ἐκάλυψεν ἡ ἐκτύπωσις τῆς τριγωνομετρίας.

T. Harriot

331. Ἂς ἔλθωμεν τώρα ἀπὸ τὰς Κάτω Χώρας εἰς τὴν Ἀγγλίαν διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ζωὴν καὶ τὰ ἔργα ἑνὸς διασήμου περιηγητοῦ, ὁ ὁποῖος μέγα μέρος τῆς ζωῆς του ἀφιέρωσεν εἰς τὴν μελέτην καὶ τὴν περισυλλογήν, τοῦ Thomas Harriot. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Ὀξφόρδην τὸ 1560, καὶ ἔλαβεν εἰς τὸ ἔνδοξον ἐκεῖνο Πανεπιστήμιον (τὴν 12 Φεβρουαρίου 1580) τὸν βαθμὸν τοῦ B.A. (Bachelor of Arts). Κατόπιν προσκλήσεως τοῦ Sir Walter Raleigh τὸ 1586 μετέβη εἰς Βιργινίαν, ἐπανακάμψας δὲ μετὰ πενταετίαν, ἔγραψε μίαν ἔκθεσιν γεωγραφικο - στατιστικοῦ περιεχομένου γύρω ἀπὸ τὰς χώρας ποὺ ἐπεσκέφθη, ἡ ὁποία παραμένει ἔκτοτε ὡς ὑπόδειγμα τοῦ εἴδους της. Ὁ θαυμαστής του κόμης τῆς Northumberland, τοῦ παρέσχε φιλοξενίαν εἰς ἕνα πύργον του, ὅπου ἐπεδόθη ἄνευ διακοπῆς εἰς μελέτας ἐπὶ τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς ὀπτικῆς καὶ εἰς ἀστρονομικὰς καὶ μετεωρολογικὰς παρατηρήσεις, περὶ τῶν ὁποίων μαρτυροῦν μερικαὶ ἐπιστολαί του πρὸς τὸν Kepler, δημοσιευθεῖσαι εἰς τὰ Ἅπαντα τοῦ μεγάλου ἀστρονόμου.

Ἦτο πάντοτε ἀσθενικῆς ἰδιοσυγκρασίας καὶ ἀπέθανε τὴν 21ην Ἰουλίου 1621, καταλιπὼν τεραστίαν ποσότητα χειρογράφων ἐπιστημονικοῦ περιεχομένου. Ἐξ αὐτῶν ἐλήφθη ἡ ὕλη ἑνὸς τόμου, φέροντος τίτλον Ἡ πρᾶξις τῆς ἀναλυτικῆς τέχνης (Artis analyticae praxis) καὶ δημοσιευθέντος μετὰ δεκαετίαν ἀπὸ τοῦ θανάτου του ὑπὸ τοῦ Warner, ὁ ὁποῖος ἐν κατακλεῖδι ἑνὸς προλόγου ὑπεσχέθη ν' ἀποσύρῃ ἀπὸ τὴν ἀφάνειαν καὶ ἄλλην ὕλην ἐξ ἐκείνης ποὺ ἔγραψεν ὁ Harriot, δυστυχῶς ὅμως δὲν ἐτήρησε τὴν ὑπόσχεσίν του. Τὰ φύλλα ποὺ ἄφησεν ὁ πνευματώδης περιηγητὴς ἀτυχῶς διεσκορπίσθησαν· κατόπιν ἐτέθη ἐπὶ τὰ ἴχνη των καὶ τὰ περισυνέλεξεν ἐκ νέου τὸ 1784 ὁ βαρῶνος von Zach, ἤδη δὲ εὑρίσκονται εἰς τὸ Βρεταννικὸν Μουσεῖον ἐν ἀναμονῇ ἐκείνου, ὁ ὁποῖος θὰ τὰ ὑποβάλῃ εἰς πλήρη ἐξέτασιν.

Καίτοι εἰς τὰς σελίδας ποὺ ἐδημοσιεύθησαν οὐδὲν ἴχνος ὑπάρχει περὶ τῶν συγγραφέων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐνημέρωσαν τὸν Harriot ἐπὶ τῆς καταστάσεως τῆς ἀλγέβρας, δὲν εἶναι δύσκολον νὰ διαγνώσῃ κανεὶς ὅτι ἐγνώριζε τὰ ἔργα τοῦ Viète. Συμβολίζει τοὺς ἀγνώστους, ὅπως καὶ ὁ γάλλος μαθηματικός, μέσῳ φωνηέντων, τὰς δὲ γνωστὰς καὶ δεδομένας ποσότητας μέσῳ συμφώνων, ἀλλὰ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις χρησιμοποιεῖ τὰ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἀντὶ τῶν κεφαλαίων ποὺ ἐχρησιμοποίει ὁ Viète. Ἀπομακρύνεται ἄλλωστε ἀπὸ τούτου μὲ τὸ νὰ γράφῃ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος ὡς γινόμενα ἰσαρίθμων παραγόντων ἴσων πρὸς αὐτήν. Καὶ ἐπειδὴ χρησιμοποιεῖ τὰ σύμβολα +, —, =, μίαν ἐξίσωσιν π.χ. παριστᾷ ὡς ἑξῆς:

$$aaa - baa + caa + daa - bca - bda + cda = bcd.$$

Εἶναι ὁ ἐφευρέτης τῶν συμβόλων $>$ καὶ $<$, συνέλαβε δὲ πρῶτος τὴν ἰδέαν τοῦ πρώτου μέλους μιᾶς ἐξισώσεως (μὲ δεύτερον μέλος τὸ μηδέν), ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ ὅρος τοῦ μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα, ὡς γινόμενον παραγόντων τῆς μορφῆς $x - \alpha$. Ἐξωβέλισεν ἐν τούτοις τὰς ἀρνητικὰς ρίζας τόσον, ὥστε νὰ καταλήξῃ εἰς τὸν ἰσχυρισμὸν ὅτι, ὅταν αἱ ρίζαι εἶναι ὅλαι ἀρνητικαί, τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχουν ποσότητες ἱκανοποιοῦσαι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦ Harriot ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν ὁ ὅρος «aequatio canonica» (κανονικὴ ἐξίσωσις) διὰ μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(x) = k$, ὁ ὁποῖος ἐπέπρωτο νὰ καταλάβῃ μονίμως θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην, ἔστω καὶ μὲ ἄλλας σημασίας. Ἀπαντᾶται ἐπίσης μία μέθοδος προσεγγιστικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως, στηριζομένη εἰς τὴν ἰδέαν, ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ἤδη καὶ ὁ Viète, τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀγνώστου εἰς ἄθροισμα δύο μερῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐκλέγεται καταλλήλως, ἐνῷ τὸ ἄλλο ἐκτιμᾶται ἐκ τῆς δοθείσης πρὸς λύσιν ἐξισώσεως.

Τέλος ἐξαίρεται ἡ παρουσία τῶν νέων καὶ σημαντικῶν ἀνισοτήτων

$$\alpha^3 + \beta^3 > \alpha\beta(\alpha + \beta), \quad 4(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)^3 > 27\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 > 3\alpha\beta\gamma.$$

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ὑφισταμένων χειρογράφων ἐξάγεται ὅτι ὁ Harriot, ἴσως πρῶτος αὐτός, ἐπέτυχε νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἄφησεν ὅμως εἰς τοὺς Girard καὶ Cavalieri τὴν δόξαν νὰ συνδέσουν τὰ ὀνόματά των μὲ τὴν σπουδαίαν αὐτὴν ἀνακάλυψιν. Ἐκ τῆς ἰδίας πηγῆς ἀρυόμεθα τὴν πρώτην ἔκφρασιν ὑπὸ μορφὴν γινομένων τῶν συντελεστῶν τοῦ διωνύμου, οἱ ὁποῖοι μέχρι τότε ὑπελογίζοντο ἀναδρομικῶς. Ἐπιτρέπεται λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὰ «ἀνέκδοτα» τοῦ Harriot, ἀποτελοῦν ὀρυχεῖον μὴ ἐπαρκῶς ἐρευνηθὲν καὶ ἐκμεταλλευθὲν μέχρι σήμερον καὶ ὅτι πλουσίως θ' ἀνταμείψῃ τοὺς κόπους ἐκείνου, ὁ ὁποῖος θὰ ἐπιχειρήσῃ μίαν ἡμέραν νὰ τὸ ἐξερευνήσῃ μεθοδικῶς.

W. Oughtred

332. Ὁ τρίτος ἐκ τῶν μαθηματικῶν περὶ τῶν ὁποίων, ὅπως ἐλέχθη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Κεφαλαίου τούτου, ἀξίζει νὰ γίνῃ ἰδιαιτέρα μνεία, εἶναι ἕνας Ἄγγλος γεννηθεὶς εἰς τὸ Eton, τὴν ἕδραν τοῦ ἐνδόξου Κολλεγίου, μεταξὺ 1573 καὶ 1575, ὁ William Oughtred. Εἰς τὸ Κολλέγιον ἐκεῖνο ἐνεγράφη τὴν 1ην Σεπτεμβρίου 1592. Μετὰ τριετίαν ἐνεγράφη εἰς τὸ King's College τοῦ Cambridge, ὅπου ἔλαβε τὸ 1596 τὸν τίτλον τοῦ B. A. (Bachelor of Arts) καὶ τὸ 1600 τὸν τίτλον M. A. (Master of Arts). Ἀκολουθήσας κατόπιν ἐκκλησιαστικὴν σταδιοδρομίαν ἀπεστάλη τὸ 1604 εἰς τὸ Shalford (Surrey)

Εἶναι ὁ ἐφευρέτης τῶν συμβόλων $>$ καὶ $<$, συνέλαβε δὲ πρῶτος τὴν ἰδέαν τοῦ πρώτου μέλους μιᾶς ἐξισώσεως (μὲ δεύτερον μέλος τὸ μηδέν), ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ ὅρος τοῦ μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα, ὡς γινόμενον παραγόντων τῆς μορφῆς $x - \alpha$. Ἐξωβέλισεν ἐν τούτοις τὰς ἀρνητικὰς ρίζας τόσον, ὥστε νὰ καταλήξῃ εἰς τὸν ἰσχυρισμὸν ὅτι, ὅταν αἱ ρίζαι εἶναι ὅλαι ἀρνητικαί, τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχουν ποσότητες ἱκανοποιοῦσαι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦ Harriot ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν ὁ ὅρος «aequatio canonica» (κανονικὴ ἐξίσωσις) διὰ μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(x) = k$, ὁ ὁποῖος ἐπέπρωτο νὰ καταλάβῃ μονίμως θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην, ἔστω καὶ μὲ ἄλλας σημασίας. Ἀπαντᾶται ἐπίσης μία μέθοδος προσεγγιστικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως, στηριζομένη εἰς τὴν ἰδέαν, ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ἤδη καὶ ὁ Viète, τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀγνώστου εἰς ἄθροισμα δύο μερῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐκλέγεται καταλλήλως, ἐνῷ τὸ ἄλλο ἐκτιμᾶται ἐκ τῆς δοθείσης πρὸς λύσιν ἐξισώσεως.

Τέλος ἐξαίρεται ἡ παρουσία τῶν νέων καὶ σημαντικῶν ἀνισοτήτων

$$\alpha^3 + \beta^3 > \alpha\beta(\alpha + \beta), \quad 4(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)^3 > 27\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 > 3\alpha\beta\gamma.$$

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ὑφισταμένων χειρογράφων ἐξάγεται ὅτι ὁ Harriot, ἴσως πρῶτος αὐτός, ἐπέτυχε νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἄφησεν ὅμως εἰς τοὺς Girard καὶ Cavalieri τὴν δόξαν νὰ συνδέσουν τὰ ὀνόματά των μὲ τὴν σπουδαίαν αὐτὴν ἀνακάλυψιν. Ἐκ τῆς ἰδίας πηγῆς ἀρυόμεθα τὴν πρώτην ἔκφρασιν ὑπὸ μορφὴν γινομένων τῶν συντελεστῶν τοῦ διωνύμου, οἱ ὁποῖοι μέχρι τότε ὑπελογίζοντο ἀναδρομικῶς. Ἐπιτρέπεται λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὰ «ἀνέκδοτα» τοῦ Harriot, ἀποτελοῦν ὀρυχεῖον μὴ ἐπαρκῶς ἐρευνηθὲν καὶ ἐκμεταλλευθὲν μέχρι σήμερον καὶ ὅτι πλουσίως θ' ἀνταμείψῃ τοὺς κόπους ἐκείνου, ὁ ὁποῖος θὰ ἐπιχειρήσῃ μίαν ἡμέραν νὰ τὸ ἐξερευνήσῃ μεθοδικῶς.

W. Oughtred

332. Ὁ τρίτος ἐκ τῶν μαθηματικῶν περὶ τῶν ὁποίων, ὅπως ἐλέχθη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Κεφαλαίου τούτου, ἀξίζει νὰ γίνῃ ἰδιαιτέρα μνεία, εἶναι ἕνας Ἄγγλος γεννηθεὶς εἰς τὸ Eton, τὴν ἕδραν τοῦ ἐνδόξου Κολλεγίου, μεταξὺ 1573 καὶ 1575, ὁ William Oughtred. Εἰς τὸ Κολλέγιον ἐκεῖνο ἐνεγράφη τὴν 1ην Σεπτεμβρίου 1592. Μετὰ τριετίαν ἐνεγράφη εἰς τὸ King's College τοῦ Cambridge, ὅπου ἔλαβε τὸ 1596 τὸν τίτλον τοῦ B. A. (Bachelor of Arts) καὶ τὸ 1600 τὸν τίτλον M. A. (Master of Arts). Ἀκολουθήσας κατόπιν ἐκκλησιαστικὴν σταδιοδρομίαν ἀπεστάλη τὸ 1604 εἰς τὸ Shalford (Surrey)

ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐφημερίου, προαχθεὶς δὲ μετετέθη τὸ 1610 εἰς τὸ Albury, ὅπου καὶ ἔζησε μέχρι τοῦ θανάτου του (30 Ἰουνίου 1660). Περὶ τῶν ταξιδίων του εἰς τὴν Εὐρώπην καὶ περὶ μιᾶς προσκλήσεώς του ἐκ μέρους τοῦ Μεγάλου Δουκὸς τῆς Τοσκάνης οὐδὲν δύναται νὰ λεχθῇ τὸ βέβαιον. Δὲν κατέλαβε θέσιν εἰς τὴν δημοσίαν ἐκπαίδευσιν, πολυάριθμα ὅμως εἶναι τὰ πρόσωπα τὰ ὁποῖα ἐχαρακτηρίσθησαν ὡς μαθηταί του. Μνημονεύεται δὲ ἰδιαιτέρως ὅτι κατὰ τὸ 1628 ὁ κόμης τοῦ Arundel τὸν ἐπεφόρτισε μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸν υἱόν του καὶ ὅτι ἀκριβῶς τὸ γεγονὸς τοῦτο ὑπῆρξεν ἡ ἀφορμὴ διὰ τὴν συγγραφὴν ἑνὸς κειμένου ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἀποτελεῖ καὶ τὸν μεγαλύτερον τίτλον τῆς δόξης του.

Οἱ ἱστορικοὶ τῆς γνωμονικῆς ἀναφέρουν τὸ ὄνομα τοῦ Oughtred χάρις εἰς τὰς μεθόδους ποὺ ἐπενόησε διὰ τὴν χάραξιν τῶν μεσημβρινῶν, ἐνῷ οἱ ἀσχολούμενοι μὲ τὴν ἱστορίαν τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν τὸν ἀναφέρουν ὡς πρῶτον ἐφευρέτην μιᾶς συσκευῆς, ἀποτελούσης τὸν πρόγονον τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος. Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὴν προτεραιότητα τῆς ἐφευρέσεως αὐτῆς διεξεδίκησεν ἕνας μαθητής του, ὁ R. Delamain, ὁ ὁποῖος ὑπῆρξε καθηγητὴς τοῦ Καρόλου I. Προῆλθεν ἐξ αὐτῆς τῆς ἀφορμῆς ζωηρὰ ἔρις, ἡ ἐτυμηγορία τῆς ὁποίας ἐξηγγέλθη μόλις ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας, ἄνευ οὐδεμιᾶς καταδικαστικῆς διατυπώσεως, κατόπιν τῆς ὁμοφώνου ἀναγνωρίσεως ὅτι ἐπρόκειτο περὶ ἐφευρέσεων ἀνεξαρτήτων, διὰ τὰς ὁποίας οἱ καιροὶ ἦσαν ὥριμοι.

Εἰς τὸν Oughtred ἀποδίδεται ἐπίσης ἕνα ἀνώνυμον παράρτημα προσκολληθὲν εἰς τὴν ἀγγλικὴν μετάφρασιν, ποὺ ἔκαμεν ὁ E. Wright (§ 293), τοῦ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Napier «Descriptio...». Ἐκεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς δηλοῦται διὰ τοῦ συμβόλου ×, ἀποτελοῦντος ἴσως τὴν πρωταρχικὴν μορφὴν ἑνὸς συμβόλου τὸ ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εἰσήχθη εἰς τὴν ἐπιστήμην ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ περὶ τοῦ ὁποίου ἀσχολούμεθα. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος παράρτημα πραγματεύεται ἐν μέρει περὶ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων καὶ ἐν μέρει περὶ μιᾶς νέας μεθόδου ὑπολογισμοῦ τούτων. Ἀποτελεῖ ἀτυχίαν τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μέθοδος ἐκείνη ἔτυχε τότε πολὺ μικρᾶς διαδόσεως, διότι εἶναι τόσον ἀξιόλογος, ὥστε κατ' ἐπανάληψιν ἐπανευρέθη κατόπιν ὑπὸ ἀνεξαρτήτων ἐρευνητῶν.

333. Τὸ πρῶτον ἔργον τοῦ Oughtred, ποὺ ἐδημοσιεύθη μὲ τὸ ὄνομά του, εἶναι ἀκόμη ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐπρόκειτο νὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ τὴν μεγαλυτέραν φήμην τόσον ἐν ζωῇ ὅσον καὶ μετ' αὐτήν. Εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν (1631) τὸ ἔργον φέρει τὸν τίτλον Aritmeticae in numeris et speciebus instituto... quasi clavis est, ἐνῷ αἱ λέξεις Clavis mathematicae (Κλεὶς τῶν μαθηματικῶν), μὲ τὰς ὁποίας εἶναι γενικῶς γνωστή, κατέχουν τὴν τιμητικὴν θέσιν

εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐκδόσεις (1648, 1652), ποὺ εἶδον τὸ φῶς ἐνῷ ὁ συγγραφεὺς ἦτο ἐν ζωῇ, καὶ εἰς τὰς ἑπομένας (1667, 1675) *. Ἡ πρώτη διαφέρει πολὺ ἀπὸ τὰς ἑπομένας (αἱ ὁποῖαι οὐσιαστικῶς συμπίπτουν) καὶ ἐπ' αὐτῆς πρέπει κυρίως νὰ στηρίζεται ὁ ἐπιθυμῶν νὰ προσδιορίσῃ τὴν θέσιν, ποὺ ἁρμόζει νὰ καταλάβῃ ὁ Oughtred εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀλγέβρας.

Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν μέρος τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου ἀπαντᾶται ἡ διαδικασία ἐκείνη ἐκτελέσεως ἑνὸς προσεγγιστικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἡ γνωστὴ παγκοσμίως ὑπὸ τὸ ὄνομα «κανὼν τοῦ Oughtred» **.

Εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος αἱ καινοτομίαι ἀφοροῦν περισσότερον τὴν μορφὴν παρὰ τὴν οὐσίαν, ἔχουν ὅμως μεγάλην σπουδαιότητα. Εἰς τὸν Oughtred ὀφείλεται πράγματι ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ σταυροῦ τοῦ Ἁγίου Ἀνδρέου $\times$ πρὸς δήλωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Δὲν θ' ἀκολουθήσωμεν τὸ παράδειγμα τῶν ἱστορικῶν, οἱ ὁποῖοι κατέβαλον μακρὰς προσπαθείας διὰ νὰ μαντεύσουν τὸ κίνητρον μιᾶς τοιαύτης ἐκλογῆς, ἀλλὰ θὰ περιορισθῶμεν νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ὁμόθυμον καὶ μόνιμον ἀποδοχὴν τοῦ συμβόλου τούτου εἰς τοὺς λογισμούς. Ἀντιθέτως, ἐφήμερος ὑπῆρξεν ἡ ζωὴ τῆς προτάσεώς του νὰ γράφωμεν τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ A ὡς ἑξῆς:

$$Aq,\ Ac,\ Aqq,\ Aqc,\ Acc, \ldots$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἐφήρμοζεν ὁ Oughtred ἀκόμη καὶ ὅταν ἡ ποσότης ἐφ' ἧς ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα συμβολιζόμενον μὲ τὰ δύο γράμματα ποὺ δηλοῦν τὰ ἄκρα του. Δὲν εἶναι δὲ κατ' οὐσίαν παρὰ κατ' εὐθεῖαν ἀπότοκον τοῦ συστήματος τοῦ Viète, ὁ ὁποῖος, ὡς γνωρίζομεν, ἔγραφε λόγου χάριν A quadrato-cubum ἀντὶ Aqc, ἤτοι A^5. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Oughtred ἐχρησιμοποίει τὸ σύμβολον: ἀντὶ παρενθέσεων, μία γραφὴ ὡς ἡ ἀκόλουθος:

$$q : A - E$$

ἐσήμαινε $(A-E)^2$. Τὸ ἀνάλογον διὰ τὰς ρίζας· τὰ σύμβολα

$$Vcccc\ 1000 \text{ καὶ } Vq : A + E$$

ἐσήμαινον, διὰ τὸν συγγραφέα, ἀντιστοίχως:

$$\sqrt[12]{1000} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{A+E}\,.$$

---

* Ἡ τοῦ 1647 μετεφράσθη εἰς τὰ ἀγγλικὰ ἀπὸ τὸν διάσημον ἀστρονόμον E. Halley.

** Ἐπί τινα χρόνον ἡ μέθοδος αὐτὴ διεδόθη εἰς τὰ ἰταλικὰ σχολεῖα, χάρις εἰς τὸ ἔργον τοῦ I. Todhunter : Appendice agli elementi di algebra (Παράρτημα τῶν στοιχείων Ἀλγέβρας, Napoli, 1879).

Περισσότερον πρωτότυπος ἦτο ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ μαθηματικός μας ἔγραφε μίαν ἀναλογίαν, π.χ.

A.B : : α. β,

καὶ εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις

A : B : : α : β,

μορφὴ ἐπὶ μακρὸν υἱοθετηθεῖσα ὑπὸ πολλῶν συγγραφέων εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην. Μεγάλην διάδοσιν εἶχεν ἐπίσης καὶ τὸ σύμβολον ∺ δι' οὗ ἐδηλοῦτο μιὰ σειρὰ ἀριθμῶν ἀποτελούντων γεωμετρικὴν πρόοδον.

Τεθεὶς εἰς τὸν δρόμον τῆς εἰσαγωγῆς νέων συμβόλων εἰς τὴν ἄλγεβραν, ὁ Oughtred δὲν ἐσταμάτησεν εἰς ὅσα ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει. Καθιέρωσεν ἀκόμη τὴν διάκρισιν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων διαφόρου μήκους, διὰ τῆς χρήσεως τῶν συμβόλων A καὶ E, τοῦ πρώτου δηλοῦντος τὸ μεγαλύτερον, τοῦ δευτέρου τὸ μικρότερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων. Περαιτέρω εἰσήγαγε τὰ σύμβολα: Æ διὰ τὸ γινόμενον, Z διὰ τὸ ἄθροισμα καὶ X διὰ τὴν διαφοράν. Ἐπενόησεν ἀκόμη καὶ ἄλλα σύμβολα πρὸς δήλωσιν ἀλγεβρικῶν συνδυασμῶν, ὅπως αἱ ἐκφράσεις: $A^2 \pm E^2$, $A^3 \pm E^3$. Τὸ ὅλον συμβολικὸν σύστημα, συγκρινόμενον μὲ ἐκεῖνο τοῦ Viète, ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἐπιστήμη ἀπὸ τὸ στάδιον τῆς συγκεκομμένης ἔφθασεν ἤδη εἰς τὸ στάδιον ἐκεῖνο, ποὺ δύναται εὐλόγως νὰ χαρακτηρισθῇ μὲ τὸ ὄνομα συμβολικὴ ἄλγεβρα. Μὲ δικαιολογημένην λοιπὸν ὑπερηφάνειαν ἠδύνατο νὰ γράφῃ βραδύτερον ὁ Oughtred: «Ἡ ὡραία μου συμβολικὴ μέθοδος δὲν καταπονεῖ τὴν μνήμην μὲ πλῆθος λέξεων· δὲν ἐπιβαρύνει τὴν φαντασίαν, οὔτε τὴν περισπᾷ μὲ συγκρίσεις καὶ διερευνήσεις μεγάλου ἀριθμοῦ διακεκριμένων περιπτώσεων. Ἀλλὰ παρουσιάζει διὰ μιᾶς ὁλόκληρον τὴν διαδοχικὴν σειρὰν τῶν πράξεων καὶ ὅλας τὰς διαδοχικὰς φάσεις τοῦ συλλογισμοῦ. Τέλος αἱ διατυπώσεις τῶν θεωρημάτων δύνανται τοῦ λοιποῦ νὰ γίνωνται καταληπταὶ ὄχι μόνον ἀπὸ ἕνα μοναδικὸν λαόν, ἀλλὰ ἀπὸ ὅλους τοὺς λαοὺς τοῦ κόσμου, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ γλῶσσα των, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζουν τὰς σημασίας τῶν ὀλίγων συμβόλων, ποὺ χρησιμοποιοῦνται».

334. Τοῦ συμβολισμοῦ τούτου ὁ συγγραφεύς μας ἔκαμε μίαν ἐφαρμογὴν τόσον ἁπλῆν σήμερον, ὥστε νὰ μᾶς φαίνεται κοινοτάτη, ἀλλὰ πολύτιμον κατὰ τοῦτο, ὅτι τὴν ὑπέδειξε πρῶτος· πρόκειται διὰ τὴν μετάφρασιν εἰς ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν τοῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου II τῶν Στοιχείων, τοῦ Εὐκλείδου (Τόμος I, σελ. 65). Καὶ ἐπειδὴ τὸ Βιβλίον τοῦτο ἔχει, τοὐλάχιστον εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐμφάνισιν, γεωμετρικὸν περιεχόμενον, εὑρισκόμεθα ἐνώπιον μιᾶς ἀληθοῦς ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀλλ' ὄχι (ἂς τὸ προσέξωμεν αὐτὸ) ἐνώπιον μιᾶς ἐμβρυώδους ἀναλυτικῆς γεωμετρίας (μεθόδου, δηλαδή, τῶν συντεταγμένων). Ὑπὸ μορφὴν ἀνάλογον

ἔχει γραφῆ τὸ Κεφάλαιον XXX τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου, ὅπου ὁ Oughtred, ἐμπνεόμενος ἐξ ὅσων ἔγραψε σχετικῶς ὁ Viète εἰς τὸ ὑπόμνημά του Effectionum geometricarum canonina recensio (§ 255), ἀπέδειξε, μεταξὺ ἄλλων, τὴν δυνατότητα λύσεως μὲ κανόνα καὶ διαβήτην τῶν προβλημάτων ἐκείνων ποὺ ἀνάγονται εἰς δευτεροβαθμίους καὶ διτετραγώνους ἐξισώσεις.

Σημειωτέον ἐν τούτοις ὅτι, περισσότερον ἀκόμη ἀπὸ τὸν γάλλον μαθηματικόν, ὁ Oughtred ἐπωφελήθη τῶν ἐργασιῶν τοῦ Marino Ghetaldi, μαθητοῦ τοῦ Viète (§ 266). Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Ragusa, ἐσπούδασεν εἰς Ρώμην ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Clavio, εἰς Ἀμβέρσαν ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Coignet (§ 278) καὶ εἰς Παρισίους ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Viète. Εἰς Βενετίαν ἐδεσμεύθη διὰ φιλίας μὲ τὸν διάσημον Paolo Sarpi. Τὸ 1607 ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα δύο δείγματα ἀνακατασκευῆς διὰ τῆς φαντασίας ἀπολεσθέντων ἀρχαίων ἔργων. Τὸ ἕνα ἀφορᾷ τὸ ἀπολλώνειον ὑπόμνημα Π ε ρ ὶ ν ε ύ σ ε ω ν (Sulle intersezioni) (Τόμος I, σελ. 86), τὸ ἄλλο ὁλοκληρώνει τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Apollonius Gallus γνωστὸν ἔργον τοῦ Viète (§ 266). Μετὰ τὸν θάνατόν του ἐδημοσιεύθη ἕνα ἔργον του περιέχον σχόλια εἰς ὅσα εἶχε γράψει ὁ Viète εἰς τὸ ἀναφερθὲν ὑπόμνημά του (Effectionum κλπ.), χάρις δὲ εἰς τὰ σχόλια αὐτὰ ἐγενικεύθη ἡ γνῶσις καὶ ἡ κατανόησις τοῦ τελευταίου. Ἀστόχως ὁ Ghetaldi ἐθεωρήθη ὡς πρόδρομος τοῦ Descartes εἰς τὴν ἐπινόησιν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, διότι εἰς τὰ ἔργα του οὐδὲν ἴχνος εὑρίσκεται περὶ συντεταγμένων. Ἀκριβῶς ἐκ τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Ghetaldi, ὁ Oughtred παρέλαβε τὰ πρῶτα δέκα προβλήματα, ἐξ ἐκείνων τὰ ὁποῖα πραγματεύεται εἰς τὸ Κεφάλαιον XXX τοῦ Clavis matematicae.

335. Ἀλλ' ἐκεῖ ἀπαντῶνται ἄλλα ζητήματα πλουσιώτερα ὑπὸ ἔποψιν πρωτοτυπίας. Παρατρέχοντες τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου κολούρου πυραμίδος, τὸν ὁποῖον εἶχον ἤδη πραγματοποιήσει ὁ Ἥρων καὶ ὁ Λεονάρδος Πιζᾶνο, σημειώνομεν τὸ πρόβλημα τῆς καταμετρήσεως ἑνὸς βυτίου. Ὁ Oughtred, θεωρεῖ τὸ στερεὸν αὐτὸ ὡς γεννώμενον ἐκ περιστροφῆς ἐλλειπτικοῦ τόξου περὶ ἕνα τῶν ἀξόνων του καὶ οὕτω δύναται νὰ ἐπωφεληθῇ τῶν θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ προσδιορισθῇ προηγουμένως τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος τῆς καμπύλης, περὶ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ περιστροφή, συναρτήσει τῶν τριῶν παραμέτρων H, D, d ποὺ χαρακτηρίζουν τὸ βυτίον (ὕψος, διάμετροι τῶν βάσεων). Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν προστρέχει εἰς τὴν χαρακτηριστικὴν ἐκείνην ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως, ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τὰ Κ ω ν ι κ ὰ τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τὴν ὁποίαν σήμερον γράφομεν ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεως, ὡς ἑξῆς :

$$\frac{y^2}{(c + x)(c - x)} = \text{σταθ.}$$

Μολονότι ὁ Oughtred δὲν προχωρεῖ πέραν τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἄξονος τούτου, ἐν τούτοις ὁ ὀγκομετρικὸς τύπος τῶν ἐλλειπτικῶν βυτίων:

$$V = \frac{\pi}{12} H(2D^2 + d^2),$$

φέρει μέχρι σήμερον τὸ ὄνομά του.

Τὸ τελευταῖον ἀπὸ τὰ προβλήματα ποὺ πραγματεύεται ἔχει σκοπὸν τὴν διαίρεσιν τῆς γωνίας εἰς 5 ἴσα μέρη. Εὑρίσκει τὴν ἐξίσωσιν 5ου βαθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ μὲ πολλὴν διπλωματίαν παρακάμπτει τὴν δυσκολίαν τῆς λύσεως, δηλῶν ὅτι δὲν εὑρίσκεται μέσα εἰς τὰ πλαίσια τοῦ ἔργου του ὁ χειρισμὸς ἐξισώσεων μὴ ἀναγομένων εἰς δευτεροβαθμίους.

Παρατηροῦμεν, τέλος, ὅτι ἡ διαύγεια τῆς ἐκφράσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἐξαίρετος, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν συγκριθῇ μὲ τὰ γραπτὰ τοῦ Cardano καὶ τοῦ Viète, ἐξηγεῖ τὴν μοναδικὴν ἐπιτυχίαν ποὺ ἐσημείωσε τὸ Clavis mathematicae καὶ τὴν μεγάλην ἐπίδρασιν τὴν ὁποίαν ἤσκησεν.

336. Μεταγενέστεραι ἐκδόσεις τοῦ ἔργου τούτου ἀνήκουν εἰς τὴν μετα-καρτεσιανὴν περίοδον. Διὰ νὰ μὴ ἐπανέλθωμεν ἐπ' αὐτοῦ βραδύτερον, ἄς κάμωμεν ἐδῶ λόγον περὶ ἑνὸς ἐκτεταμένου καὶ ἐξαιρέτου ὑπομνήματος περὶ λύσεως ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μέθοδος τοῦ Viète ἀναπτύσσεται μὲ πληρότητα καὶ διαύγειαν. Δὲν ἐπιμένομεν ἐπὶ προτάσεων ἐκφραζομένων σήμερον διὰ τῶν τύπων:

$$\lambda o\gamma \alpha\beta = \lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \beta, \quad \lambda o\gamma \frac{\alpha}{\beta} = \lambda o\gamma \alpha - \lambda o\gamma \beta,$$

$$\lambda o\gamma \alpha^{\mu} = \mu\, \lambda o\gamma \alpha, \quad \lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{1}{\mu}\, \lambda o\gamma \alpha,$$

καθ' ὅσον αὗται ἦσαν ἤδη τρεχούσης χρήσεως περὶ τὰ μέσα τοῦ XVII αἰῶνος. Νέα εἶναι τὰ σύμβολα ⊏ καὶ ⊐ πρὸς δήλωσιν τοῦ μεγαλυτέρου καὶ μικροτέρου, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐγκατελείφθησαν πρὸ τῶν ἁπλουστέρων τοῦ Harriot (§ 331). Νέον εἶναι ἐπίσης τὸ σύμβολον ∼ πρὸς δήλωσιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον μόνον ὁ Wallis υἱοθέτησεν. Ἀπὸ τὸ σύμβολον π/δ, ποὺ μετεχειρίσθη ὁ Oughtred πρὸς δήλωσιν τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της, ἔλαβε τὴν γένεσίν του τὸ π, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦμεν σήμερον πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Μεταβαίνοντες εἰς ἄλλον τομέα, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν Oughtred ἀνήκει ἡ διατύπωσις τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος, τὸ ὁποῖον δὲν ἀπαντᾶται ρητῶς ἐκπεφρασμένον εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου: «Ἐὰν ἀπὸ σημείου τοῦ ἐπιπέδου. περιφερείας ἀχθῇ τέμνουσα ταύτης, τὸ γινόμενον

τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν σημείων τομῆς περιφερείας καὶ τεμνούσης εἶναι σταθερόν».

Ἄλλα νέα σύμβολα ἐχρησιμοποίησεν ὁ ἴδιος εἰς ἕνα σχόλιόν του εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων καθὼς καὶ εἰς ἄλλα δημοσιεύματά του. Κατὰ τὸν F. Cajori, τὰ ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιηθέντα σύμβολα πρέπει ἐν συνόλῳ ν' ἀνέρχωνται εἰς 150, χωρὶς νὰ εἶναι πάντως βέβαιον ἂν ὅλα ἦσαν ἰδικῆς του ἐπινοήσεως ἢ ἂν μερικὰ ἴσως ἐξ αὐτῶν εἰσήχθησαν ὑπὸ μεταγενεστέρων ἐκδοτῶν. Δὲν θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἀπαρίθμησίν των, ἀλλὰ θὰ ἐξάρωμεν μᾶλλον τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν του ἔκαμε χρῆσιν συντμήσεων, τὰς ὁποίας εἶχε προτείνει ἀπὸ τοῦ 1632 καὶ αἱ ὁποῖαι, ἐν τῷ συνόλῳ των, ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον στάδιον τῆς σήμερον ἐν χρήσει συμβολογραφίας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τὰ βασικώτερα:

s = sinus, t = tangens, se = secant

s.co = cosinus (δηλαδὴ sinus complementi)

t.co = contangens, log = logarithmus.

Προσθετέον ὅτι ἐδῶ ἀπαντῶνται πλήρεις ἀποδείξεις τῶν δύο πρώτων ἀναλογιῶν τοῦ Napier. Εἰς τὸ σημεῖον λοιπὸν αὐτὸ ὁ Oughtred συναντᾶται τυχαίως μὲ τὸν Cavalieri (§ 312).

Ὁ ἀναδιφῶν μετὰ προσοχῆς εἰς τὰ διάφορα γραπτὰ τοῦ Oughtred θὰ ἠδύνατο ν' ἀνακαλύψῃ καὶ ἄλλα πράγματα ἀξιόλογα. Ἀλλ' ὅσα εἴπομεν ἀρκοῦν ἂν δὲν πλανώμεθα, ν' ἀποδείξουν ὅτι εἰς τὸ κανονικὸν στράτευμα τῶν ἐξ ἐπαγγέλματος μαθηματικῶν, ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἐθελοντὴς ἀξίζει μιᾶς ἀρκετὰ διακεκριμένης θέσεως. Πολυάριθμα εἶναι ἐξ ἄλλου τὰ πρόσωπα, τὰ ὁποῖα ἀφοῦ ἐπεσκέφθησαν κατ' ἐπανάληψιν τὸν ἱερωμένον τοῦ Albury δὲν ἐδίσταααν καθ' ὅλην των τὴν ζωὴν ν' ἀναγνωρίσουν καὶ νὰ διακηρύξουν ἑαυτοὺς μαθητάς του. Ἀρκεῖ μεταξὺ αὐτῶν ν' ἀναφέρωμεν τὸν κορυφαῖον μαθηματικὸν G. Wallis καὶ τὸν διάσημον ἀρχιτέκτονα C. Wren, περὶ τῶν ὁποίων θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω. Ἡ εὐεργετική του ἐπίδρασις ἦτο ἔκδηλος ἐπὶ μακρὸν χρόνον μετὰ τὸν θάνατόν του τόσον, ὥστε δὲν ἐδίστασε κάποιος νὰ τὸν ἀποκαλέσῃ «Todhunter τοῦ XVII αἰῶνος»[12].

Pierre Hérigone

337. Εἰς τὰς αὐτοεκθειαστικὰς φράσεις τοῦ Oughtred, τὰς ὁποίας ἀνεγράψαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς § 333, ἀνταποκρίνονται ἄλλαι ὄχι ὀλιγώτερον ἐνθουσιώδεις, αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶνται εἰς ἕνα ἔργον δημοσιευθὲν ἐν Γαλλίᾳ περίπου τὴν ἰδίαν ἐποχὴν (1634). Ἀξίζει νὰ τὰς ἀναφέρωμεν, διὰ νὰ τὰς σχολιάσωμεν ἐν συνεχείᾳ: «Ἐπενόησα μίαν νέαν μέθοδον καταστρώσεως

τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν σημείων τομῆς περιφερείας καὶ τεμνούσης εἶναι σταθερόν».

Ἄλλα νέα σύμβολα ἐχρησιμοποίησεν ὁ ἴδιος εἰς ἕνα σχόλιόν του εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων καθὼς καὶ εἰς ἄλλα δημοσιεύματά του. Κατὰ τὸν F. Cajori, τὰ ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιηθέντα σύμβολα πρέπει ἐν συνόλῳ ν' ἀνέρχωνται εἰς 150, χωρὶς νὰ εἶναι πάντως βέβαιον ἂν ὅλα ἦσαν ἰδικῆς του ἐπινοήσεως ἢ ἂν μερικὰ ἴσως ἐξ αὐτῶν εἰσήχθησαν ὑπὸ μεταγενεστέρων ἐκδοτῶν. Δὲν θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἀπαρίθμησίν των, ἀλλὰ θὰ ἐξάρωμεν μᾶλλον τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν του ἔκαμε χρῆσιν συντμήσεων, τὰς ὁποίας εἶχε προτείνει ἀπὸ τοῦ 1632 καὶ αἱ ὁποῖαι, ἐν τῷ συνόλῳ των, ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον στάδιον τῆς σήμερον ἐν χρήσει συμβολογραφίας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τὰ βασικώτερα:

s = sinus, t = tangens, se = secant

s.co = cosinus (δηλαδὴ sinus complementi)

t.co = contangens, log = logarithmus.

Προσθετέον ὅτι ἐδῶ ἀπαντῶνται πλήρεις ἀποδείξεις τῶν δύο πρώτων ἀναλογιῶν τοῦ Napier. Εἰς τὸ σημεῖον λοιπὸν αὐτὸ ὁ Oughtred συναντᾶται τυχαίως μὲ τὸν Cavalieri (§ 312).

Ὁ ἀναδιφῶν μετὰ προσοχῆς εἰς τὰ διάφορα γραπτὰ τοῦ Oughtred θὰ ἠδύνατο ν' ἀνακαλύψῃ καὶ ἄλλα πράγματα ἀξιόλογα. Ἀλλ' ὅσα εἴπομεν ἀρκοῦν ἂν δὲν πλανώμεθα, ν' ἀποδείξουν ὅτι εἰς τὸ κανονικὸν στράτευμα τῶν ἐξ ἐπαγγέλματος μαθηματικῶν, ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἐθελοντὴς ἀξίζει μιᾶς ἀρκετὰ διακεκριμένης θέσεως. Πολυάριθμα εἶναι ἐξ ἄλλου τὰ πρόσωπα, τὰ ὁποῖα ἀφοῦ ἐπεσκέφθησαν κατ' ἐπανάληψιν τὸν ἱερωμένον τοῦ Albury δὲν ἐδίστασαν καθ' ὅλην των τὴν ζωὴν ν' ἀναγνωρίσουν καὶ νὰ διακηρύξουν ἑαυτοὺς μαθητάς του. Ἀρκεῖ μεταξὺ αὐτῶν ν' ἀναφέρωμεν τὸν κορυφαῖον μαθηματικὸν G. Wallis καὶ τὸν διάσημον ἀρχιτέκτονα C. Wren, περὶ τῶν ὁποίων θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω. Ἡ εὐεργετική του ἐπίδρασις ἦτο ἔκδηλος ἐπὶ μακρὸν χρόνον μετὰ τὸν θάνατόν του τόσον, ὥστε δὲν ἐδίστασε κάποιος νὰ τὸν ἀποκαλέσῃ «Todhunter τοῦ XVII αἰῶνος»[12].

Pierre Hérigone

337. Εἰς τὰς αὐτοεκθειαστικὰς φράσεις τοῦ Oughtred, τὰς ὁποίας ἀνεγράψαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς § 333, ἀνταποκρίνονται ἄλλαι ὄχι ὀλιγώτερον ἐνθουσιώδεις, αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶνται εἰς ἕνα ἔργον δημοσιευθὲν ἐν Γαλλίᾳ περίπου τὴν ἰδίαν ἐποχὴν (1634). Ἀξίζει νὰ τὰς ἀναφέρωμεν, διὰ νὰ τὰς σχολιάσωμεν ἐν συνεχείᾳ: «Ἐπενόησα μίαν νέαν μέθοδον καταστρώσεως

μιᾶς ἀποδείξεως, σύντομον καὶ εὔληπτον, χωρὶς τὴν χρῆσιν καμμιᾶς γλώσσης. Ὅτι εἶναι βραχεῖα καὶ εὔληπτος καὶ δὲν ἀπαιτεῖ τὴν χρῆσιν τῆς γλώσσης προκύπτει ἀμέσως μὲ τὸ ἄνοιγμα τοῦ βιβλίου. Ὅτι εἶναι εὔληπτος θὰ καταστῇ φανερὸν εἰς ἐκείνους ποὺ θὰ μάθουν τὰ σύμβολά μου καὶ θ' ἀκολουθήσουν τοὺς στοχασμούς, οἱ ὁποῖοι διεξάγονται μὲ αὐτά. Οὔτε ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ἡ μέθοδός μου εἶναι καθαρωτέρα τῆς συνήθους, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὴν ἰδικήν μου τίποτε δὲν γίνεται δεκτόν, χωρὶς ἀναφοράν του εἰς προηγούμενα δεδομένα. Τύπος τὸν ὁποῖον οἱ ἄλλοι συγγραφεῖς δὲν τηροῦν πιστῶς. Ἐπειδὴ ὅλοι ἀναγνωρίζουν τὴν ἀναγκαιότητα τῶν ἀναφορῶν, ἀναλόγως πρὸς τὸν βαθμὸν τῆς προφανείας ἢ σκοτεινότητος, καὶ στηρίζονται εἰς πολλὰ ἀποτελέσματα χωρὶς ἀναφοράς, αἱ ὁποῖαι παρὰ ταῦτα θὰ ἦσαν ἀναγκαῖαι εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀρχάριοι. Ἂς προστεθῇ ὅτι εἰς τὴν συνήθη μέθοδον γίνεται χρῆσις μεγάλου ἀριθμοῦ λέξεων καὶ ἀξιωμάτων, τῶν ὁποίων δὲν ἔχει προηγηθῆ ἐξήγησις, ἐνῷ εἰς τὴν νέαν μέθοδον οὐδὲν λέγεται χωρὶς νὰ ἔχῃ προηγουμένως ἀναπτυχθῆ καὶ υἱοθετηθῆ. Ἀκόμη καὶ κατὰ τὴν ἔκθεσιν μακροτέρων ἀποδείξεων ἀναφέρονται δι' ἑλληνικῶν γραμμάτων ὅσα ἔχουν ἤδη προηγουμένως κτηθῆ κατὰ τὴν πορείαν τοῦ συλλογισμοῦ. Καὶ ἐπειδὴ οἱαδήποτε συνέπεια ἐξαρτᾶται ἀμέσως ἐκ τῆς ἀναφερομένης προτάσεως, ἡ ἀπόδειξις ἐκτυλίσσεται ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους ὡς μία συνεχὴς σειρὰ ἀμέσων συμπερασμάτων, λογικῶς ἀναγκαίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχεται εἰς ἕνα βραχύτατον στίχον, καὶ τὸ σύνολον τῶν ὁποίων δύναται νὰ μεταφρασθῇ εἰς συλλογισμόν, ἀφοῦ εἰς τὰς ἀναφερομένας προτάσεις εὑρίσκονται ὅλα τὰ μέρη τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ».

Παρ' ὅλην τὴν μετρίαν κομψότητα ὕφους, μὲ τὴν ὁποίαν ἐγράφησαν αὐταὶ αἱ γραμμαί, ὁ ἀναγνώστης ὁ γνωρίζων τὴν φύσιν καὶ τοὺς σκοποὺς τῆς σημερινῆς λογικῆς τῶν μαθηματικῶν δὲν θὰ βραδύνῃ ν' ἀναγνωρίσῃ ἐν τῷ προσώπῳ ἐκείνου ποὺ ἔγραψεν αὐτὰς τὰς γραμμὰς ἕνα μακρινὸν πρόδρομον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι κατέγιναν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῶν ἀξιωματικῶν βάσεων τῶν διαφόρων κλάδων τῶν μαθηματικῶν καὶ νὰ διασφαλίσουν, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, τὸν μαθηματικὸν συλλογισμὸν ἀπὸ τοῦ κινδύνου ἐφαρμογῆς ἀρχῶν μὴ ρητῶς τεθειμένων. Πρέπει ὅμως νὰ προστεθῇ ὅτι τοιαύτη συμφωνία ὑφίσταται, ὄχι μόνον εἰς τὸν σκοπόν, ἀλλ' ἀκόμη καὶ εἰς τὰ μέσα πρὸς πραγματοποίησιν αὐτοῦ, διότι ταῦτα τόσον εἰς τὸν συγγραφέα μας, ὅσον καὶ εἰς τοὺς συγχρόνους, συνίστανται εἰς τὴν σταθερὰν χρῆσιν κανονικῶν συντομογραφιῶν καὶ νέων συμβόλων. Τοιουτοτρόπως ἐνῷ ἡ λέξις est θεωρεῖται ὡς μὴ ἀναγομένη περαιτέρω, εἰς τὸν πληθυντικὸν sunt ἀντικαθίσταται ἀπὸ τὸ σύνολον snt. Εἰδικὰ σύμβολα χρησιμοποιοῦνται περαιτέρω πρὸς δήλωσιν μιᾶς τυχούσης γωνίας ($\angle$) ἢ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ($\llcorner$), ἑνὸς τετραγώνου ($\square$) ἑνὸς παραλληλο-

γ ρ ά μ μ ο υ (◊), ἑνὸς τ ρ ι γ ώ ν ο υ (Δ). Ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον + διετήρησε τὴν συνήθη σημασίαν, τὸ — δηλοῖ μίαν εὐθεῖαν καὶ τὸ = δύο εὐθείας παραλλήλους.

Πρωτοτυπότερα εἶναι τὰ σύμβολα 2|2, 3|2, 2|3, ποὺ χρησιμοποιοῦνται διὰ νὰ δηλώσουν ἰσότητα ἢ ἀνισότητα, εἰς τρόπον ὥστε μὲ τοὺς συνδυασμοὺς 2α|2β, 3α|2β, 2α|3β δηλοῦται ὅτι τὸ α εἶναι ἴσον, μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ β. Τέλος τὸ γράμμα Π χρησιμοποιεῖται ἀντὶ τῆς προθέσεως ε ἰ ς, ἐνῷ ἀντὶ τοῦ ἢ χρησιμοποιεῖται τὸ νέον σύμβολον ⊔.

Τὸ τόσον ἀποφασιστικὸν αὐτὸ βῆμα πρὸς τὴν μαθηματικὴν συμβολογραφίαν ἔκαμεν ἕνας καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν εἰς Παρισίους, ὁ Pierre Hérigone, περὶ τοῦ ὁποίου τίποτε δὲν εἶναι γνωστὸν πλὴν τοῦ ὅτι ἔζησε κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος. Τὸ νέον σύστημα ἐκθέσεως ποὺ ἐπενόησε (προφανῶς μία πρώτη προσπάθεια ταχυγραφίας) ἐγένετο γνωστὸν χάρις εἰς ἕνα πλῆρες Cours τῶν μαθηματικῶν, ποὺ ἔγραψεν εἰς λατινικὴν καὶ γαλλικὴν γλῶσσαν.

Ὅτι διὰ τοῦ συστήματος τούτου ἐπετυγχάνετο ἡ συμπύκνωσις πολλῆς ὕλης εἰς μικρὸν χῶρον ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὸν Πρῶτον Τόμον τοῦ ἔργου καὶ δὴ εἰς μίαν χιλιάδα σελίδων εἰς μικρὸν σχῆμα 8ον ἐκτίθενται ὅλα τὰ Σ τ ο ι χ ε ῖ α τοῦ Εὐκλείδου, ἀκόμη καὶ τὰ οὕτω λεγόμενα XIV καὶ XV Βιβλία (βλ. Τόμος I, § 52), κατόπιν τὰ Δ ε δ ο μ έ ν α τοῦ ἰδίου, πέντε Βιβλία τοῦ Ἀπολλωνίου, βάσει τῶν ἀνακατασκευῶν τοῦ Snellius (Προβλήματα τῶν κωνικῶν τομῶν), τοῦ M. Ghetaldi (Νεύσεις) καὶ τοῦ Viète (Ἐπαφαί), καὶ τέλος ἡ θεωρία τῶν γωνιακῶν διαιρέσεων. Εἰς τὴν ἄλγεβραν ὁ Hérigone ἀποδεικνύεται πιστὸς ἀκόλουθος τοῦ μεγάλου συμπατριώτου του Viète.

338. Αἱ πληροφορίαι αὗται δὲν εἶναι βέβαια ἐπαρκεῖς διὰ νὰ δώσουν εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας μίαν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργου. Τὰ κύρια χαρακτηριστικά του προκύπτουν κατὰ τὸν καλύτερον τρόπον, ἐὰν ρίψωμεν ἕνα βλέμμα εἰς μίαν σελίδα τοῦ βιβλίου. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, εἰς συμπλήρωσιν τῶν ὅσων εἴπομεν προηγουμένως ἀναπαριστῶμεν ἐδῶ πιστῶς ἐκ τοῦ κειμένου τὰ ἀφορῶντα τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα (σχ. 20).

«Ἔχουν τὰ γραπτὰ τὴν μοῖραν των», λέγει ἀρχαῖον ρητόν. Τὴν κοινὴν λοιπὸν αὐτὴν μοῖραν δὲν διέφυγε τὸ Cours τοῦ Hérigone. Διότι ἔτυχε μὲν τῆς τιμῆς μιᾶς δευτέρας ἐκδόσεως (1644), ἀλλ' ὁ συγγραφεὺς δὲν εὗρεν ὀπαδοὺς καὶ τὸ ἔργον του περιέπεσεν, ἀδίκως ἴσως, εἰς τὴν λήθην. Εἰς τοῦτο συνετέλεσεν ἀσφαλῶς ἡ ἐξαιρετικὴ σπουδαιότης τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκοντο τότε ἐν ἐξελίξει εἰς τὴν Γαλλίαν, καὶ περὶ τῶν ὁποίων πρόκειται τώρα νὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα δύο Κεφάλαια.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, εἰς τὸ βλέμμα τοῦ ἱστορικοῦ, τὸ Cours ἐκεῖνο

τοῦ Hérigone κατέχει ἀναμφισβήτητον ἀξίαν, εἴτε ὡς ἐκδήλωσις τῶν τάσεων τῆς ἐποχῆς πρὸς τὸν συμβολισμόν, ὁ ὁποῖος ἐνεψύχωνε βαθμηδὸν τὴν ἐπιστήμην μας, εἴτε ὡς τεκμήριον τοῦ ὅτι ὁ Hérigon ὑπῆρξε μακρινὸς πρό-

TEOR. XXXIII. PROPOS. XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Aux triangles rectangles, le carré du costé qui soustient l'angle droit, est égal aux carrez des costez qui contiennent l'angle droit.

HYPOTH.
< bac est ⌊

PRAEP.

46.1	be est □ . bc
46.1	af est □ . ab
46.1	ai est □ . ac
31.1	am = bd ‖ ce
1.1	ae, ac . bi, cf, sunt —

REQ. π DEMONSTR.
□ . bc 2\|2 □ . ab + □ . ac

HYP.	< bac est ⌋
CONSTR.	< bag est ⌋
14.1	gac est ⌋
29.d.1	ab 2|2 bf
29.d.1	ad 2|2 bc
12.a.1	< dbc 2|2 fba
	< abc commun. add.
2.a.1	< abd 2|2 fbc
4.1	△ abd 2|2 fbc
41.1	◊ blmd 2|2 2 △ abd
41.1	□ af 2|2 2 △ fbc
6.a.1	◊ blmd 2|2 □ af β.
d.α	△ ace 2|2 △ icb
d.β	◊ clme 2|2 □ ch
	concl.
2.a.1	□ bc 2|2 □ af + □ ai

Σχ. 20

δρομος ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὸν XIX αἰῶνα ἐδημιούργησαν τὴν ἀξιωματικὴν θεμελίωσιν τῶν μαθηματικῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIV

Η ΕΙΣΟΔΟΣ ΕΙΣ ΤΑ ΝΕΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΡΟΣ Ι: DESCARTES

Βιογραφία τοῦ Descartes

339. Ὁ René Descartes, γνωστὸς καὶ μὲ τὸ λατινικὸν ὄνομα Cartesius, ἐξ οὗ καὶ τὸ ἑλληνικὸν Καρτέσιος, ἐγεννήθη εἰς La-Haye (Indre-et-Loire, Touraine) τὴν 31ην Μαρτίου 1596 ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν, ὄχι τῆς «grande» — ὅπως ἔλεγον τότε — ἀλλὰ τῆς «petite noblesse», ἡ ὁποία περιελάμβανε μεταξὺ τῶν μελῶν της πρόσωπα διακριθέντα εἰς τὴν διοίκησιν, εἰς τὸ στράτευμα καὶ εἰς τὰ ἐλεύθερα ἐπαγγέλματα, ἰδιαιτέρως μάλιστα εἰς τὴν ἰατρικήν. Μόλις ἐξελθὼν τῆς παιδικῆς ἡλικίας, ἀπεστάλη (Πάσχα 1604) εἰς τὸ Βασιλικὸν Κολλέγιον τῆς La Flèche (Anjoue), ἐκπαιδευτικὸν ἵδρυμα μεγάλης φήμης, χάρις εἰς τὴν ἐπιτυχῆ διεύθυνσιν αὐτοῦ ὑπὸ τῶν Ἰησουϊτῶν. Ἐκεῖ παρέμεινεν ὁ νεαρὸς Καρτέσιος μέχρι τοῦ Αὐγούστου 1614. Τοὺς διδασκάλους του δὲν ἔπαυσε νὰ ἐνθυμῆται μ' εὐγνωμοσύνην, διετήρει δὲ πάντοτε ἐγκαρδίους σχέσεις μὲ τὴν ἑταιρείαν των. Κατὰ τὰ ἔτη 1612-14 ὁ Καρτέσιος διέμενεν ἄλλοτε εἰς τὴν πατρικήν του οἰκίαν καὶ ἄλλοτε εἰς Παρισίους, τὰ ἑπόμενα δὲ ἔτη 1615-1616 εἰς Poitiers, ἐγγραφεὶς μὲν εἰς τὴν νομικὴν σχολήν, ἀλλὰ μετὰ πάθους ἀφιερωθεὶς εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἰατρικῆς μὲ τὸ ὄνειρον νὰ συνεχίσῃ τὴν μακρὰν οἰκογενειακὴν παράδοσιν. Ἀκολουθῶν κατόπιν τὰς συνηθείας, αἱ ὁποῖαι ἐπεβάλλοντο τότε εἰς τοὺς εὐέλπιδας νέους τῶν εὐγενῶν οἰκογενειῶν, μετέβη περὶ τὸ τέλος τοῦ 1617 ἢ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἑπομένου ἔτους εἰς Breda τῆς Ὁλλανδίας διὰ νὰ καταταχθῇ, ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐθελοντοῦ, εἰς τὸν στρατὸν τοῦ Maurice de Nassau καὶ παρακολουθήσῃ τὰ μαθήματα τῆς ἐκεῖ στρατιωτικῆς Ἀκαδημίας. Ἐκεῖ ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν ὀλλανδὸν μαθηματικὸν Isaac Beeckmann, (γεννηθέντα τὴν 10ην Ὀκτωβρίου 1588, ἀποθανόντα τὴν 19ην Μαΐου 1637), ἄνθρωπον ὑψηλῆς διανοήσεως καὶ εὐρείας παιδείας, ὁ ὁποῖος ἤσκησεν ἐπὶ τοῦ Descartes μόνιμον καὶ εὐεργετικὴν ἐπίδρασιν. Αὐτὸς πράγματι

ἔστρεψε τὸ πνεῦμα τοῦ νεαροῦ στοχαστοῦ πρὸς τὰς ἐπιστημονικὰς ἐρεύνας μὲ τὸ ν' ἀφυπνίσῃ εἰς τὴν ψυχήν του τὸν θαυμασμὸν πρὸς τοὺς μεγάλους γεωμέτρας τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος*.

Ἐγκατέλειψε τὴν Breda περὶ τὰ μέσα Ἀπριλίου τοῦ 1619, τὴν δὲ 29ην τοῦ ἰδίου μηνὸς ἐπεβιβάσθη πλοίου εἰς Amsterdam, διὰ νὰ μεταβῇ εἰς Δανίαν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐπέρασεν εἰς τὴν Γερμανίαν, ὅπου — εἰς Φρανκφούρτην — παρέστη εἰς τὴν στέψιν τοῦ αὐτοκράτορος Φερδινάνδου τοῦ II. Διέμεινεν ἐπίσης εἰς τὸ Ulm, ὅπου εἶχε συνδιάλεξιν μὲ ἕνα μαθηματικὸν χαίροντα τότε μεγάλης φήμης, ὁ ὁποῖος τὸν κατέστησεν ἐνήμερον περὶ τῆς καταστάσεως εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο ἡ ἄλγεβρα ἐπὶ τῶν ἡμερῶν του**. Ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ Johannes Faulhaber (γεννηθέντος εἰς Ulm τὴν 5ην Μαΐου 1580, ἀποθανόντος ἐκεῖ τὸ 1635), ὁ ὁποῖος μνημονεύεται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, διότι πρῶτος ἐθεώρησε τὰς ἀριθμητικὰς προόδους ἀνωτέρας τάξεως εἰς τὸ ἔργον του Academiae algebrae (Ulm, 1631) καὶ ἐπὶ πλέον ἐπρότεινε καὶ ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς ἑπτάγωνον μὲ μεγέθη πλευρῶν: 666, 1000, 1260, 1290, 1335, 1600 καὶ 2300, πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἐνεπνεύσθη κατόπιν μελέτης τῆς Ἀποκαλύψεως καὶ τοῦ προφήτου Δανιήλ.

Εἰς τὴν περίοδον αὐτὴν τῆς ζωῆς τοῦ Descartes ἀνάγεται ἡ περιώνυμος νύκτα (10 Νοεμβρίου 1619), κατὰ τὴν ὁποίαν οὗτος ἐνεπνεύσθη μίαν ἀνακάλυψιν τοιαύτης καὶ τοσαύτης σπουδαιότητος, ὥστε ν' ἀποφασίσῃ νὰ εὐχαριστήσῃ τὸν Θεὸν δι' αὐτήν, μεταβαίνων πρὸς τοῦτο ὁ ἴδιος εἰς τὸ Προσκύνημα τοῦ Loreto.

Συνώδευσε κατόπιν εἰς τὴν Αὐστρίαν καὶ Βοημίαν τὰ στρατεύματα τοῦ Δουκὸς τῆς Βαυαρίας (ἐφλέγετο τότε ὁ κόσμος ἀπὸ τὸν τριακονταετῆ πόλεμον) καὶ παρέστη εἰς τὴν μάχην τῆς Πράγας (8 Νοεμβρίου 1620), ἁπλοῦς θεατὴς εἰς αὐτήν, ὅπως καὶ εἰς ὅλας τὰς λοιπὰς συγκρούσεις, αἱ ὁποῖαι ἐξειλίχθησαν ὑπὸ τὰ βλέμματά του. Δύο ἡμέρας ἔπειτα κατέγραφεν εἰς τὰς σημειώσεις του, μὲ ὅρους ἀσαφεῖς, μίαν ἄλλην ἀνακάλυψιν. Πρόκειται κατὰ πᾶσαν πιθανότητα περὶ μιᾶς τελειοποιήσεως τῆς ὀπτικῆς, ὅπως ἀπαντᾶται εἰς ἕνα γνωστὸν ἔργον τοῦ Kepler, τοῦ ὁποίου ὁ Καρτέσιος ἐθεώρει ἑαυτὸν μαθητήν.

Λήγοντος τοῦ 1620 ἢ ἀρχομένου τοῦ 1621, ἐγκατέλειψεν ὁριστικῶς

* Ὁ Beeckmann ἐκράτησε καθ' ὅλην του τὴν ζωὴν ἕνα Ἡμερολόγιον, τὸ ὁποῖον ὑφίσταται ἀκόμη σήμερον καὶ τὸ ὁποῖον προσέφερεν ἐνδιαφερούσας λεπτομερείας περὶ τοῦ γάλλου διανοουμένου. Τὰ χωρία ποὺ ἀναφέρονται εἰς αὐτὸν ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὸν X Τόμον (σελ. 33 καὶ πέραν) τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Descartes.

** Ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Descartes πρὸς τὸν Beeckmann (26 Μαρτίου 1619) συνάγεται ὅτι ἐγνώριζεν ἀπὸ τότε τὰ «κοσσικὰ σημεῖα» (segni cossici), δηλαδὴ τὰ ἀλγεβρικὰ σύμβολα ποὺ ἔμαθεν ἴσως ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Clavio.

τὸ στράτευμα διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρίδα. Κατὰ τὰ ἔτη 1622-23 τὸν εὑρίσκομεν ἐναλλὰξ εἰς Rennes καὶ Παρισίους. Ἀλλὰ τὸ ἀνήσυχον τοῦ χαρακτῆρος του, τὸ ὁποῖον τοῦ ἦτο ἀδύνατον νὰ ὑποτάξῃ, τὸν ὤθησε νὰ ἐπιχειρήσῃ τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1623 νέαν μακρὰν περιήγησιν. Διὰ τῆς Βασιλείας καὶ Ἑλβετίας ἔφθασεν εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ τὴν 16ην Μαρτίου 1624 παρέστη εἰς Βενετίαν εἰς τὴν γνωστὴν τελετὴν τῶν γάμων τοῦ Δόγη μὲ τὴν Ἀδριατικήν. Τότε ἐξεπλήρωσε καὶ τὴν παλαιὰν ἐπιθυμίαν του μεταβαίνων, χάριν προσκυνήματος, εἰς τὴν Παναγίαν τοῦ Loreto, τὴν δὲ 24ην Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους, εὑρέθη ἀναμεμιγμένος μὲ τὸ πλῆθος τῶν πιστῶν τῶν συνελθόντων εἰς Ρώμην πρὸς ἐγκαινίασιν τοῦ Ἰωβηλαίου.

Εἰς τὴν Φλωρεντίαν ἔτυχε φιλόφρονος ὑποδοχῆς ὑπὸ τοῦ Μεγάλου Δουκὸς Φερδινάνδου τοῦ II, ἀλλὰ δὲν εἶδε τὸν Γαλιλαῖον, ἀπόντα πιθανῶς τότε. Κατόπιν ἐπέστρεψεν εἰς τὴν Γαλλίαν, διαμένων σχεδὸν συνεχῶς εἰς Παρισίους. Πολὺ συντόμως ὅμως ἀνεγνώρισεν, ὅτι δι' ἕνα εὐπατρίδην ἡ διαμονὴ εἰς μίαν μεγάλην πόλιν, ὅπου ἦτο γνωστότατος, δὲν συνεβιβάζετο πρὸς τὴν αὐτοσυγκέντρωσιν καὶ τὴν καρποφόρον ἔρευναν (ὅπως ἐδήλωσεν ὁ ἴδιος εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne τὴν 27ην Μαΐου 1638). Διὰ τοῦτο λήγοντος τοῦ 1628, μετεκόμισε κρυφίως εἰς Ὀλλανδίαν (ὅπου συχνὰ μετέβαλλε κατοικίαν), προτιμήσας τὴν χώραν αὐτὴν ὄχι μόνον διότι εἶχεν ἐκεῖ καλοὺς φίλους, ἀλλὰ προσέτι διότι, τῆς χώρας κατοικουμένης ἀπὸ διαμαρτυρομένους, ᾐσθάνετο ἑαυτὸν ἀσφαλῆ ἀπὸ τὰς ἁρπάγας τῆς πανισχύρου τότε Ἱερᾶς Ἐξετάσεως.

Κατὰ τὴν πρώτην περίοδον τῆς διαμονῆς του εἰς τὰς Κάτω Χώρας ἀπερροφήθη ἀπὸ τὴν συγγραφὴν μιᾶς συντόμου μεταφυσικῆς πραγματείας. Ἀλλ' ἕνα ἔκτακτον ἀστρονομικὸν φαινόμενον παρατηρηθὲν εἰς τὴν Ρώμην τὴν 29ην Μαρτίου 1629 (ὁ π α ρ ή λ ι ο ς· ὁμιλεῖ περὶ τούτου εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 8 Ὀκτωβρίου 1629) τὸν παρεκίνησε ν' ἀφοσιωθῇ ἀποκλειστικῶς εἰς μελέτας οὐρανίου φυσικῆς. Σημειωτέον ὅτι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην (ἐπιστολή του πρὸς τὸν ἴδιον παραλήπτην ὑπὸ χρονολογίαν 15 Ἀπριλίου 1630) ἐξέφραζε τὴν πνευματικήν του διάθεσιν μὲ τὴν δήλωσιν ὅτι «εἶχε τόσον βαρυνθῆ τὰ μαθηματικά, ὥστε νὰ μὴ ἐπιτυγχάνῃ μὲ αὐτὰ πολλὰ πράγματα».

Αἱ σπουδαὶ του εἰς τὴν φυσικὴν τοῦ οὐρανοῦ διήρκεσαν μέχρι τοῦ 1633, καρπὸς δὲ τούτων ὑπῆρξεν ἕνα ἔργον του Π ε ρ ὶ τ ο ῦ Κ ό σ μ ο υ, ὅπου τὸ Κοπερνίκειον σύστημα, κατέχον κεντρικὴν θέσιν, παρουσιάζετο ὑπὸ εὐνοϊκὸν φῶς. Ἀλλ' ἡ ἐξενεχθεῖσα ἐν τῷ μεταξὺ καταδίκη τοῦ Γαλιλαίου διὰ τὰς ἰδέας του, ὤθησε τὸν παλαιὸν μαθητὴν τῶν Ἰησουϊτῶν νὰ παραιτηθῇ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ ἔργου του, ἡ ὁποία, ἐκτὸς τοῦ ὅτι θὰ τοῦ ἐστοίχιζε περιπετείας καὶ ἀηδιαστικὰς ἀπειλάς, θὰ τὸν ὡδήγει συγχρόνως εἰς ρῆξιν μὲ τοὺς παλαιούς του διδασκάλους (ἐπιστολαὶ πρὸς Mersenne:

Νοεμβρίου 1633 καὶ Ἀπριλίου 1634). Ἐπεδόθη τότε εἰς μίαν προσπάθειαν νὰ ἐκθέσῃ ὑπὸ μορφὴν ὀλιγώτερον ἐπικίνδυνον τ' ἀποτελέσματα τῶν μακρῶν μελετῶν του καὶ οὕτω ἔλαβον γένεσιν τὰ τρία διάσημα δοκίμια: Διοπτρική, Μετέωρα, Γεωμετρία. Ἐν τούτοις, ἐνῷ τὸ πρῶτον ἦτο ἕτοιμον πρὸς ἐκτύπωσιν ἀπὸ τοῦ Ὀκτωβρίου 1635, τὸ δεύτερον δὲν ἐτελείωσε παρὰ μετὰ δύο ἔτη, ἐνῷ τὸ τρίτον ἐγράφη διαρκούσης τῆς ἐκτυπώσεως τῶν Μετεώρων. Ἐνῷ εἶχε τελειώσει τὰ δύο πρῶτα καὶ κατεγίνετο μὲ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τρίτου, ὁ Descartes ἀνεγνώρισεν, ὅτι διὰ νὰ δώσῃ εἰς τὰ ἔργα του ὀργανικὴν ἑνότητα ἔπρεπε νὰ προτάξῃ ἕνα πρόλογον. Ἀλλ' ὁ πρόλογος αὐτὸς δὲν ἐβράδυνε νὰ λάβῃ διαστάσεις σημαντικὰς καὶ τέλος νὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἰδιαίτερον δοκίμιον ὑπὸ τὸν διάσημον τίτλον: Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Λόγος περὶ μεθόδου διὰ νὰ ὁδηγῇ κανεὶς καλῶς τὸ λογικόν του καὶ ν' ἀναζητῇ τὴν ἀλήθειαν εἰς τὰς ἐπιστήμας). Τὸ ἔργον τοῦτο, συνοδευόμενον ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα δοκίμια, ἐδημοσιεύθη τὸ 1637 εἰς Leiden, ὅπου ὁ Descartes εἶχεν ἐν τῷ μεταξὺ ἐγκατασταθῆ.

Εἰς τὸν Λόγον περὶ μεθόδου ἔχουν διατυπωθῆ οἱ τέσσαρες μεθοδικοὶ κανόνες, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ καθοδηγοῦν τὴν ἔρευναν πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς ἀληθείας: α) Νὰ μὴ παραδεχώμεθα τίποτε ὡς ἀληθές, ἂν τοῦτο δὲν τὸ ἀναγνωρίσωμεν ὡς ἀληθὲς κατὰ τρόπον ἐναργῆ καὶ ἀνεπίδεκτον ἀμφιβολίας, β) Ν' ἀναλύωμεν τὰ δύσκολα προβλήματα εἰς μερικώτερα, ὥστε ἡ λύσις των νὰ καθίσταται εὐχερεστέρα, γ) Νὰ κατευθύνωμεν τὴν σκέψιν μας μὲ τάξιν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἁπλούστερα καὶ προχωροῦντες εἰς τὰ συνθετώτερα, δ) Νὰ κάμνωμεν πάντοτε ἀπαριθμήσεις καὶ ἀνασκοπήσεις διὰ νὰ βεβαιωνώμεθα ὅτι δὲν παρελείψαμεν τίποτε.

Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ τονίσωμεν ὅτι, ἐνῷ οἱ τρεῖς τελευταῖοι κανόνες ἀνήκουν εἰς τὴν ἐκ παραδόσεως γνωστὴν Λογικήν, ὁ Descartes, μὲ τὸ νὰ διατυπώσῃ τὸν πρῶτον κανόνα, ὕψωσε τὴν σημαίαν τῆς ἐπαναστάσεως ἐναντίον πάσης αὐθεντίας, τοποθετηθεὶς συγχρόνως ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ φιλοσοφικοῦ κινήματος ποὺ χαρακτηρίζεται συνήθως μὲ τὸ ὄνομα «ὀρθολογισμός». Καίτοι δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι ὁ ἴδιος ἐτήρησε πιστῶς πάντοτε τὴν σοφὴν αὐτὴν ἀρχὴν (διότι, π.χ., ἡ φυσική του στηρίζεται οὐχὶ ἐπὶ τῆς ἐμπειρίας καὶ τῆς παρατηρήσεως, ἀλλ' ἐπὶ παραδοχῶν à priori), ἐν τούτοις, τὸ νὰ διατυπώσῃ τὸν κανόνα τοῦτον θαρραλέως ὡς θεμέλιον πάσης καρποφόρου ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης, ἀποτελεῖ τίτλον τιμῆς τόσον μεγάλον, ὥστε ἐξησφάλισεν εἰς τὸν Descartes μίαν θέσιν μεταξὺ τῶν ἡρώων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος.

340. Ἡ ὑποδοχὴ τὴν ὁποίαν ἐπεφύλαξεν ὁ κόσμος τῶν διανοουμένων εἰς τὸ μέγα τετραμερὲς ἔργον ὑπῆρξεν ἐν γένει κολακευτική, χωρὶς ὅμως

νὰ λείψουν αἱ κριτικαὶ καὶ αἱ ἀντιθέσεις. Οἱ ἔπαινοι ἀνεμίχθησαν μὲ τὰς ἐπικρίσεις, τὰ «ὡσαννὰ» μὲ τὰ «σταυρωθήτω». Κατὰ συνέπειαν, τὰ τρία ἑπόμενα ἔτη ἔδωσαν ἀφορμὴν εἰς τὸν Descartes ν' ἀπορροφηθῇ εἰς τὸ ἔργον τῆς διευκρινήσεως τῶν ἐπισημανθέντων σκοτεινῶν σημείων τῆς ἐκθέσεώς του, συγχρόνως δὲ νὰ δώσῃ ἀπαντήσεις εἰς ἀντιρρήσεις, μᾶλλον ἢ ἧττον βασίμους, διατυπωθείσας ὑπὸ φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν διαφόρου στάθμης, εἴτε ἀμέσως, εἴτε ἐμμέσως διὰ τοῦ Mersenne. Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ μορφώσῃ μίαν ἰδέαν τῶν ἀγώνων τούτων, οἱ ὁποῖοι καίτοι ἀναίμακτοι προσελάμβανον ἐνίοτε ἰδιαιτέραν ὀξύτητα, πρέπει νὰ καταφύγῃ εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ μεγάλου διανοουμένου. Μὲ τοὺς φιλοσόφους τοὐναντίον ἦλθεν εἰς ρῆξιν βραδύτερον, καὶ δὴ ὅταν, μετὰ δεκαετίαν, ἐδημοσιεύθησαν τὰ ἔργα του ἐκεῖνα, ὅπου εἰς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας ἐδίδετο δευτερεύουσα θέσις. Κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν διετήρει συχνοτάτην ἀλληλογραφίαν μὲ μίαν μορφωμένην ἀνακτορικὴν πριγκίπισσαν Ἐλισάβετ (γεννηθ. 1618, ἀποθ. 1680), πρᾶγμα ποὺ τοῦ ἔδωσε τὴν εὐκαιρίαν ν' ἀναπτύξῃ τὰς ἰδέας του καὶ νὰ ὑποδείξῃ νέας ἐφαρμογὰς τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἐπινοηθεισῶν μεθόδων. Συγχρόνως ἐπραγματοποίησε συχνὰ ταξίδια εἰς τὴν Γαλλίαν πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ἐνδιαφερόντων του, ἀλλὰ καὶ πρὸς συνάντησιν συμπατριωτῶν του ἀφιερωμένων εἰς μελέτας (μεταξὺ τῶν ὁποίων περιοριζόμεθα νὰ μνημονεύσωμεν τώρα τὸν B. Pascal). Ὁ Λουδοβῖκος XIV τοῦ παρεχώρησε τὸ 1648 μίαν ἐτησίαν ἐπιχορήγησιν μὲ τὴν κρυφὴν ἐλπίδα νὰ τὸν ἐπαναφέρῃ μονίμως εἰς τὴν πατρίδα, χωρὶς ὅμως νὰ ἐπιτύχῃ τὸν σκοπόν.

Ὁ Chanut, πρέσβυς τῆς Γαλλίας εἰς τὴν Αὐλὴν τῆς Σουηδίας, εἶχεν ὁμιλήσει κατ' ἐπανάληψιν μὲ θερμὸν ἐνθουσιασμὸν περὶ τοῦ Descartes εἰς τὴν βασίλισσαν Χριστίναν, ἡ ὁποία φλεγομένη ἀπὸ τὴν ἐπιθυμίαν νὰ συνδέσῃ τὸ ὄνομά της μὲ «κάτι τὸ μεγάλο» συνέλαβε τὴν ἰδέαν νὰ φέρῃ πλησίον της τὸν συγγραφέα τοῦ Discours de la méthode. Αἱ διαπραγματεύσεις, διεξαχθεῖσαι μὲ μεγάλην διπλωματικὴν δεξιότητα ὑπὸ τοῦ Chanut, ἐστέφθησαν ὑπὸ πλήρους ἐπιτυχίας* καὶ οὕτω τὴν 1ην Σεπτεμβρίου 1649 ὁ Descartes ἐγκατέλειψε τὴν Ὀλλανδίαν κατευθυνόμενος πρὸς τὸ βορειότερον βασίλειον τῆς Εὐρώπης. Μοιραία ἀπόφασις! Εἴτε διότι ὁ Descartes εὗρε τὸ κλῖμα τῆς Σουηδίας ἐξαιρετικὰ δριμύ, εἴτε διότι ἐκλόνισε τὴν ὑγείαν του ἡ παράδοξος ἀπαίτησις τῆς βασιλίσσης νὰ γίνεται τὸ μάθημά της καθ' ἑκάστην εἰς τὰς 5 τὸ πρωί, γεγονὸς εἶναι ὅτι δὲν ἐβράδυνε νὰ πέσῃ βαρέως

---

* Ἀποδεχόμενος τὴν βασιλικὴν πρόσκλησιν ὁ Descartes δὲν συνεμορφώθη πρὸς τὴν ἀκόλουθον δήλωσίν του, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν εἰς τὸ Discours de la méthode: «Θὰ εἶμαι πάντοτε περισσότερον εὐγνώμων πρὸς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θὰ μ' εὐνοήσουν ὥστε ν' ἀπολαύσω ἀνεμποδίστως τὸν διαθέσιμον χρόνον μου, παρὰ πρὸς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θὰ μοῦ προσφέρουν τὰς πλέον τιμητικὰς θέσεις ἐπὶ τῆς γῆς».

ἀσθενής. Ἔπειτα ἀπὸ μίαν ὀξεῖαν πνευμονίαν, ἐξέπνευσεν ἠρέμως τὴν 11ην Φεβρουαρίου 1650, ἀφίνων ἄφατον πένθος εἰς τοὺς πολυαρίθμους θαυμαστὰς καὶ φίλους του, οἱ ὁποῖοι ἀνέμενον ἀπὸ αὐτὸν νέας πολυτίμους κατακτήσεις.

Κατόπιν ἐνεργειῶν τοῦ Chanut ἀνηγέρθη εἰς τὴν Στοκχόλμην πρὸς τιμήν του μνημεῖον ἀντάξιον. Ἀλλὰ τὸ μνημεῖον ἐκεῖνο δὲν ἐπρόκειτο νὰ παραμείνῃ τὸ τελευταῖον ἄσυλον τῶν ὀστῶν τοῦ μεγάλου ἀνδρός. Πράγματι τὸ 1666 οἱ πολυάριθμοι θαυμασταί του εἰς Παρισίους ἤρχισαν νὰ ἐνεργοῦν διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν λειψάνων εἰς τὴν πατρίδα του καὶ δὲν ἐβράδυναν νὰ ἐπιτύχουν τὸν σκοπόν των, διότι τὴν 24ην Ἰουνίου 1667 ἔλαβε χώραν ὁ ἐπίσημος ἐνταφιασμὸς τοῦ Descartes εἰς τὴν ἐκκλησίαν Saint-Geneviève-du-Mont. Ἀπὸ τὸ μέτριον ἐκεῖνο ἄσυλον ἐσκέφθη, ἕνα αἰῶνα ἀργότερα, νὰ τὸν μεταφέρῃ ἡ Convention nationale· τὸ σχετικὸν Διάταγμα (2-4 Ὀκτωβρίου 1793) ἤρχισεν ἐφαρμοζόμενον μὲ τὴν διακομιδὴν τῶν λειψάνων τοῦ Descartes εἰς τὸ Jardin Elisée τῶν γαλλικῶν μνημείων, ἐν ἀναμονῇ ὁριστικῆς μετακομιδῆς των εἰς τὸ Πάνθεον. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἐπραγματοποιήθη· ἀποφασισθείσης δὲ τῆς καταστροφῆς ἐκείνου τοῦ κήπου, ἡ σορὸς τοῦ φιλοσόφου ἐτάφη ἐντὸς τῆς ἐκκλησίας τοῦ Saint-Germain-des-Près, ὅπου καὶ ἀναπαύεται μέχρι σήμερον.

Παρὰ ταῦτα, ἡ ματαιωθεῖσα ἀποθέωσις δὲν πρέπει νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς προδίδουσα κάποιαν χλιαρότητα εἰς τὰ αἰσθήματα θαυμασμοῦ τῆς Γαλλίας πρὸς τὸ μέγα τέκνον της. Ἀρκοῦν νὰ τὸ ἀποδείξουν αἱ πολυάριθμοι ἐκδόσεις τῶν ἔργων του, τὰ ἀναρίθμητα βιβλία ποὺ ἐγράφησαν πρὸς ἀνάλυσιν καὶ μελέτην τοῦ Καρτεσιανισμοῦ ὑπὸ τὰς ποικίλας του ὄψεις, ὡς καὶ ἡ δημοσίευσις μιᾶς πλήρους καὶ ὁριστικῆς πολυτελοῦς ἐκδόσεως τῶν Ἀπάντων του, ἡ ὁποία ἀπεφασίσθη μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἑορτασθῇ κατὰ τὸν ἐκφραστικώτερον τρόπον ἡ τρίτη ἑκατονταετηρὶς ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του.

Ἐλάσσονες μαθηματικοὶ σύγχρονοι τοῦ Descartes

341. Μὲ τὸν Descartes εἶχε πολλὰς καὶ διαφόρων ἀποχρώσεων σχέσεις ἕνας ἄλλος μαθηματικός, ὁ Gilles Personnes, ὁ ὁποῖος γεννηθεὶς εἰς Roberval (τῆς ἐπισκοπῆς τοῦ Beauvais) τὴν 8ην Αὐγούστου 1602, προσέλαβε τὸ ὄνομα τοῦ τόπου τῆς γεννήσεώς του καὶ διὰ τοῦτο ἀναφέρεται συνήθως μὲ τὸ ὄνομα Roberval. Ἀπὸ νεανικῆς ἡλικίας (1628) ἠκολούθησε τὴν ἐπιστημονικὴν σταδιοδρομίαν. Παρέστη εἰς τὴν πολιορκίαν τῆς La Rochelle, κατόπιν δὲ ἐγκατεστάθη εἰς Παρισίους, ὅπου τὸ 1631 κατέλαβε μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Κολλέγιον Gervais. Ὀλίγον ἔπειτα κατέλαβε κατόπιν διαγωνισμοῦ τὴν θέσιν τοῦ καθηγητοῦ εἰς τὸ Γαλλικὸν Κολλέγιον (Collège de France), τὴν ὁποίαν καὶ διετήρησε μέχρι τοῦ θανάτου του (27 Ὀκτωβρίου 1675), γεγονὸς τιμητικὸν δι' αὐτόν, καθ' ὅσον, διὰ νομοθετικῆς

ἀσθενής. Ἔπειτα ἀπὸ μίαν ὀξεῖαν πνευμονίαν, ἐξέπνευσεν ἠρέμως τὴν 11ην Φεβρουαρίου 1650, ἀφίνων ἄφατον πένθος εἰς τοὺς πολυαρίθμους θαυμαστὰς καὶ φίλους του, οἱ ὁποῖοι ἀνέμενον ἀπὸ αὐτὸν νέας πολυτίμους κατακτήσεις.

Κατόπιν ἐνεργειῶν τοῦ Chanut ἀνηγέρθη εἰς τὴν Στοκχόλμην πρὸς τιμήν του μνημεῖον ἀντάξιον. Ἀλλὰ τὸ μνημεῖον ἐκεῖνο δὲν ἐπρόκειτο νὰ παραμείνῃ τὸ τελευταῖον ἄσυλον τῶν ὀστῶν τοῦ μεγάλου ἀνδρός. Πράγματι τὸ 1666 οἱ πολυάριθμοι θαυμασταί του εἰς Παρισίους ἤρχισαν νὰ ἐνεργοῦν διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν λειψάνων εἰς τὴν πατρίδα του καὶ δὲν ἐβράδυναν νὰ ἐπιτύχουν τὸν σκοπόν των, διότι τὴν 24ην Ἰουνίου 1667 ἔλαβε χώραν ὁ ἐπίσημος ἐνταφιασμὸς τοῦ Descartes εἰς τὴν ἐκκλησίαν Saint-Geneviève-du-Mont. Ἀπὸ τὸ μέτριον ἐκεῖνο ἄσυλον ἐσκέφθη, ἕνα αἰῶνα ἀργότερα, νὰ τὸν μεταφέρῃ ἡ Convention nationale· τὸ σχετικὸν Διάταγμα (2-4 Ὀκτωβρίου 1793) ἤρχισεν ἐφαρμοζόμενον μὲ τὴν διακομιδὴν τῶν λειψάνων τοῦ Descartes εἰς τὸ Jardin Elisée τῶν γαλλικῶν μνημείων, ἐν ἀναμονῇ ὁριστικῆς μετακομιδῆς των εἰς τὸ Πάνθεον. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἐπραγματοποιήθη· ἀποφασισθείσης δὲ τῆς καταστροφῆς ἐκείνου τοῦ κήπου, ἡ σορὸς τοῦ φιλοσόφου ἐτάφη ἐντὸς τῆς ἐκκλησίας τοῦ Saint-Germain-des-Près, ὅπου καὶ ἀναπαύεται μέχρι σήμερον.

Παρὰ ταῦτα, ἡ ματαιωθεῖσα ἀποθέωσις δὲν πρέπει νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς προδίδουσα κάποιαν χλιαρότητα εἰς τὰ αἰσθήματα θαυμασμοῦ τῆς Γαλλίας πρὸς τὸ μέγα τέκνον της. Ἀρκοῦν νὰ τὸ ἀποδείξουν αἱ πολυάριθμοι ἐκδόσεις τῶν ἔργων του, τὰ ἀναρίθμητα βιβλία ποὺ ἐγράφησαν πρὸς ἀνάλυσιν καὶ μελέτην τοῦ Καρτεσιανισμοῦ ὑπὸ τὰς ποικίλας του ὄψεις, ὡς καὶ ἡ δημοσίευσις μιᾶς πλήρους καὶ ὁριστικῆς πολυτελοῦς ἐκδόσεως τῶν Ἁπάντων του, ἡ ὁποία ἀπεφασίσθη μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἑορτασθῇ κατὰ τὸν ἐκφραστικώτερον τρόπον ἡ τρίτη ἑκατονταετηρὶς ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του.

Ἐλάσσονες μαθηματικοὶ σύγχρονοι τοῦ Descartes

341. Μὲ τὸν Descartes εἶχε πολλὰς καὶ διαφόρων ἀποχρώσεων σχέσεις ἕνας ἄλλος μαθηματικός, ὁ Gilles Personnes, ὁ ὁποῖος γεννηθεὶς εἰς Roberval (τῆς ἐπισκοπῆς τοῦ Beauvais) τὴν 8ην Αὐγούστου 1602, προσέλαβε τὸ ὄνομα τοῦ τόπου τῆς γεννήσεώς του καὶ διὰ τοῦτο ἀναφέρεται συνήθως μὲ τὸ ὄνομα Roberval. Ἀπὸ νεανικῆς ἡλικίας (1628) ἠκολούθησε τὴν ἐπιστημονικὴν σταδιοδρομίαν. Παρέστη εἰς τὴν πολιορκίαν τῆς La Rochelle, κατόπιν δὲ ἐγκατεστάθη εἰς Παρισίους, ὅπου τὸ 1631 κατέλαβε μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Κολλέγιον Gervais. Ὀλίγον ἔπειτα κατέλαβε κατόπιν διαγωνισμοῦ τὴν θέσιν τοῦ καθηγητοῦ εἰς τὸ Γαλλικὸν Κολλέγιον (Collège de France), τὴν ὁποίαν καὶ διετήρησε μέχρι τοῦ θανάτου του (27 Ὀκτωβρίου 1675), γεγονὸς τιμητικὸν δι' αὐτόν, καθ' ὅσον, διὰ νομοθετικῆς

διατάξεως, ἡ πλήρωσις τῆς ἕδρας ἐτίθετο ὑπὸ διαγωνισμὸν ἀνὰ τριετίαν. Ἀκριβῶς δὲ διὰ νὰ μὴ ἀφίσῃ νὰ τοῦ διαφύγῃ ἐκράτει πάντοτε ὡς ἐφεδρείαν «μίαν ποσότητα ἐξαισίων πραγμάτων, ποὺ ἀνεκάλυπτεν». Καὶ πράγματι, ἐν ζωῇ δὲν παρέδωσεν εἰς τὸν τυπογράφον παρὰ ἕνα μικρὸν ἔργον στατικῆς (παρεμβληθὲν εἰς μίαν ἔκδοσιν τοῦ Mersenne) καὶ μερικὰς παρατηρήσεις του περὶ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου. Ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκεν ἀπὸ τοῦ 1666, ἀφιέρωσεν ἕνα τόμον τῶν ὑπομνημάτων της εἰς τὰ πολυάριθμα ἄρθρα του, τὰ ὁποῖα μὲ πραγματικὴν ἀγάπην καὶ ἐπιμέλειαν συνεκέντρωσεν ὁ ἀββᾶς Gallois. Αἱ πολεμικαί του μὲ τὸν Descartes καὶ τὸν Torricelli μᾶς τὸν ἐμφανίζουν ὑπὸ ἕνα φῶς ὄχι τόσον εὐνοϊκὸν ἀπὸ ἠθικῆς ἀπόψεως. Ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τῆς ἐποχῆς του ἀπαντῶνται λεπτομέρειαι, αἱ ὁποῖαι τὸν παρουσιάζουν ὡς ἄνθρωπον ἀγροῖκον καὶ βίαιον.

Θ' ἀναφέρωμεν ἐδῶ ἕνα περιστατικὸν ποὺ τὸν ἀφορᾷ. Ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του μὲ τὸν Mersenne προκύπτει, ὅτι ὁ Descartes δὲν εἶχεν ἀντίρρησιν νὰ δημοσιευθοῦν αἱ ἐπιστολαί του (αἱ ὁποῖαι ἦσαν εἰς τὴν διάθεσιν οἱουδήποτε ἐπιθυμοῦντος νὰ λάβῃ γνῶσιν) ὁμοῦ μὲ τὰς κριτικάς του. Δύο φοράς, μάλιστα, συνέταξε τὸ σχέδιον μιᾶς πλήρους ἐκθέσεως ὅλων τῶν ἐρίδων, εἰς τὰς ὁποίας εἶχεν ἐμπλακῆ, χωρὶς ὅμως τὸ σχέδιον τοῦτο νὰ λάβῃ συνέχειαν. Διότι μόλις ἀπέθανεν ὁ Mersenne, ὁ Roberval ὑπὸ τὸ πρόσχημα τῆς παραλαβῆς στοιχείων ἀπαραιτήτων πρὸς ἐκτύπωσιν ἐργασίας του, εἰσέδυσεν εἰς τὸ κελλίον τοῦ πατρὸς ἐκείνου, ἀπεκόμισε τὰς ἐπιστολὰς τῶν ὁποίων ἦτο θεματοφύλαξ ὁ Mersenne καὶ κατόπιν ἠρνήθη νὰ παρουσιάσῃ αὐτὰς εἰς τὸν Clerselier, ὁ ὁποῖος παρεσκεύαζε τὴν ἐκτύπωσιν τῆς καρτεσιανῆς ἀλληλογραφίας καὶ ὁ ὁποῖος ἠναγκάσθη, κατόπιν τοῦ γεγονότος αὐτοῦ, νὰ χρησιμοποιήσῃ τὰ ἀτελῆ πρωτότυπα σχέδια, ποὺ εἶχεν ἀφίσει ὁ μέγας φιλόσοφος.

Κατὰ καλὴν τύχην ὁ Roberval δὲν ὤθησε τὴν ἀπρέπειαν μέχρι τοῦ σημείου τῆς καταστροφῆς τῶν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα εἶχεν ὑπεξαιρέσει. Καὶ κατὰ τὸν θάνατόν του ἕνας μαθηματικός, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον, ὁ La Hire, κατώρθωσε νὰ τὰ ἐπανεύρῃ καὶ νὰ τὰ καταθέσῃ εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν. Ἡ διαγωγὴ τοῦ Roberval ἀποδεικνύει, ὅτι κάποιον λόγον εἶχεν ὁ ἴδιος ν' ἀνησυχῇ ἐκ τῆς δημοσιεύσεως τῶν ἐπιστολῶν· ἀδίκως ὅμως, ὡς φαίνεται· διότι ἀπαντᾶται εἰς αὐτὰς μία δήλωσις, ἡ ὁποία καὶ μόνη ἠδύνατο νὰ τὸν καταστήσῃ δικαίως ὑπερήφανον: «Ὁ κύριος Roberval.... εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν.... ἕνας ἐκ τῶν πρώτων γεωμετρῶν τῆς ἐποχῆς μας».

342. Ἕνα ἄλλο πρόσωπον τῆς ἰδίας ἐποχῆς εἶναι ὁ Jean Beaugrand, ἀποθανὼν ὀλίγον πρὸ τοῦ 1641, περὶ τῆς ζωῆς τοῦ ὁποίου τίποτε δὲν γνωρί-

ζομεν πέραν τῆς πληροφορίας ὅτι, ὑπὸ τὸν Richelieu, κατεῖχεν ὑψηλὸν διοικητικὸν ἀξίωμα. Μερικαὶ σημειώσεις του εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Viète (τοῦ ὁποίου ἦτο θερμὸς θαυμαστὴς) ἔτυχον τόσον εὐμενοῦς κριτικῆς, ὥστε ἐνεσωματώθησαν εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν Ἁπάντων τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ Schooten. Ἕνα ἄλλο ἔργον του Γεωστατικὴ (Géostatice) θὰ εἶχεν ἀσφαλῶς περιπέσει εἰς λήθην, ἂν ὁ Descartes δὲν εἶχε κάμει περὶ αὐτοῦ εἰς τὰς ἐπιστολάς του δυσμενῆ κριτικήν.

Ἄλλα πρόσωπα μικροτέρας σημασίας ἐμφανίζονται εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος μελετᾷ ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως τὴν Γαλλίαν τοῦ XVII αἰῶνος. Ἀναφέρομεν τὸν Claude Hardy (γεννηθέντα εἰς Mans περὶ τὸ 1598, ἀποθανόντα εἰς Παρισίους τὴν 5ην Ἀπριλίου 1678), ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, ἐπειδὴ ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ Descartes ὡς διαιτητὴς εἰς μίαν ἔριδα ἀναφυεῖσαν μὲ τὸν Fermat. Εἰς τὴν ἐμπιστευτικὴν αὐτὴν ἀποστολὴν εἶχε σύντροφον τὸν Claude Mydorge (γεννηθ. εἰς Παρισίους τὸ 1585, ἀποθ. ἐκεῖ τὸν Ἰούλιον 1647), ἄλλο πρόσωπον τοῦ ὁποίου αἱ σοβαραὶ διοικητικαὶ ἀπασχολήσεις δὲν ἐμάραναν τὸν ἔρωτα πρὸς τὰς ἐρεύνας εἰς τὴν καθαρὰν γεωμετρίαν. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ μίαν πραγματείαν του ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν (Α΄ ἔκδοσις 1631 εἰς δύο βιβλία· Β΄ ἔκδοσις 1641 εἰς τέσσαρα), γραφεῖσαν κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν ἀρχαίων κειμένων καὶ περιέχουσαν οὐχὶ εὐκαταφρονήτους προσθήκας εἰς ὅσα οἱ ἀρχαῖοι εἶχον γράψει ἐπὶ τοῦ θέματος. Δὲν εἶναι ἀπίθανον νὰ ὡδηγήθη εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτὰς ἐκ παρακινήσεων τοῦ Golio, ὁ ὁποῖος περὶ τὸ 1630 τὸν εἶχε παροτρύνει ν᾽ ἀσχοληθῇ μὲ τὸ ἀρχαῖον πρόβλημα, ὅπου ζητεῖται «ὁ ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπος» (Τόμος I, σελ.. 89).

Εἰς τὸν δικαστικὸν κλάδον ἀνήκει ἐξ ἄλλου ὁ Bernard Frenicle de Bessy. Γεννηθεὶς εἰς Παρισίους περὶ τὸ 1605, κατέστη διάσημος διὰ τὴν μοναδικήν του δεξιότητα εἰς τὴν λύσιν ἀριθμητικῶν προβλημάτων. Εὑρίσκετο εἰς ἀλληλογραφίαν μὲ τοὺς ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του, παρουσιάζων ἐφαρμογὰς μεθόδων ἰδικῆς του ἐπινοήσεως, τὰς ὁποίας ὅμως ἐκράτει ζηλοτύπως μυστικάς. Περὶ τὸ 1660 ἔπαυσεν ἀσχολούμενος μὲ τὴν ἀριθμητικὴν διὰ ν᾽ ἀφοσιωθῇ ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν θεολογίαν καὶ τὰς θρησκευτικὰς πράξεις. Ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὸ 1675. Ὑπῆρξε Μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς της. Τὰ ἔργα του συνεκέντρωσεν ὁ La Hire, μετὰ τὸν θάνατον τοῦ συγγραφέως, καὶ ἐδημοσίευσεν εἰς τὸν Τόμον V τῶν Mémoires τῆς Ἀκαδημίας. Τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἔργα, ποὺ ἀπαντῶνται ἐκεῖ, φέρει τίτλον: Méthode pour trouver la solution des problèmes par les exlusions (Μέθοδος λύσεως τῶν προβλημάτων διὰ τῶν ἀποκλεισμῶν). Ἐκφράζει ἐκεῖ ὁ συγγραφεὺς τὴν γνώμην, ὅτι σκοπὸς τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἡ λύσις εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς προβλημάτων μὴ ὡρισμένων καὶ ἀναλαβάνει νὰ ὑποδείξῃ τεχνάσματα πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν λύσεων μέσῳ καταλ-

λήλων δοκιμῶν, περιοριζόμενος μόνον εἰς τὴν ἐξέτασιν προβλημάτων, ὅπου ζητεῖται ἡ εὕρεσις ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Εἰς βαθυτέραν μελέτην τῶν ὀρθογωνίων τούτων τριγώνων εἰσέρχεται εἰς ἄλλο ἔργον του μὲ τίτλον: Traité des triangles rectangles en nombres (Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμούς), δημοσιευθὲν διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1676 καὶ ἀνατυπωθὲν τὸ ἑπόμενον ἔτος. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀποδεικνύονται ἀξιόλογοι ἰδιότητες. Ἀποδεικνύεται π.χ. τὸ θεώρημα τοῦ Fermat: «τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς ἀριθμοὺς δὲν δύναται ποτὲ νὰ εἶναι τετράγωνον» καὶ συμπληρώνεται μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι δὲν δύναται ἐπίσης ποτὲ νὰ εἶναι διπλάσιον ἑνὸς τετραγώνου.

Ἀκολουθεῖ τὸ ἔργον Abregé des combinaisons (Συνεπτυγμένη συνδυαστική), ὅπου δὲν ἀπαντῶνται οὐσιαστικῶς νέα πράγματα οὔτε εἰς τὸ θεωρητικὸν μέρος, οὔτε εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τούτου εἰς παιγνίδια ἢ ζητήματα κερδῶν. Ὁ συγγραφεὺς ὅμως εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ δώσῃ δείγματα τῆς ἐκτάκτου ἱκανότητός του εἰς τὸν ἀριθμητικὸν λογισμόν.

Ἡ ἀξιολογωτέρα δημιουργία τοῦ Frenicle εἶναι μία ἐκτεταμένη πραγματεία Περὶ μαγικῶν τετραγώνων, ὅπου ἡ σχετικὴ θεωρία ἀναπτύσσεται εἰς μέγα βάθος καὶ εἰς ἔκτασιν. Περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν τὴν ἀνακάλυψιν τοὐλάχιστον 880 μαγικῶν τετραγώνων, σχηματιζομένων μὲ τοὺς 16 πρώτους ἀριθμοὺς τῆς φυσικῆς σειρᾶς.

Τὸ «opus magnum» τοῦ Descartes καὶ ἡ δημιουργία τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας

343. Ὅταν ὁ ἱστορικὸς εὑρίσκεται ἐνώπιον τοῦ ἔργου ἑνὸς μεγάλου, πρῶτον καὶ σπουδαῖον ζήτημα ποὺ ἀντιμετωπίζει εἶναι ἡ ἀναζήτησις τῶν πηγῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ συγγραφεύς. Προκειμένου περὶ τοῦ Descartes, τὸ πρᾶγμα παρουσιάζει μεγάλας δυσκολίας, διότι ὁ ἐν λόγῳ στοχαστὴς υἱοθέτησε σταθερῶς τὸ σύστημα τῆς προσηλώσεώς του εἰς τὸ ρεῦμα τῶν ἰδικῶν του ἀποκλειστικῶς σκέψεων, μὴ καταφεύγων εἰς τοὺς προγενεστέρους παρὰ μόνον ὅταν αὐτὸ τοῦ ἦτο ἀπολύτως ἀπαραίτητον. Καὶ ἐπειδή, ἐκ λόγων ἀρχῆς καὶ χαρακτῆρος, ἦτο ἐναντίον πάσης αὐθεντίας, ἐθεώρει ἀναξίαν ἀπασχόλησιν τὸν προσδιορισμὸν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔδωσαν οἱανδήποτε ἀφορμὴν εἰς τὰς ἐμπνεύσεις του, μὲ μοναδικὴν ἐξαίρεσιν τοὺς κορυφαίους γεωμέτρας τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος, εἰς τὴν μελέτην τῶν ὁποίων ἐστράφη καθ' ὑπόδειξιν τοῦ φίλου του Beeckmann.

Διὰ νὰ τοῦ ἀποσπάσουν κάποιαν ὁμολογίαν ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ζητήματος ἐχρειάσθη μακρὰ ἀναδίφησις τῶν ἀνεκδότων σελίδων, τὰς ὁποίας κατέλιπε καὶ τῶν πολυαρίθμων ἐπιστολῶν ποὺ σῴζονται μέχρι σήμερον. Τοιουτοτρόπως ἔφθασαν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν τοῦ ἦτο ἄγνωστος ἡ συμβολικὴ

λήλων δοκιμῶν, περιοριζόμενος μόνον εἰς τὴν ἐξέτασιν προβλημάτων, ὅπου ζητεῖται ἡ εὕρεσις ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Εἰς βαθυτέραν μελέτην τῶν ὀρθογωνίων τούτων τριγώνων εἰσέρχεται εἰς ἄλλο ἔργον του μὲ τίτλον: Traité des triangles rectangles en nombres (Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμούς), δημοσιευθὲν διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1676 καὶ ἀνατυπωθὲν τὸ ἑπόμενον ἔτος. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀποδεικνύονται ἀξιόλογοι ἰδιότητες. Ἀποδεικνύεται π.χ. τὸ θεώρημα τοῦ Fermat: «τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς ἀριθμοὺς δὲν δύναται ποτὲ νὰ εἶναι τετράγωνον» καὶ συμπληρώνεται μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι δὲν δύναται ἐπίσης ποτὲ νὰ εἶναι διπλάσιον ἑνὸς τετραγώνου.

Ἀκολουθεῖ τὸ ἔργον Abregé des combinaisons (Συνεπτυγμένη συνδυαστική), ὅπου δὲν ἀπαντῶνται οὐσιαστικῶς νέα πράγματα οὔτε εἰς τὸ θεωρητικὸν μέρος, οὔτε εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τούτου εἰς παιγνίδια ἢ ζητήματα κερδῶν. Ὁ συγγραφεὺς ὅμως εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ δώσῃ δείγματα τῆς ἐκτάκτου ἱκανότητός του εἰς τὸν ἀριθμητικὸν λογισμόν.

Ἡ ἀξιολογωτέρα δημιουργία τοῦ Frenicle εἶναι μία ἐκτεταμένη πραγματεία Περὶ μαγικῶν τετραγώνων, ὅπου ἡ σχετικὴ θεωρία ἀναπτύσσεται εἰς μέγα βάθος καὶ εἰς ἔκτασιν. Περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν τὴν ἀνακάλυψιν τοὐλάχιστον 880 μαγικῶν τετραγώνων, σχηματιζομένων μὲ τοὺς 16 πρώτους ἀριθμοὺς τῆς φυσικῆς σειρᾶς.

Τὸ «opus magnum» τοῦ Descartes καὶ ἡ δημιουργία τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας

343. Ὅταν ὁ ἱστορικὸς εὑρίσκεται ἐνώπιον τοῦ ἔργου ἑνὸς μεγάλου, πρῶτον καὶ σπουδαῖον ζήτημα ποὺ ἀντιμετωπίζει εἶναι ἡ ἀναζήτησις τῶν πηγῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ συγγραφεύς. Προκειμένου περὶ τοῦ Descartes, τὸ πρᾶγμα παρουσιάζει μεγάλας δυσκολίας, διότι ὁ ἐν λόγῳ στοχαστὴς υἱοθέτησε σταθερῶς τὸ σύστημα τῆς προσηλώσεώς του εἰς τὸ ρεῦμα τῶν ἰδικῶν του ἀποκλειστικῶς σκέψεων, μὴ καταφεύγων εἰς τοὺς προγενεστέρους παρὰ μόνον ὅταν αὐτὸ τοῦ ἦτο ἀπολύτως ἀπαραίτητον. Καὶ ἐπειδή, ἐκ λόγων ἀρχῆς καὶ χαρακτῆρος, ἦτο ἐναντίον πάσης αὐθεντίας, ἐθεώρει ἀναξίαν ἀπασχόλησιν τὸν προσδιορισμὸν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔδωσαν οἱανδήποτε ἀφορμὴν εἰς τὰς ἐμπνεύσεις του, μὲ μοναδικὴν ἐξαίρεσιν τοὺς κορυφαίους γεωμέτρας τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος, εἰς τὴν μελέτην τῶν ὁποίων ἐστράφη καθ' ὑπόδειξιν τοῦ φίλου του Beeckmann.

Διὰ νὰ τοῦ ἀποσπάσουν κάποιαν ὁμολογίαν ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ζητήματος ἐχρειάσθη μακρὰ ἀναδίφησις τῶν ἀνεκδότων σελίδων, τὰς ὁποίας κατέλιπε καὶ τῶν πολυαρίθμων ἐπιστολῶν ποὺ σώζονται μέχρι σήμερον. Τοιουτοτρόπως ἔφθασαν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν τοῦ ἦτο ἄγνωστος ἡ συμβολικὴ

ἄλγεβρα τῆς ἐποχῆς του, ὄχι μόνον ὑφ' ἣν μορφὴν ἐχρησιμοποιεῖτο ἀπὸ τὸν μεγάλον συμπατριώτην του τὸν Viète *, ἀλλ' ἀκόμη καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν ποὺ εἶχον υἱοθετήσει οἱ γερμανοὶ μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς (§ 239). Καὶ ἀπὸ ἕνα χωρίον ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Huygens συνάγεται, ὅτι οὔτε ὁ Harriot τοῦ ἦτο ἄγνωστος. Περὶ τοῦ Γαλιλαίου, τὸν ὁποῖον οἱ Ἰησουῖται διδάσκαλοί του περιέβαλλον μὲ σεβασμόν, ὁμιλεῖ κατ' ἐπανάληψιν εἰς τὰς ἐπιστολάς του πρὸς τὸν Mersenne, ἀναγνωρίζων, σχεδὸν παρὰ τὴν θέλησίν του, ὅτι ὑπῆρξε μέγας ἀνήρ, χωρὶς ὅμως νὰ διστάζῃ νὰ ἐκφέρῃ ἐνίοτε ἀδικαιολογήτους μομφὰς ἐναντίον του.

Ὅτι, ἐξ ἄλλου, ὑπέστη τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Cavalieri καταφαίνεται ἀπὸ μερικοὺς στοχασμούς του, εἰς τοὺς ὁποίους διαφαίνονται οἱ χαρακτῆρες τῶν ἰδεῶν τῆς Γεωμετρίας τῶν ἀδιαιρέτων. Ἐν τούτοις δὲν ἔκαμε λόγον περὶ αὐτοῦ, παρὰ μόνον ἐν παρόδῳ διὰ νὰ ὑπενθυμίσῃ, ὄχι μὲ πολλὴν λεπτότητα, μερικὰς κατασκευὰς καταχωρημένας εἰς τὸ Specchio ustorio (§ 313). Ὁ Beeckmann τοῦ ἐνέπνευσε πιθανῶς τὸν «μεσολαβικὸν διαβήτην», περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον καὶ ἕνα πολυτομικὸν ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον, ἕνεκα τῆς μικρᾶς πρακτικῆς του ἀξίας, κατέλιπεν ἐν ἀφανείᾳ μεταξὺ ἄλλων Cogitationes privatae (Ἰδιαίτεραι σκέψεις). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ Descartes, ὡς ἐργατικὴ μέλισσα, κατώρθωσε ν' ἀπομυζήσῃ τὸ θρεπτικώτερον νέκταρ ἐκ τῆς πλουσίας ἀνθοφορίας, ποὺ εὑρίσκετο εἰς τὴν διάθεσίν του.

Ἀλλὰ εἰς τὴν συμβολικὴν ἄλγεβραν ἔδωσε μίαν μεγάλην τελειοποίησιν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἐκθετῶν εἰς τὰς δυνάμεις, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν χρῆσιν των καὶ εἰς τὰ ριζικά, διότι π.χ. διὰ νὰ δηλώσῃ τὴν κυβικὴν ρίζαν ἐχρησιμοποίει πάντοτε τὸ σύμβολον $\sqrt{c}$. Αἱ παρενθέσεις, ὅπως τὰς χρησιμοποιοῦμεν σήμερον, τοῦ ἦσαν ἄγνωστοι, διότι ὅταν τοῦ συνέβαινε νὰ ἐκφράσῃ ὅτι πολλὰ μονώνυμα πολλαπλασιάζονται ἐπὶ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα, κατέγραφε τὰ μονώνυμα κατὰ στήλην συνδεδεμένα διὰ μύστακος, ὄπισθεν τοῦ ὁποίου ἐτοποθέτει τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἐνίοτε ὅμως ἐπροτίμα νὰ θέτῃ μίαν τελείαν πρὸ καὶ ἄλλην μετὰ τὴν σειρὰν τῶν μονωνύμων, τὰ ὁποῖα σήμερον θέτομεν μεταξὺ παρενθέσεων. Τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ χρησιμοποιεῖ μὲ τὴν ἰδίαν σημασίαν ποὺ ἀποδίδομεν εἰς αὐτὰ σήμερον, ἀλλ' ὅταν ἕνας ὅρος ἔπρεπε νὰ ληφθῇ διαδοχικῶς ἢ ἀδιαφόρως μὲ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, ὁ Descartes τοῦ προτάσσει μίαν τελείαν. Μολονότι μία ἐπιστολὴ τῆς 30ῆς Σεπτεμβρίου 1640 ἀποδεικνύει ὅτι δὲν τοῦ ἦτο ἀγνω-

* Παρὰ ταῦτα, εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne περὶ τὰ τέλη τοῦ 1637, ὁ Descartes ὄχι μόνον ἀπεποιήθη τοιούτου εἴδους ἐπίδρασιν, ἀλλὰ καὶ ἐξέφερεν ὑποτιμητικὴν κριτικὴν τοῦ ἔργου τοῦ Viète.

στον τὸ σύμβολον = ὡς σημεῖον ἰσότητος, ἐν τούτοις ἔδωσε προτίμησιν εἰς ἄλλο ἰδικῆς του ἐπινοήσεως ($\propto$).

Ὁ Descartes ἀπήλλαξεν ἑαυτὸν τῆς ὑποχρεώσεως, τὴν ὁποίαν εἶχε θεσπίσει ὁ Viète, νὰ γράφῃ μίαν ἐξίσωσιν μὲ ὅλους τοὺς ὅρους ὁμογενεῖς καί, ἐνῷ ὁ ἴδιος ὁ Viète ἐδήλωνε τοὺς ἀγνώστους μὲ τὰ φωνήεντα, ὁ Descartes ἐπροτίμησε τὰ γράμματα x, y, z. Συνάγεται λοιπὸν ὅτι τὸ συμβολικὸν σύστημα ποὺ εἰσήγαγεν ὁ Descartes δὲν διαφέρει τοῦ σήμερον ἐν χρήσει παρὰ εἰς ἀσημάντους λεπτομερείας, διὰ τὸν λόγον δὲ τοῦτον ἡ ἀνάγνωσις τῆς Γεωμετρίας του δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν εἰς τὸν σύγχρονον ἀναγνώστην. Καὶ συνεπῶς, ἂν θέλωμεν νὰ δώσωμεν μίαν χρονολογίαν γεννήσεως εἰς τὴν συμβολικήν μας ἄλγεβραν, θὰ πρέπει ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ ἔτος 1637, ὅτε ἐδημοσιεύθη τὸ «opus magnum» τοῦ Descartes.

344. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς τρία Βιβλία. Τὸ Ι ἀφιεροῦται εἰς προβλήματα λυόμενα διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου καὶ περιέχει τὰ θεμέλια τῆς διαδικασίας ἐκείνης, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Descartes μετεσχημάτιζεν πᾶν γεωμετρικὸν πρόβλημα εἰς ἀλγεβρικόν. Βάσις αὐτῆς εἶναι ἡ παραδοχὴ (γενομένη ἤδη ὑπὸ τοῦ Bombelli εἰς σελίδας, ποὺ παρέμειναν ἀνέκδοτοι ἐπὶ πολὺν χρόνον, § 233) ἑνὸς μήκους, αὐθαιρέτου ἀλλὰ σταθεροῦ, ὡς μονάδος μετρήσεως ὅλων τῶν μηκῶν, γνωστῶν καὶ ἀγνώστων, τῶν εἰσερχομένων εἰς τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον — πρέπει νὰ τονίσωμεν — ὑποτίθεται ἤδη λελυμένον, κατ' ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου τῶν ἀρχαίων.

Ὁ Descartes ἀπέδειξεν ὅτι ἄμεσος συνέπεια τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ὅτι αἱ θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς μεταφράζονται εἰς ἰσαρίθμους γεωμετρικὰς κατασκευάς. Εἶναι αἱ κατασκευαὶ ποὺ ἀπαντῶνται σήμερον εἰς τὰ ἐγχειρίδια τοῦ γραφικοῦ λογισμοῦ. Ἀλλὰ δὲν ἐσταμάτησεν ἐδῶ· διότι ἐκθέτει περαιτέρω τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Διὰ μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$x^2 = ax + b^2$$

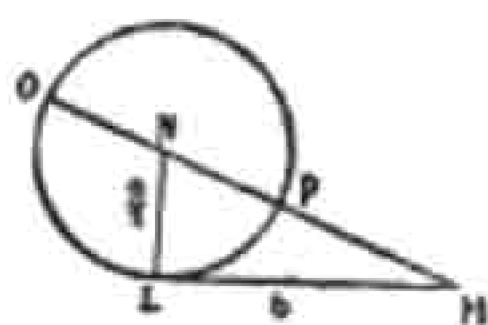
χρησιμοποιεῖ τὴν κατασκευὴν τοῦ σχ. 22, ἐνῷ διὰ μίαν ἄλλην τῆς μορφῆς :

$$x^2 = ax - b^2$$

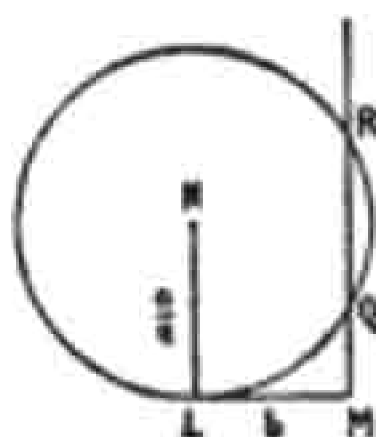
ἐφαρμόζει τὴν κατασκευὴν τοῦ σχ. 23.

Ἀξιοθαύμαστος εἶναι ἡ δύναμις τοῦ βλέμματος τοῦ Descartes, ὁ ὁποῖος εἰς τὰς γενικὰς θεωρίας ποὺ ἐκθέτει ἐν συνεχείᾳ, ἐναγκαλίζεται τὰ προβλήματα ὅλων τῶν βαθμῶν μὲ ὁσονδήποτε πλῆθος ἀγνώστων. Παρὰ ταῦτα, πολλὰ καὶ σημαντικὰ εἶναι τὰ κενά, τὰ ὁποῖα καταλείπει ὁ συγγραφεὺς μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐπιφυλάξῃ εἰς τοὺς ἀναγνώστας του τὴν εὐχαρίστησιν νὰ πληρώσουν ἐκεῖνοι, ἀσκοῦντες τὸ πνεῦμα των, τὰ κενὰ πρὸς ἰδίαν αὐτῶν ὠφέλειαν.

«ἥτις ἀποτελεῖ», γράφει ὁ ἴδιος, «καὶ τὸ σημαντικώτερον κέρδος ποὺ δυνάμεθα ν' ἀντλήσωμεν ἀπὸ τὴν ἐπιστήμην αὐτήν».



Σχ. 22

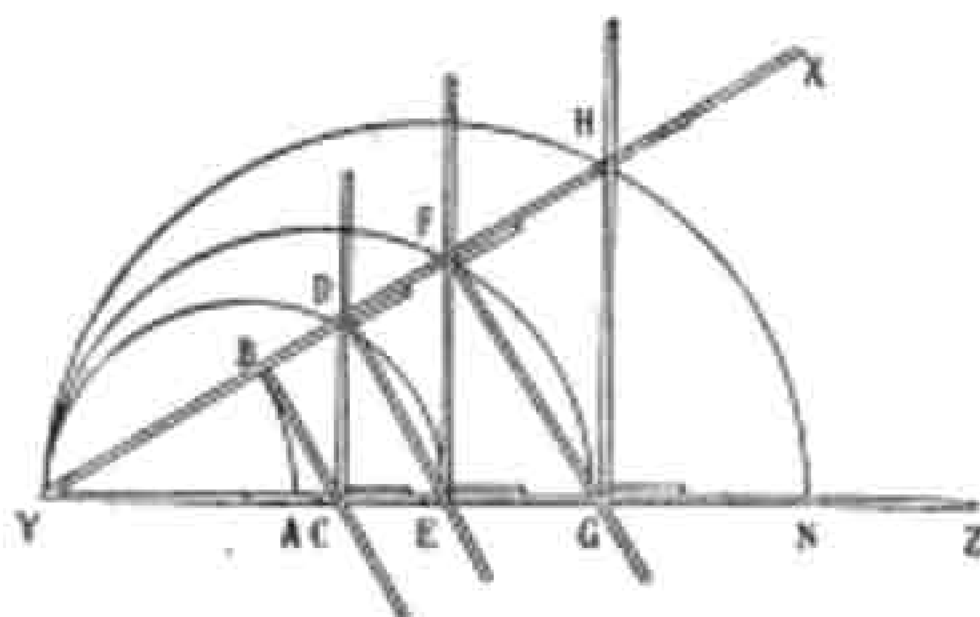


Σχ. 23

Δὲν ἐβράδυνεν ὅμως ν' ἀντιληφθῇ, ὅτι πολὺ ὀλίγοι ἀναγνῶσται εὑρίσκοντο εἰς θέσιν νὰ διατρέξουν μὲ ἀσφάλειαν τὴν ὑπ' αὐτοῦ διανοιγεῖσαν ὁδὸν καὶ ἐσκέφθη νὰ δώσῃ παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν ἰδεῶν του διὰ τῆς λύσεως ἑνὸς διασήμου προβλήματος τῆς ἀρχαιότητος (ὁ ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπος τοῦ Ἀπολλωνίου), τοῦ ὁποίου πλήρη ἐκφώνησιν παρέχει ὁ Πάππος εἰς τὸ προοίμιον τοῦ VII Βιβλίου τῆς Συναγωγῆς. Ὁ Hardy ἀφηγήθη εἰς τὸν Leibniz, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶχε προτείνει εἰς τὸν Descartes ὁ Golio (ὁ ὁποῖος εἴδομεν ὅτι τὸ ἐπρότεινεν ἐπίσης εἰς τὸν Mydorge, § 342) διὰ νὰ θέσῃ εἰς δοκιμαστικὴν ἐφαρμογὴν τὰς καρτεσιανὰς μεθόδους. Ὁ Descartes λέγεται ὅτι ἐχρειάσθη ἓξ ἑβδομάδας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν λύσιν, πρᾶγμα διόλου παράδοξον, ἂν λάβῃ κανεὶς ὑπ' ὄψιν τὰς πολυαρίθμους μερικὰς περιπτώσεις τοῦ προβλήματος*. Περὶ τοῦ προβλήματος τούτου γίνεται συχνὰ λόγος εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ Descartes, ἀπὸ τοῦ 1632. Διὰ τὴν λύσιν του ἀναζητεῖ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ζητουμένου τόπου, ἀναφέρων αὐτὸν εἰς δύο ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ὡς θεμελιώδεις, καὶ φθάνει εἰς τὸ ἀποτέλεσμα διὰ μακρᾶς ὁδοῦ, στηριζόμενος εἰς τὴν θεώρησιν πολλῶν ζευγῶν ὁμοίων τριγώνων. Ἐν κατακλεῖδι παρατηρεῖ πῶς ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἐξάγεται κατὰ πόσον τὸ πρόβλημα εἶναι ἢ ὄχι ἐπίπεδον καὶ ἐπιλαμβάνεται τῆς ἐρεύνης τῆς εἰδικῆς περιπτώσεως καθ' ἣν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, διότι τότε τὸ πρόβλημα λύεται μὲ ἕνα σύστημα εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς δοθείσας. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἤχθη ὁ συγγραφεὺς εἰς τὴν σπουδὴν τῶν γραμμῶν τῶν παριστωμένων ὑπὸ ἐξισώσεων μὲ δύο συντεταγμένας, σπουδὴ ἀποτελοῦσα τὸ κύριον ἀντικείμενον τοῦ Βιβλίου II τῆς Γεωμετρίας.

* Δὲν ἐξήτασεν ὅλας τὰς περιπτώσεις, διότι, ὅπως ἔλεγεν ὁ ἴδιος ὁ Descartes, ἠκολούθει τὴν τακτικὴν τῶν ἀρχιτεκτόνων, οἱ ὁποῖοι «font les bâtiments, en prescrivant seulement tout ce qu' il faut faire, et laissant le travail des mains aux charpentiers et aux maçons» (Ἐπιστολὴ πρὸς τὸν Mersenne 31ης Μαρτίου 1638).

345. Ἐν προοιμίῳ ὑπενθυμίζει, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι ἐταξινόμουν τὰς ἐπιπέδους καμπύλας εἰς τρεῖς κατηγορίας: ἐπιπέδους τόπους, στερεοὺς τόπους καὶ γραμμικοὺς τόπους, καὶ διατυπώνει τὴν ἔκπληξίν του πῶς οἱ ἀρχαῖοι δὲν ᾐσθάνθησαν τὴν ἀνάγκην ταξινομήσεως τῶν τελευταίων τούτων, λησμονῶν ὅτι τοῦτο κατέστη δυνατὸν εἰς τὸν ἴδιον μόνον ὅταν παρέστησε τὰς γραμμὰς δι' ἐξισώσεων. Ὑποβάλλει κατόπιν εἰς κριτικὴν τὸ ἐπίθετον «μηχανικαί», τὸ ὁποῖον ἔδιδον οἱ ἀρχαῖοι εἰς ἀνωτέρας καμπύλας, δεδομένου ὅτι δὲν ὑπάρχει γραμμὴ ποὺ νὰ μὴ δύναται νὰ γραφῇ μηχανικῶς, καὶ προτείνει τὴν ἀντικατάστασιν αὐτοῦ μὲ τὸ ἐπίθετον «γεωμετρικαί», τὸ ὁποῖον καὶ παρέμεινεν ἐπὶ αἰῶνας εἰς τὴν μαθηματικὴν φιλολογίαν*. Πρὸς περαιτέρω διασάφησιν τῆς σκέψεώς του θεωρεῖ τὰς καμπύλας ποὺ γράφουν τὰ σημεῖα D, F, H,..., τῆς συσκευῆς (σχ. 24) ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ἀλυσοειδῆ σειρὰν ὀρθογωνίων τριγώνων (chaîne d'équerres)**.



Σχ. 24

Αἱ καμπύλαι αὐταὶ ἔχουν ἐξίσωσιν εἰς πολικὰς μὲν συντεταγμένας:

$$\rho = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\theta}, \quad (1)$$

εἰς καρτεσιανὰς δέ***:

$$x^{4\nu} = a(x^2 + y^2)^{3\nu-1} \quad (2)$$

Πρὸς πλήρωσιν τοῦ κενοῦ τούτου, τὸ ὁποῖον ἄφησαν οἱ Ἕλληνες, ὁ Descartes θέτει ὡς ἀντικείμενον τῆς ἐρεύνης του τὴν μελέτην τῶν γραμμῶν τῶν δύο πρώτων βαθμῶν, τὰς ὁποίας θεωρεῖ ἀποτελούσας ἕνα πρῶτον γένος. Κατόπιν τῶν γραμμῶν 3ου καὶ 4ου, ὡς ἀποτελουσῶν δεύτερον γένος καὶ γενικῶς τῶν γραμμῶν 2ν — 1 καὶ 2ν βαθμοῦ, ὡς ἀποτελουσῶν νυοστὸν γένος. Κατὰ τὴν μελέτην του αὐτήν, ὁ Descartes παρεπλανήθη ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ λύσις μιᾶς ἐξισώσεως 4ου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως 3ου βαθμοῦ. Ὄχι μόνον ἐνόμισεν, ἐσφαλμένως, ὅτι τὰ ἰσχύοντα εἰς τὸ δυαδικὸν πεδίον εὑρίσκουν ἐφαρμογὴν καὶ εἰς τὸ τριαδικόν, ἀλλὰ μὲ μίαν δευτέραν ἐσπευσμένην γενίκευσιν, ἐπεξέτεινε τὰ πράγματα εἰς τοὺς ἀνωτέρους βαθμούς. (Σημειωτέον ὅτι ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του, ὑπὸ χρονολογίαν 25 Μαρτίου 1642, φαίνεται ὅτι ἠπατήθη νομίσας

---

* Τὸ ὄνομα ἐν τούτοις «μηχανικαί» ἐχρησιμοποίησεν ὁ Descartes διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ὑπερβατικῶν καμπύλων (ἐπιστολή του πρὸς Mersenne 23 Αὐγούστου 1638), τὰς ὁποίας δὲν πραγματεύεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

** Ἡ ἐφεύρεσις τοῦ ὀργάνου τούτου χρονολογεῖται ἀπὸ τοῦ 1619.

*** Ὅτι διὰ τῶν καμπύλων τούτων λύεται τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς ὁσωνδήποτε μέσων ἀναλόγων ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὸ Βιβλίον III τῆς Γεωμετρίας.

ὅτι εἶχεν ἀποδείξει τὴν δυνατότητα ἀναγωγῆς οἱασδήποτε ἐξισώσεως τοῦ 6ου βαθμοῦ εἰς ἐξίσωσιν 5ου βαθμοῦ. Ἐπὶ πλέον μία τοιαύτη ταξινόμησις ἔχει ἔννοιαν μόνον ὅταν ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ βαθμὸς μιᾶς καμπύλης εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀξόνων ἀναφορᾶς. Καὶ εἶναι τοῦτο γεγονὸς τοῦ ὁποίου δὲν ἔδωσεν ἀπόδειξιν ὁ Descartes, ἀλλὰ τοῦ ὁποίου ἀσφαλῶς εἶχε συνείδησιν, ὅταν ἔγραφε τὰ ἑξῆς: «Διότι ἂν καὶ ὑπάρχουν εὐρέα περιθώρια ἐκλογῆς ἀξόνων πρὸς εὕρεσιν ἐξισώσεως βραχυτέρας καὶ ἁπλουστέρας, ἐν τούτοις καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἐκλέξωμεν τούτους, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ γραμμὴ νὰ παρουσιάζῃ τὸ αὐτὸ γένος, ὡς εἶναι εὔκολον ν' ἀποδείξωμεν».

Διὰ νὰ καταστήσῃ σαφῆ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα ν' ἀναγνωρίσωμεν τὸ γένος μιᾶς καμπύλης, ὅταν εἶναι γνωστὸς ὁ ὁρισμός της, ὁ Descartes εὑρίσκει τὴν ἐξίσωσιν μιᾶς τριτοβαθμίου καμπύλης, ἐπινοηθείσης ὑπὸ τοῦ ἰδίου, ἡ ὁποία φέρει τὸ ὄνομα καρτεσιανὴ παραβολή. Κατόπιν στρέφεται εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ Πάππου διὰ νὰ κάμῃ τὴν διερεύνησιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ τόπου εἰς τὴν περίπτωσιν τριῶν καὶ τεσσάρων εὐθειῶν, δίδων τοιουτοτρόπως τὸ πρῶτον παράδειγμα μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων, ἡ ὁποία τόσον ἀπησχόλησε τοὺς μεταγενεστέρους ἐργάτας τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας.

Δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὰς παρατηρήσεις τοῦ Descartes ἐπὶ τοῦ ἀναλόγου προβλήματος, τοῦ ἀναφερόμενου εἰς ἀριθμὸν εὐθειῶν ἀνώτερον τῶν τεσσάρων. Ἐφελκύομεν ὅμως τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τῶν σελίδων ἐκείνων, ὅπου, ὑπὸ τὸ κράτος θὰ ἔλεγε κανεὶς προφητικῆς ἐμπνεύσεως, ἀπαριθμοῦνται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι δυνατὴ γνωστῆς οὔσης τῆς ἐξισώσεως μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης. Πολλαὶ γενεαὶ ἱκανωτάτων ἐρευνητῶν παρῆλθον ἔκτοτε προτοῦ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἐξάντλησις τοῦ τεραστίου ὅσον καὶ θελκτικοῦ καρτεσιανοῦ προγράμματος, ἀλλ' ἡ κατάστρωσις αὐτοῦ κατὰ τὴν γέννησιν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, δὲν ἦτο δυνατὸν παρὰ νὰ εἶναι ἔργον μιᾶς ἰδιοφυΐας.

Μεταξὺ τῶν ἐκφωνουμένων προβλημάτων, ὁ Descartes διατρίβει εἰς τὴν χάραξιν τῶν καθέτων εἰς τὰς καμπύλας (πρόβλημα τὸ ὁποῖον πρῶτος ἀνεγνώρισεν ὡς ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τῆς χαράξεως τῶν ἐφαπτομένων), δηλῶν ὅτι ὑπὲρ πᾶν ἄλλο ἐπεδίωκε τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, λόγῳ τῆς μεγάλης του χρησιμότητος καὶ γενικότητος. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν του, ἐκλέγει ἕνα σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ θεωρουμένη καμπύλη, καὶ τὸ θεωρεῖ ὡς κέντρον περιφερείας τεμνούσης τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα γειτονικὰ τοῦ ποδὸς τῆς ζητουμένης καθέτου. Ἐὰν ταῦτα συμπίπτουν, τὸ πρόβλημα εἶναι λελυμένον. Διὸ ἂν μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς βοηθητικῆς περιφερείας ἀπαλειφθῇ μία τῶν συντεταγμένων, πρέπει νὰ φθάσωμεν εἰς μίαν ἐξίσω-

σιν μὲ διπλῆν ρίζαν, ἤτοι τοιαύτην ὥστε τὸ πρῶτον μέλος της νὰ ἔχῃ ἕνα παράγοντα τῆς μορφῆς $(x - a)^2$. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον εἰσηγεῖται ἕνα λογιστικὸν τέχνασμα, τὸ ὁποῖον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιστήμην ὑπὸ τὸ ὄνομα «μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν». Καὶ διὰ νὰ καταστήσῃ τὴν σκέψιν του σαφεστέραν, ἐφαρμόζει τὸ ἐν λόγῳ τέχνασμα εἰς τὴν κωνικήν:

$$x^2 = ry - \frac{r}{q} y^2,$$

τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἀπὸ τὸν Ἀπολλώνιον (Κωνικά, Βιβλ. I, πρότασις 13), ἀφοῦ ἀντικαταστήσῃ τὰ μήκη μὲ τοὺς μετροῦντας αὐτὰ ἀριθμούς. Οἱ ὑπολογισμοὶ ποὺ ὁδηγοῦν εἰς τὸν σκοπὸν εἶναι σχοινοτενεῖς καὶ ἀπὸ κατασκευαστικῆς ἀπόψεως ἐλάχιστα λυσιτελεῖς, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀνεγνώρισε σιωπηρῶς καὶ ὁ ἴδιος ὁ Descartes, δίδων εἰς τὸ πρόβλημα τῶν καθέτων τῆς κογχοειδοῦς τοῦ Νικομήδους (τόμος I, § 53) κομψὴν λύσιν, ἀγνώστου προελεύσεως, ἀλλὰ πάντως σαφῶς ἀπομακρυνομένην ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν γενικὴν μέθοδον.

Ταύτης δίδει κατόπιν σπουδαιοτέραν ἐφαρμογὴν εἰς μερικὰς νέας καμπύλας, ἐπινοηθείσας ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἀπὸ τοῦ 1629 πρὸς λύσιν προβλημάτων ὀπτικῆς. Εἶναι αἱ διάσημοι καμπύλαι, ποὺ λέγονται σήμερον «ᾠοειδῆ τοῦ Descartes». Εἰς τὴν ἀρχὴν δίδει ἕνα ὁρισμὸν τῶν καμπύλων τούτων ἀρκετὰ πολύπλοκον, τὸν ὁποῖον κατόπιν τροποποιεῖ ὡς ἑξῆς: αἱ ἐν λόγῳ καμπύλαι ἀποτελοῦν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δυὸ σταθερῶν σημείων, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ σταθεροὺς συντελεστάς, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Ἡμᾶς δὲν ἐνδιαφέρουν αἱ ἐξηγήσεις, τὰς ὁποίας δίδει ὁ Descartes γύρω ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν καμπύλων αὐτῶν εἰς τὴν διοπτρικήν. Εἶναι ὅμως ἀξιοσημείωτος ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον τερματίζει τὸ Βιβλίον II τῆς Γεωμετρίας, παρατηρῶν ὅτι ἡ θεμελιώδης ἰδέα τῆς μεθόδου του δύναται νὰ ἐπεκταθῇ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸν χῶρον καὶ οὕτω δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν μελέτην τῶν στερεῶν καμπύλων. Ἀλλ' ἐν τῇ ρύμῃ τῆς φαντασίας του, ὡς πρὸς τὴν δύναμιν τῶν ἐκτεθεισῶν θεωριῶν, ἀφίνεται νὰ παρασυρθῇ εἰς μιὰν πεπλανημένην διαπίστωσιν: ὅτι διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν καθέτων εἰς μίαν στερεὰν καμπύλην ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν χάραξιν αὐτῶν εἰς τὰς ὀρθογωνίους προβολάς της ἐπὶ δύο ἐπιπέδων. Τοῦτο παριστᾷ τὸν Descartes παραγνωρίζοντα δύο οὐσιώδη πράγματα: α) ὅτι μία στερεὰ καμπύλη ἔχει εἰς κάθε σημεῖον της ἀπείρους καθέτους καὶ ὄχι μίαν, β) ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας δὲν εἶναι ἐν γένει γωνία ὀρθή.

346. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν γραφικὴν λύσιν τῶν στερεῶν ἢ ὑπερστερεῶν προβλημάτων — θέμα τοῦτο τοῦ III Βιβλίου τῆς Γεωμετρίας —, ὁ Descartes αἰσθάνεται τὴν ἀνάγκην νὰ ἐμβαθύνῃ πρῶτον εἰς τὴν θεωρίαν

τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, διὸ καὶ ἀσχολεῖται μὲ αὐτὰς εἰς τὰς πρώτας σελίδας τοῦ Βιβλίου τούτου*. Ἀπαντῶνται δὲ ἐκεῖ ὄχι μόνον ἔννοιαι καὶ προτάσεις γνωσταὶ προηγουμένως, ἀλλ' ἀκόμη καινοτομίαι ἀναμφισβητήτου πρωτοτυπίας. Μεταξὺ τούτων ἀναφέρομεν τὴν γραφὴν μιᾶς ἐξισώσεως ὑπὸ μορφὴν πολυωνύμου, μὲ συντελεστὰς οἱουδήποτε σημείου, ἐξισουμένου πρὸς τὸ μηδέν. Θὰ ἔπρεπεν ἐπίσης ν' ἀναφέρωμεν τὸν κανόνα, ποὺ φέρει ἀκόμη τὸ ὄνομά του, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ πλήθους τῶν θετικῶν («ἀληθῶν») ἢ ἀρνητικῶν ριζῶν («ψευδῶν» ἢ «μικροτέρων τοῦ μηδενός») μιᾶς τυχούσης ἐξισώσεως, ἂν ἦτο δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι δὲν ἔμαθεν ὁ Descartes τὸν κανόνα τοῦτον ἀπὸ τὸν Harriot. Σημαντικὸν καὶ διὰ τοῦτο ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι ὁ Descartes ἀνεγνώρισε τὴν ὕπαρξιν ριζῶν ἄλλου εἴδους, βεβαιώνων ὅτι ἐκτὸς τῶν «πραγματικῶν» ὑπάρχουν καὶ «φανταστικαί». Τοιουτοτρόπως εἰσήγαγε δύο νέους ὅρους, οἱ ὁποῖοι κατέλαβον μόνιμον θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην. Βάσει τοῦ ἀποτελέσματος, ποὺ προκύπτει ἐκ τοῦ γινομένου ἑνὸς πλήθους διωνύμων τῆς μορφῆς $(x \pm a)$, ἤχθη εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι μία ἐξίσωσις δύναται νὰ ἔχῃ πλῆθος ριζῶν ἴσον πρὸς τὸν βαθμόν της, χωρὶς ν' ἀναγνωρίσῃ ὅτι εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ συμπεράσματος τούτου εἶχε προηγηθῇ ὁ Girard (§ 328). Προχωρεῖ κατόπιν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων εἰς κλασσικὰς περιπτώσεις καὶ διδάσκει πῶς δι' αὐξήσεως ἢ μειώσεως τῶν ριζῶν κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα δύναται ν' ἀπαλειφθῇ ὁ δεύτερος ὅρος οἱασδήποτε ἐξισώσεως ἢ ν' αναχθῇ ἡ ἐξίσωσις εἰς ἄλλην μὲ ὅλας τὰς πραγματικὰς ρίζας θετικάς. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ἀποτέλεσμα ἀναγνωρίζει τὴν σκοπιμότητα εὑρέσεως ἑνὸς ἀνωτέρου ὁρίου τῶν ριζῶν καὶ διδάσκει πῶς δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν. Παρατηρεῖ ἀκόμη ὅτι τὸ αὐτὸ τέχνασμα ἐπιτρέπει νὰ καταστήσωμεν πλήρη μίαν ἐλλιπῆ ἐξίσωσιν**. Ἄλλος χρήσιμος μετασχηματισμὸς ἀποβλέπει εἰς τὸ νὰ καταστήσωμεν ἀκεραίους τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως μὲ μοναδιαῖον τὸν συντελεστὴν τῆς μεγίστης δυνάμεως. Ἡ νέα ἐξίσωσις λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ριζῶν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὁ δὲ Descartes προχωρεῖ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ρητῶν ριζῶν μὲ μίαν μέθοδον γνωστοτάτην σήμερον, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει ἀκόμη καὶ εἰς ειδικὰς περιπτώσεις ἐγγραμμάτων ἐξισώσεων. Ἡ γνῶσις τῶν ρητῶν ριζῶν συνδυαζομένη μὲ τὴν πρᾶξιν τῆς ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως ἐπιτρέπει ἐν γένει τὸν ὑποβιβασμὸν τοῦ βαθμοῦ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἐνίοτε τὴν ὁλοκληρωτικὴν λύσιν

* Πρὸ τοῦ 1630 ὁ Descartes εἶχε γράψει μίαν μικρὰν ἀλγεβρικὴν πραγματείαν, σήμερον μὴ ὑφισταμένην, ἀλλ' ἀναφερομένην εἰς διάφορα χωρία τῆς ἀλληλογραφίας του.

** Εἰς τὴν ἀπουσίαν ἑνὸς ὅρου μιᾶς ἐξισώσεως δίδει ὁ Descartes σημασίαν μᾶλλον ὑπερβολικὴν καὶ προειδοποιεῖ τὸν ἀναγνώστην θέτων εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἐλλείποντος ὅρου ἕνα ἀστερίσκον.

της. Ὁ Descartes ἐφαρμόζει τὴν παρατήρησιν αὐτὴν λύων διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς ὁδοῦ ἕνα πρόβλημα νεύσεως ποὺ εἶχε πραγματευθῆ ὁ Πάππος καὶ τὸ ὁποῖον ἄγει εἰς διτετράγωνον ἐξίσωσιν.

Ὅταν ἡ ἀνηγμένη ἐξίσωσις εἶναι γενικὴ τοῦ 3ου ἢ 4ου βαθμοῦ, εἶναι ματαία ἡ προσπάθεια λύσεως αὐτῆς ἄνευ προσφυγῆς εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Πᾶσα προσπάθεια ὑπ' αὐτὴν τὴν ἔννοιαν θὰ ἦτο μία βεβαία πλάνη «διότι τέλος πᾶν ὅ,τι μαρτυρεῖ κάποιαν ἄγνοιαν, καλεῖται λάθος». Διὰ τοῦτο ὁ συγγραφεὺς διδάσκει τὴν λύσιν αὐτῆς μέσῳ μιᾶς σταθερᾶς παραβολῆς καὶ μιᾶς περιφερείας, εὐνοϊκῶς ἐκλεγομένης. Ὑποτιθεμένου πράγματι ὅτι ἡ ἡ παραβολὴ ἔχει ἐξίσωσιν:

$$x = my^2, \quad (1)$$

ἡ δὲ περιφέρεια:

$$x^2 + y^2 = qx + (p + m)y + rm, \quad (2)$$

α) ἂν πρόκειται περὶ τῆς ἐξισώσεως:

$$x^3 = ax + b, \quad (3)$$

μὲ αὐθαιρέτους συντελεστάς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν:

$$p = \frac{a}{m}, \quad q = \frac{b}{m^2}, \quad r = 0 \quad (4)$$

β) ἂν τοὐναντίον ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς:

$$x^4 = ax^2 + bx + c, \quad (5)$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν:

$$p = \frac{a}{m}, \quad q = \frac{b}{m^2}, \quad r = \frac{c}{m^3}. \quad (6)$$

Ὁ Descartes ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Δήλου καὶ τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας, προσθέτων ὅτι πᾶν πρόβλημα 3ου ἢ 4ου βαθμοῦ δύναται ν' ἀναχθῆ εἰς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο.

Διὰ τὰ προβλήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ δὲν ἀρκοῦν αἱ κωνικαὶ ὡς βοηθητικαὶ καμπύλαι, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐπιβεβαιώνει ὁ Descartes διὰ τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως 6ου βαθμοῦ, λύσεως τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνει διὰ τομῆς μιᾶς συνήθους παραβολῆς μὲ μίαν καρτεσιανὴν παραβολὴν (§ 345). Ἀλλ' ἐπ' αὐτοῦ δὲν ἐπιμένει ὡς μὴ ἐπιθυμῶν «νὰ κάμη ἕνα ὀγκῶδες βιβλίον», ἀλλὰ μᾶλλον «νὰ κάμη κατανοητὰ πολλὰ μὲ ὀλίγας λέξεις» καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἀκόλουθον χαρακτηριστικὴν δήλωσιν: «Καὶ ἐλπίζω ὅτι οἱ ἀνεψιοί μας θὰ μ' εὐγνωμονοῦν ὄχι μόνον διὰ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα ἔχω ἐδῶ ἐξηγήσει, ἀλλ' ἀκόμη καὶ δι' ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἑκουσίως παρέλειψα, μὲ τὸν σκοπὸν ν' ἀφήσω εἰς αὐτοὺς τὴν χαρὰν τῆς ἀνακαλύψεώς των».

Ὁ Descartes εἶχε πλήρη συνείδησιν τῆς σπουδαιότητος τοῦ ἔργου του. Εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἐνῷ ἠρνήθη ὅτι ἐμελέτησεν ἐκ νεότητός του τὰ ἔργα τοῦ Viète, ἐβεβαίωσεν ὅτι ἔλαβεν ὡς σημεῖον ἐκκινήσεως τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἐκεῖνος εἶχε φθάσει (γνωρίζομεν ἐν τούτοις ὅτι ἄλλος εἶχε προηγηθῆ). Καὶ γράφων πρὸς τὸν Mersenne, κατὰ τὰ τέλη Δεκεμβρίου 1637, ἐδήλωνεν ὅτι τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα διδάσκει «θίγοντα τὴν φύσιν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ τὸν τρόπον τῆς μελέτης των εὑρίσκονται τόσον πολὺ πέραν τῆς συνήθους γεωμετρίας ὅσον ἡ ρητορικὴ τοῦ Κικέρωνος ἀπέχει ἀπὸ τοὺς παιδικοὺς φθόγγους a,b,c» καὶ ἔφθανε μέχρι τοῦ σημείου νὰ δηλώνῃ, ὅτι «οἱ ἐπίγονοι δὲν θὰ εὕρουν ποτὲ τίποτε εἰς αὐτὸν τὸν τομέα, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ ἠδυνάμην νὰ ἔχω εὕρει ἐξ ἴσου ἐπιτυχῶς μὲ αὐτούς, ἀρκεῖ νὰ μὲ εἶχεν ὠθήσει ἡ ὄρεξις νὰ καταβάλω τὸν κόπον τῆς ἐξετάσεώς του».



RENÈ DESCARTES

Τέλος ὁμιλῶν περὶ τοῦ προβλήματος τῶν τριῶν καὶ τεσσάρων εὐθειῶν ἠθέλησε νὰ προκαταλάβῃ τὰς κριτικὰς τῶν ἐνδεχομένων πολεμίων του, γράφων εἰς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 31 Μαρτίου 1638 τ' ἀκόλουθα: «Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀνάλυσιν, παρέλειψα ἕνα μέρος, διὰ νὰ συγκρατήσω τὰ κακόβουλα πνεύματα ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ καθήκοντός των· διότι ἐὰν ἔδιδον

καὶ αὐτό, θὰ ἰσχυρίζοντο μὲ ὑπερηφάνειαν ὅτι τὸ ἐγνώριζον ἀπὸ μακροῦ προηγουμένως, ἐνῷ τώρα δὲν ἠμποροῦν νὰ εἰποῦν τίποτε ἄλλο πλὴν τῆς ἀποκαλύψεως τῆς ἀγνοίας των».

Ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία εἰς τὰς ἐπιστολὰς τοῦ Descartes

347. Ἡ Γεωμετρία εἶναι τὸ μοναδικὸν μαθηματικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν ὁ Descartes. Διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν λοιπὸν κατὰ πόσον εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ περιέχονται ὅλα ἢ μέρος μόνον τῶν ὅσων ἐγνώριζεν ἐπὶ τοῦ θέματος, εἶναι ἀνάγκη ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ἐπιστημονικήν του ἀλληλογραφίαν, χωρὶς ν' ἀποκλείσωμεν ὅσα δυνάμεθα νὰ μάθωμεν ἀπὸ μερικὰς σελίδας ἀνεκδότους, αἱ ὁποῖαι ἐδημοσιεύθησαν προσφάτως.

Θ' ἀναζητήσωμεν πρὸ πάντων νὰ μάθωμεν κατὰ πόσον εἰς τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, τὸ θεμελιῶδες ἔργον του περιλαμβάνει ὅσα ὁ συγγραφεὺς ἐγνώριζεν ἐπὶ τοῦ θέματος, εἰδικώτερον δὲ κατὰ πόσον, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν διετύπωσε σαφεῖς συμβατικὰς παραδοχὰς ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων, ἦτο εἰς θέσιν νὰ σχεδιάσῃ ἐπακριβῶς τὰς καμπύλας ἐκ τῆς ἐξισώσεώς των.

Τὰ χωρία τῆς ἀλληλογραφίας τὰ δυνάμενα νὰ ρίψουν ὀλίγον φῶς ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου δὲν ἀφθονοῦν, ἀλλ' ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα. Ὅλα ἀφοροῦν τὴν καμπύλην:

$$x^3 + y^3 = nxy, \qquad (1)$$

τὴν ὁποίαν ἐπενόησεν ὁ ἴδιος καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται «φύλλον τοῦ Καρτεσίου»[18]. Ἡ καμπύλη αὐτὴ ὁρίζεται εἰς μίαν ἐπιστολὴν του πρὸς τὸν Mersenne (Ἰανουάριος 1638), συνοδευομένην ἀπὸ ἕνα σχῆμα ἐντελῶς ἐσφαλμένον. Φαίνεται ὅτι ἡ καμπύλη αὐτὴ ἐφείλκυσεν ἀμέσως τὴν προσοχὴν τοῦ Roberval, ὁ ὁποῖος ἐνόμισεν ὅτι εὗρε τὸ ἀκριβὲς σχῆμα της («ἕνα εἶδος ᾠοειδοῦς»). Ἐπειδὴ ὅμως ἠγνόει τὴν σημασίαν τῶν σημείων τῶν συντεταγμένων, προσέθεσεν εἰς τὸν βρόχον τοῦ πρώτου τεταρτοχωρίου τῶν ἀξόνων ἄλλους τρεῖς, ἀνὰ ἕνα εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων τεταρτοχωρίων. Ἐντεῦθεν ἕνα ἐξωφρενικὸν σύμπλεγμα γραμμῶν, τὸ ὁποῖον ὡς ἐνθυμίζον τὸ σχῆμα ἑνὸς κόμβου λαιμοδέτου ἢ ἑνὸς ἄνθους, ὤθησε τὸν Roberval καὶ ἄλλους μετ' αὐτὸν νὰ ὀνομάσουν τὴν καμπύλην «galand» ἢ «fleur de jasmin», δηλαδὴ φιλάρεσκον ἢ ἄνθος τοῦ ἰάσμου. Τὰ ὀνόματα αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς τὴν ὑπὸ χρονολογίαν 17 Ἰουλίου 1638 ἐπιστολὴν τοῦ Descartes πρὸς τὸν Mersenne, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι οὔτε ὁ μέγας φιλόσοφος ἐγνώριζε μὲ ἀκρίβειαν τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης, πρᾶγμα ἐπικυρούμενον καὶ ἀπὸ τὴν ἑπομένην ἐπιστολήν του τῆς 23ης Αὐγούστου 1638, ὅπου προσδιορίζεται τὸ μῆκος τοῦ βρόχου. Εἰς τὴν ἰδίαν ὅμως ἐπι-

καὶ αὐτό, θὰ ἰσχυρίζοντο μὲ ὑπερηφάνειαν ὅτι τὸ ἐγνώριζον ἀπὸ μακροῦ προηγουμένως, ἐνῷ τώρα δὲν ἠμποροῦν νὰ εἰποῦν τίποτε ἄλλο πλὴν τῆς ἀποκαλύψεως τῆς ἀγνοίας των».

Ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία εἰς τὰς ἐπιστολὰς τοῦ Descartes

347. Ἡ Γεωμετρία εἶναι τὸ μοναδικὸν μαθηματικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν ὁ Descartes. Διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν λοιπὸν κατὰ πόσον εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ περιέχονται ὅλα ἢ μέρος μόνον τῶν ὅσων ἐγνώριζεν ἐπὶ τοῦ θέματος, εἶναι ἀνάγκη ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ἐπιστημονικήν του ἀλληλογραφίαν, χωρὶς ν' ἀποκλείσωμεν ὅσα δυνάμεθα νὰ μάθωμεν ἀπὸ μερικὰς σελίδας ἀνεκδότους, αἱ ὁποῖαι ἐδημοσιεύθησαν προσφάτως.

Θ' ἀναζητήσωμεν πρὸ πάντων νὰ μάθωμεν κατὰ πόσον εἰς τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, τὸ θεμελιῶδες ἔργον του περιλαμβάνει ὅσα ὁ συγγραφεὺς ἐγνώριζεν ἐπὶ τοῦ θέματος, εἰδικώτερον δὲ κατὰ πόσον, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν διετύπωσε σαφεῖς συμβατικὰς παραδοχὰς ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων, ἦτο εἰς θέσιν νὰ σχεδιάσῃ ἐπακριβῶς τὰς καμπύλας ἐκ τῆς ἐξισώσεώς των.

Τὰ χωρία τῆς ἀλληλογραφίας τὰ δυνάμενα νὰ ρίψουν ὀλίγον φῶς ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου δὲν ἀφθονοῦν, ἀλλ' ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα. Ὅλα ἀφοροῦν τὴν καμπύλην:

$$x^3 + y^3 = nxy, \qquad (1)$$

τὴν ὁποίαν ἐπενόησεν ὁ ἴδιος καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται «φύλλον τοῦ Καρτεσίου»[18]. Ἡ καμπύλη αὐτὴ ὁρίζεται εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne (Ἰανουάριος 1638), συνοδευομένην ἀπὸ ἕνα σχῆμα ἐντελῶς ἐσφαλμένον. Φαίνεται ὅτι ἡ καμπύλη αὐτὴ ἐφείλκυσεν ἀμέσως τὴν προσοχὴν τοῦ Roberval, ὁ ὁποῖος ἐνόμισεν ὅτι εὗρε τὸ ἀκριβὲς σχῆμα της («ἕνα εἶδος ᾠοειδοῦς»). Ἐπειδὴ ὅμως ἠγνόει τὴν σημασίαν τῶν σημείων τῶν συντεταγμένων, προσέθεσεν εἰς τὸν βρόχον τοῦ πρώτου τεταρτοχωρίου τῶν ἀξόνων ἄλλους τρεῖς, ἀνὰ ἕνα εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων τεταρτοχωρίων. Ἐντεῦθεν ἕνα ἐξωφρενικὸν σύμπλεγμα γραμμῶν, τὸ ὁποῖον ὡς ἐνθυμίζον τὸ σχῆμα ἑνὸς κόμβου λαιμοδέτου ἢ ἑνὸς ἄνθους, ὤθησε τὸν Roberval καὶ ἄλλους μετ' αὐτὸν νὰ ὀνομάσουν τὴν καμπύλην «galand» ἢ «fleur de jasmin», δηλαδὴ φιλάρεσκον ἢ ἄνθος τοῦ ἰάσμου. Τὰ ὀνόματα αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς τὴν ὑπὸ χρονολογίαν 17 Ἰουλίου 1638 ἐπιστολὴν τοῦ Descartes πρὸς τὸν Mersenne, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι οὔτε ὁ μέγας φιλόσοφος ἐγνώριζε μὲ ἀκρίβειαν τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης, πρᾶγμα ἐπικυρούμενον καὶ ἀπὸ τὴν ἑπομένην ἐπιστολήν του τῆς 23ης Αὐγούστου 1638, ὅπου προσδιορίζεται τὸ μῆκος τοῦ βρόχου. Εἰς τὴν ἰδίαν ὅμως ἐπι-

στολὴν εὑρίσκεται ἕνα ἄλλο χωρίον, ἀφιερωμένον εἰς τὸν Roberval, εἰς τὸ ὁποῖον προτείνεται ἡ μελέτη τῆς καμπύλης τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a - x}{a + 3x}. \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἡ προτεινομένη δῆθεν νέα καμπύλη δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν προηγουμένην (1), ἀναφερομένην εἰς ἄξονας τὰς διχοτόμους τῶν ἀρχικῶν, ὁ δὲ Descartes ἔγραφε τότε, ὅτι τὸ πρᾶγμα εἶναι εἰς ἐκεῖνον πολὺ γνωστὸν καὶ ὅτι εἶχε διατυπώσει τὸ πρόβλημα ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ νὰ πειράξῃ τὸν Roberval, εἰς ἣν περίπτωσιν τοῦ διέφευγεν ἡ ταυτότης τῶν δύο καμπύλων. Ἀπὸ αὐτὰ συνάγομεν, ὅτι ὄχι μόνον ἐγνώριζεν ὁ Descartes τὸ ἀναλλοίωτον τῆς τάξεως τῆς καμπύλης κατὰ τὴν ἀλλαγὴν ἀξόνων (§ 345), ἀλλ' ἐγνώριζεν ἐπίσης νὰ ἐφαρμόζῃ τὸ τέχνασμα τοῦτο πρὸς ἀλλαγὴν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως μιᾶς καμπύλης.

Τὸ φύλλον δὲν εἶναι ἡ μοναδικὴ καμπύλη ποὺ ἐφείλκυσε τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Descartes. Μαθὼν ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Mersenne (28 Ἀπριλίου 1638) ὅτι ὁ Roberval ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλοειδικοῦ χωρίου εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς γεννώσης τὴν κυκλοειδῆ περιφερείας, κατέστρωσεν ὁ ἴδιος μίαν ἀπόδειξιν (27 Μαΐου 1638), τὴν ὁποίαν συνεπλήρωσε κατόπιν (27 Ἰουλίου 1638). Ὀλίγον μετέπειτα κατέστησε γνωστὴν (23 Αὐγούστου 1638) μίαν κατασκευὴν τῆς καθέτου, ἡ ὁποία σήμερον, μετὰ τρεῖς αἰῶνας, δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς μέθοδος ἀπαραμίλλου ἁπλότητος. Τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ὄγκου τοῦ γεννωμένου ἐκ περιστροφῆς τῆς κυκλοειδοῦς περὶ τὸν ἄξονά της ἐθεώρει εὔκολον, ἀλλ' ἠρνήθη ν' ἀσχοληθῇ, μὲ τὴν δήλωσιν ποὺ ἔκαμε κάποτε (11 Ὀκτωβρίου 1638) «παραιτοῦμαι τῆς γεωμετρίας», τὴν ὁποίαν ἐπηκολούθησε καὶ δευτέρα (29 Ἰανουαρίου 1640): «χάνω ἀδίκως τὸν καιρόν μου μὲ ὅλας αὐτὰς τὰς λεπτομερειακὰς ἀσχολίας».

Μία ἄλλη κατηγορία καμπύλων, μὲ τὴν ὁποίαν ἠσχολήθη, ὑποτασσόμενος εἰς τὴν μόδαν τῆς ἐποχῆς του, εἶναι ἡ τῶν παραβολῶν:

$$y = ax^{\mu},$$

ὅπου a σταθερὰ (ἐπιστολὴ πρὸς Mersenne 13 Ἰουλίου 1638), προσδιώρισε μάλιστα τὸ κέντρον βάρους χωρίου τῶν καμπύλων τούτων.

Περισσότερον νεωτεριστικαὶ εἶναι αἱ παρατηρήσεις, τὰς ὁποίας ἐξέθεσεν εἰς μίαν ἐπιστολήν του (20 Φεβρουαρίου 1639) πρὸς τὸν Debeaune, εὐπατρίδην τοῦ Blois, ἐπὶ τῶν καμπύλων, ποὺ φέρουν ἀκόμη τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου, καὶ τῶν ὁποίων ἡ σπουδαιότης συνίσταται εἰς τὸ ὅτι εἶναι αἱ πρῶται ποὺ ὡρίσθησαν μέσῳ μιᾶς ἰδιότητος τῶν ἐφαπτομένων.

Ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ Descartes

348. Ὑπάρχει ἕνα ἄλλο πεδίον ἐρευνῶν, μὲ τὸ ὁποῖον ἠσχολήθη ὁ Descartes ἐπιτυχῶς, μολονότι τίποτε δὲν ἐδημοσίευσεν ἐπ' αὐτοῦ. Τὸ πεδίον τοῦτο ἤνοιξεν εἰς τοὺς Γάλλους ὁ Bachet de Méziriac μὲ τὴν ἔκδοσιν ποὺ ἔκαμε τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου (§ 309), κατόπιν δὲ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Fermat ἔγινε τρόπον τινὰ «τῆς μόδας». Διὰ νὰ λάβωμεν πληροφορίας ἐπὶ τοῦ θέματος πρέπει πρὸ πάντων ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ἐπιστημονικήν του ἀλληλογραφίαν. Ἐξ αὐτῆς πληροφορούμεθα, ὅτι ἤρχισε ν' ἀσχολῆται μὲ σχετικὰς ἐρεύνας, ὄχι ἐξ ἰδίας παρορμήσεως, διότι τὰς ἐθεώρει «λίαν ἀνωφελεῖς» καὶ διότι ἐθεώρει ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ προτάσεις «ἠμποροῦν ἐνίοτε νὰ εὑρεθοῦν καλύτερα ἀπὸ κάποιον ἄνθρωπον φιλόπονον, ὁ ὁποῖος θὰ ἔθετεν ὡς σκοπόν του νὰ ἐξετάσῃ ἐπιμόνως τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν», ἀλλὰ κατόπιν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐπροτάθησαν πρὸς λύσιν ὑπὸ τοῦ Fermat, μέσῳ τοῦ Mersenne (31 Μαρτίου 1638). Πρὸ ὀλίγου ἀκόμη εὑρίσκετο τόσον μακρὰν ἀπὸ ἰδέας αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ὥστε ἐδήλωνε εἰς τὸν Frenicle (9 Ἰανουαρίου 1639), ὅτι «δὲν ἔχει περάσει ἀκόμη ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἠγνόουν τελείως τί ἐννοοῦμεν λέγοντες μὲ τὴν λέξιν διαιρέτης (partie aliquote) καὶ ἐχρειάσθη νὰ καταφύγω εἰς τὸν Εὐκλείδην διὰ νὰ τὸ μάθω»*. Ὅτι ὁ μαθηματικός μας δὲν ἐκοπίασε πολὺ διὰ ν' ἀνακαλύψῃ τὴν ἀκολουθητέαν ὁδὸν πρὸς λύσιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων πιστοποιεῖται ἀπὸ δύο ἐπιστολὰς του σταλείσας πρὸς τὸν Mersenne κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ ἔτους 1638, ὅπου ἀποδεικνύονται τὰ ἀκόλουθα δύο θεωρήματα τοῦ Fermat: α) Ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $8\nu - 1$ δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον, οὔτε ἄθροισμα δύο τετραγώνων, β) ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4\nu - 1$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Ἄλλο πρόβλημα προταθὲν εἰς τὸν Descartes καὶ λυθὲν ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὴν πρώτην ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐπιστολῶν εἶναι ἡ ἀνεύρεσις τῶν ζευγῶν ἀριθμῶν, ἑκάτερος τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν τοῦ ἄλλου· εἶναι οἱ «ἀριθμοὶ φίλοι» τοῦ Πυθαγόρου (Τόμος I, § 84). Διὰ τὴν εὕρεσιν αὐτῶν ὁ Descartes ἐκθέτει ἕνα κανόνα (ἄνευ ἀποδείξεως, διότι «προκειμένου περὶ προβλημάτων εἶναι ἀρκετὸν νὰ δοθῇ τὸ facit» — δηλαδὴ ὁ τρόπος λύσεως), ὁ ὁποῖος συμπίπτει μὲ ἐκεῖνον ποὺ εὕρομεν εἰς τὸν Thabit ben Korrah (Τόμος I, § 144). Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τούτου, ὁ Descartes φθάνει εἰς τρία ζεύγη φίλων ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον

* Γράφων τὰς λέξεις αὐτὰς ὁ Descartes, ἐλησμόνει ὅτι περὶ τὸ 1620 εἶχεν ἀσχοληθῆ μὲ τὴν ἀριθμητικήν, διότι εἰς τὴν συλλογὴν Cogitationes privatae εὑρίσκονται ἀρκετὰ χωρία ἀριθμητικοῦ περιεχομένου· π.χ.: ἡ τετάρτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λήγει πάντοτε εἰς 1, 5 ἢ 6 (καὶ 0;). Οἱ ἀριθμοὶ 6, 28 καὶ 496 εἶναι τέλειοι. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἰς κύβος.

(284, 220) ἦτο γνωστὸν ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος, τὸ δεύτερον (17296, 18416) ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Fermat, τὸ τρίτον (9633584, 9437056) εἶναι νέον.

Εἰς τὴν ἀρχαιότητα ἀνάγεται ἐπίσης (Τόμος I, § 37) ἡ ἔννοια τοῦ τελείου ἀριθμοῦ καὶ ἡ μέθοδος τῆς εὑρέσεως τοιούτων ἀριθμῶν. Ἡ ἀνάλογος ἔρευνα τῶν ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν διαιρετῶν του (ἀποκλειομένου πάντοτε τοῦ ἑαυτοῦ του), θίγεται μόνον εἰς τὴν πρὸς τὸν Mersenne ἐπιστολὴν τοῦ Descartes τῆς 27ης Μαΐου 1638, ὅπου ἀπαντᾶται κριτικὴ τῆς μεθόδου ποὺ ἐφαρμόζει ὁ Fermat διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τοὺς δύο : 120 καὶ 672. Εἰς τὴν ἑπομένην ἐπιστολήν του (3 Ἰουνίου 1638) εἰς τὸν ἀριθμὸν 523776 ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ A. Jumeau, ἡγούμενος τοῦ St. Croix, ὁ Descartes προσθέτει ἕνα ἄλλον : 1476304896. Εἰς τὴν ἰδίαν ἐπιστολὴν πραγματεύεται ἕνα ἄλλο ζήτημα προταθὲν ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου τοῦ St. Croix : νὰ προσδιορισθῇ εἰς ἀριθμοὺς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἰσοῦνται πρὸς τὰ ἐμβαδὰ ἄλλων ὀρθογωνίων τριγώνων. Φαίνεται ὅτι ὁ Mersenne, ἐνθουσιασθεὶς ἀπὸ τὴν εὐχέρειαν, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Descartes ἐχειρίζετο ζητήματα τοιαύτης φύσεως, τοῦ ἐζήτησε λεπτομερείας ἐπὶ τῆς ἐφαρμοζομένης ὑπ' αὐτοῦ μεθόδου, ἀλλ' ἐκεῖνος ἀπέκλεισε τὴν ἐρώτησιν (ἐπιστολὴ 13ης Ἰουλίου 1638) λέγων ὅτι «αὐτὴ δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν ἀνάλυσίν μου, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται καὶ εἰς προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου, ὅπως καὶ εἰς τὰ ἄλλα». Προσθέτει ὅτι αὐτὴ ἐπιτρέπει ἀκόμη τὴν εὕρεσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του, ἄλλον δοθέντα λόγον. Μερικαὶ σελίδες μιᾶς προγενεστέρας ἐπιστολῆς (15 Ἰουνίου 1638) ἀποδεικνύουν, ὅτι δὲν ἐκαυχᾶτο διὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ πραγματοποιήσῃ. Εἰς τὴν ἰδίαν ἐπιστολὴν ὁ Descartes διαβεβαιώνει, ὅτι δύναται ν' ἀποδείξῃ πῶς δὲν ὑφίστανται ἄλλοι τέλειοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι πλὴν ἐκείνων ποὺ ὑπέδειξεν ὁ Εὐκλείδης* καὶ πῶς δὲν ὑπάρχουν ἄλλοι ἀριθμοὶ τέλειοι περιττοὶ πλὴν ἐκείνων τῆς μορφῆς $(2n+1)p^2$, ὅπου $2n+1$ ἀριθμὸς πρῶτος καὶ p περιττός. Τὸ παράδειγμα ὅμως, τὸ ὑπ' αὐτοῦ ἀναφερόμενον, τοῦ γινομένου $22201 = 19^2 \cdot 61$ ἐπὶ $(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^2$ δὲν συνηγορεῖ ὑπὲρ τῆς ἀληθείας αὐτῆς τῆς προτάσεως, διότι ὁ προτεινόμενος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειος, ὅπως ὁ ἴδιος ὁ Descartes ἀνεγνώρισε γράφων ἔπειτα εἰς τὸν Frenicle (19 Ἰανουαρίου 1639) σχετικῶς. Ἀναγνωρίζει ἐκεῖ, ὅτι ἀγνοεῖ κριτήριον ἀλάνθαστον διὰ νὰ κρίνῃ κατὰ πόσον δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος, δίδων μόνον λαβὴν εἰς τὴν παρατήρησιν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς πρῶτος πρέπει νὰ λήγῃ εἰς ἕνα ἐκ τῶν ψηφίων 1, 3, 7, 9, ὅπερ προφανές.

Δὲν εἶναι αὐτὰ τὰ μοναδικὰ χωρία τῆς ἀλληλογραφίας τοῦ Descartes ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ δὲν ἐναπόκειται εἰς

* Γεγονὸς ἀποδειχθὲν ὑπὸ τοῦ Euler μετὰ πάροδον ἑνὸς αἰῶνος.

ἡμᾶς ἡ ὑποχρέωσις νὰ κάμωμεν μίαν ἐξαντλητικὴν ἀπαρίθμησιν τούτων. Παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι ἀπαιτεῖται ἡ πλέον ἐπιφυλακτικὴ φρόνησις πρὶν ἢ κάμῃ κανεὶς δεκτὰς ὡς ἀληθεῖς τὰς γενικεύσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἐκεῖνος ἐφέρετο, ἐμπιστευόμενος εἰς τὴν ἰδιοφυΐαν του. Τακτικὴ πάντοτε ἐπικίνδυνος, ἀλλὰ πολὺ περισσότερον, ὅταν μελετᾷ κανεὶς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε στοιχεῖον ἔχει τὴν ἰδίαν αὐτοῦ ἀτομικότητα.

Νέα ἴχνη ἀριθμητικῶν μελετῶν τοῦ Descartes εὑρίσκονται εἰς μερικὰ Opuscula postuma, δημοσιευθέντα προσφάτως. Ἐκτὸς πολλῶν τριάδων ἀριθμῶν μετρούντων τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἱκανοποιούντων ἐπομένως τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ἀπαντῶνται ἐκεῖ ἄλλαι ἀφορῶσαι τὸ ἀνάλογον πρόβλημα ἐπὶ τριγώνων ἐχόντων μίαν γωνίαν 60^0 ἢ 120^0, τουτέστι λύσεις μιᾶς τῶν ἐξισώσεων:

$$x^2 + y^2 \pm xy = z^2.$$

Μολονότι δὲν εἶναι ὀρθὰ ὅλα τὰ ἀναφερόμενα ἀποτελέσματα, ἐν τούτοις ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Descartes μία ἀξιόλογος γενίκευσις ἑνὸς προβλήματος ἀναγομένου εἰς τὴν ἀπωτέραν ἀρχαιότητα.

Ἄλλαι συμβολαὶ δοθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὴν ἄλγεβραν καὶ τὴν γεωμετρίαν

349. Εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 15 Νοεμβρίου 1638, ὁ Descartes βεβαιώνει ὅτι εἶναι κάτοχος εἰδικῶν τεχνασμάτων, διὰ τῶν ὁποίων καθίστανται ἁπλούστεροι οἱ ἀλγεβρικοὶ λογισμοὶ τοὺς ὁποίους ἐξετέλει διὰ λογαριασμόν του. Ποῖα ἦσαν ἄρα γε αὐτὰ τὰ τεχνάσματα; ὁ Θεὸς μόνον τὸ γνωρίζει! Εἰς ἕνα ἀπόσπασμα γνωσθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του καὶ ἀποβλέπων εἰς ρητοποίησιν τῆς ἐξισώσεως:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0,$$

ὁ Descartes παρέχει μὲ ἀκρίβειαν τὸ ἐξαγόμενον, παριστῶν αὐτὸ κατὰ τρόπον ἰδιάζοντα· γράφει δηλαδὴ ἕνα μόνον ἐκ τῶν ὅρων τοῦ αὐτοῦ τύπου καὶ προσθέτει κάτωθεν αὐτοῦ τὴν ἔνδειξιν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τούτων, ὡς ἑξῆς:

$$\underset{4}{a^4} - \underset{12}{4a^3b} + \underset{6}{6aabb} + \underset{12}{4aabc} - \underset{1}{40abcd} = 0.$$

Ἀλλὰ τοῦτο προφανῶς εἶναι τέχνασμα μετρίας ἀξίας μὴ ἔχον ἀσφαλῶς σχέσιν μὲ ἐκεῖνο, ποὺ ὑπαινίσσεται εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν ἐπιστολήν. Διὰ ν' ἀναζητήσωμεν σχετικὰς πληροφορίας, φυσικὸν εἶναι νὰ προστρέξωμεν εἰς μίαν Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν γεωμετρίαν (Introduction à la géométrie), ἡ ὁποία εὑρέθη μεταξὺ τῶν χειρογράφων τοῦ Leibniz καὶ ἡ

ἡμᾶς ἡ ὑποχρέωσις νὰ κάμωμεν μίαν ἐξαντλητικὴν ἀπαρίθμησιν τούτων. Παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι ἀπαιτεῖται ἡ πλέον ἐπιφυλακτικὴ φρόνησις πρὶν ἢ κάμῃ κανεὶς δεκτὰς ὡς ἀληθεῖς τὰς γενικεύσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἐκεῖνος ἐφέρετο, ἐμπιστευόμενος εἰς τὴν ἰδιοφυΐαν του. Τακτικὴ πάντοτε ἐπικίνδυνος, ἀλλὰ πολὺ περισσότερον, ὅταν μελετᾷ κανεὶς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε στοιχεῖον ἔχει τὴν ἰδίαν αὐτοῦ ἀτομικότητα.

Νέα ἴχνη ἀριθμητικῶν μελετῶν τοῦ Descartes εὑρίσκονται εἰς μερικὰ Opuscula postuma, δημοσιευθέντα προσφάτως. Ἐκτὸς πολλῶν τριάδων ἀριθμῶν μετρούντων τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἱκανοποιούντων ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ἀπαντῶνται ἐκεῖ ἄλλαι ἀφορῶσαι τὸ ἀνάλογον πρόβλημα ἐπὶ τριγώνων ἐχόντων μίαν γωνίαν 60° ἢ 120°, τουτέστι λύσεις μιᾶς τῶν ἐξισώσεων:

$$x^2 + y^2 \pm xy = z^2.$$

Μολονότι δὲν εἶναι ὀρθὰ ὅλα τὰ ἀναφερόμενα ἀποτελέσματα, ἐν τούτοις ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Descartes μία ἀξιόλογος γενίκευσις ἑνὸς προβλήματος ἀναγομένου εἰς τὴν ἀπωτέραν ἀρχαιότητα.

Ἄλλαι συμβολαὶ δοθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὴν ἄλγεβραν καὶ τὴν γεωμετρίαν

349. Εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 15 Νοεμβρίου 1638, ὁ Descartes βεβαιώνει ὅτι εἶναι κάτοχος εἰδικῶν τεχνασμάτων, διὰ τῶν ὁποίων καθίστανται ἁπλούστεροι οἱ ἀλγεβρικοὶ λογισμοὶ τοὺς ὁποίους ἐξετέλει διὰ λογαριασμόν του. Ποῖα ἦσαν ἄρα γε αὐτὰ τὰ τεχνάσματα; ὁ Θεὸς μόνον τὸ γνωρίζει! Εἰς ἕνα ἀπόσπασμα γνωσθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του καὶ ἀποβλέπων εἰς ρητοποίησιν τῆς ἐξισώσεως:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0,$$

ὁ Descartes παρέχει μὲ ἀκρίβειαν τὸ ἐξαγόμενον, παριστῶν αὐτὸ κατὰ τρόπον ἰδιάζοντα· γράφει δηλαδὴ ἕνα μόνον ἐκ τῶν ὅρων τοῦ αὐτοῦ τύπου καὶ προσθέτει κάτωθεν αὐτοῦ τὴν ἔνδειξιν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τούτων, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{matrix} a^4 & - 4a^3b & + 6aabb & + 4aabc & - 40abcd = 0. \\ 4 & 12 & 6 & 12 & 1 \end{matrix}$$

Ἀλλὰ τοῦτο προφανῶς εἶναι τέχνασμα μετρίας ἀξίας μὴ ἔχον ἀσφαλῶς σχέσιν μὲ ἐκεῖνο, ποὺ ὑπαινίσσεται εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν ἐπιστολήν. Διὰ ν' ἀναζητήσωμεν σχετικὰς πληροφορίας, φυσικὸν εἶναι νὰ προστρέξωμεν εἰς μίαν Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν γεωμετρίαν (Introduction à la géométrie), ἡ ὁποία εὑρέθη μεταξὺ τῶν χειρογράφων τοῦ Leibniz καὶ ἡ

ὁποία πιθανῶς εἶναι τὸ ἔργον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐγράφη ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Descartes καὶ περὶ τοῦ ὁποίου συχνὴ γίνεται μνεία εἰς τὴν καρτεσιανὴν ἀλληλογραφίαν. Ἀλλ' ἡ διάψευσις τῶν ἐλπίδων ἔρχεται ἀμέσως μὲ τὴν διαπίστωσιν, ὅτι πρόκειται περὶ ἑνὸς μετρίου ἐγχειριδίου ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, ὅπου διδάσκονται οἱ συνήθεις κανόνες τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ ἐπὶ ποσοτήτων ρητῶν ἢ ἀρρήτων. Σημειωτέον ὅτι, κατ' ἀπόκλισιν πρὸς ὅ,τι παρετηρήσαμεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἐδῶ τηρεῖται πάντοτε σεβασμὸς πρὸς τὸν νόμον τῆς ὁμογενείας, τὸν ὁποῖον ἐξήνεγκεν ὁ Viète. Ἀξίζει τὸν κόπον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὁ Descartes διὰ νὰ ἐξαγάγῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς διωνύμου $a + \sqrt{bc}$, ἀποκαθιστᾷ τὴν ταυτότητα:

$$\sqrt{a+\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}bc}} + \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}bc}}\,,$$

ἡ ὁποία εἶναι χρήσιμος μόνον ὅταν τὸ ποσὸν $(a^2 - bc)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις ἔχει ἐξαφανισθῆ ἀπὸ τὰ σύγχρονα ἐγχειρίδια τῆς ἀλγέβρας. Τοὐναντίον ὅμως εἶναι ἄξιον σημειώσεως, ὅτι ἐντεῦθεν ἔλαβεν ὁ Descartes ἀφορμὴν νὰ ζητήσῃ τὸν ἀνάλογον ὑπολογισμὸν τῆς

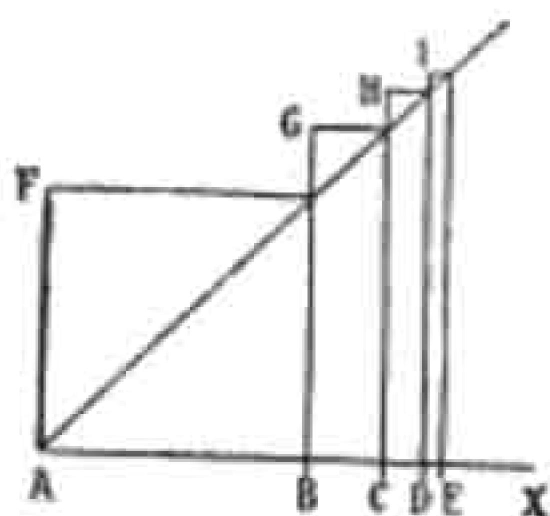
$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\,.$$

Περὶ αὐτοῦ γίνεται λόγος εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne (30 Σεπτεμβρίου 1640) καὶ εἰς μερικὰς σελίδας δημοσιευθείσας μετὰ θάνατον, μετρίας σαφηνείας, ἀλλ' ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται ὅτι ὁ Descartes συνέδεε τὴν νέαν πρᾶξιν μὲ τὴν λύσιν τῶν κυβικῶν ἐξισώσεων.

Ἡ Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Γεωμετρίαν κλείει μὲ τὴν λύσιν τεσσάρων προβλημάτων ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν, εἰς τὰ ὁποῖα ματαίως θ' ἀναζητήσῃ κανεὶς τὰς χρησίμους ἐκείνας μεθόδους συντομεύσεως τῶν λογισμῶν, τὰς ὁποίας ὁ μαθηματικός μας ἐκαυχᾶτο ὅτι ἐγνώριζεν.

350. Ἠσχολήθη ἀκόμη μὲ ὡρισμένα γεωμετρικὰ ζητήματα ξένα πρὸς τὸ πρόγραμμα τῆς Γεωμετρίας, περὶ τῶν ὁποίων ὅμως ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ κάμωμεν ἐδῶ μνείαν. Εἰς ἕνα ἀπόσπασμα εὑρεθὲν μεταξὺ τῶν χειρογράφων του, ὑποδεικνύεται μιὰ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἐπιτρέπουσα τὴν κατὰ προσέγγισιν εὕρεσιν τοῦ π. Τῆς ἐν λόγῳ κατασκευῆς ἐξῆρε τὴν

σημασίαν καὶ τὴν ἀξίαν ὁ Euler (Novi Comment. Petrop. Τόμος VIII, 1760-66). Εἰς ἡμᾶς ἀρκεῖ νὰ τὴν ἀναφέρωμεν: «Δοθέντος (σχ. 25) τοῦ τετραγώνου BF, ἂς προστεθῇ τὸ ὀρθογώνιον CG μὲ πλευρὰς AC καὶ CB ἴσον πρὸς τὸ $^1/_4$ τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Κατόπιν τὸ ὀρθογώνιον DH μὲ πλευρὰς DA καὶ DC ἴσον πρὸς τὸ $^1/_4$ τοῦ προηγουμένου. Ὁμοίως ἂς κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον EI καὶ ἂς συνεχισθῇ ἡ ἐν λόγῳ διαδικασία ἐπ' ἄπειρον εἰς X. Θὰ εἶναι τότε AX ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι ἴση πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἐπὶ πλέον AC εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ὀκτάγωνον τὸ ἰσοπερίμετρον πρὸς τὸ δοθὲν τετράγωνον, AD ἡ διάμετρος ἡ ἀνάλογος εἰς τὸ 16γωνον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς». Καμμία ἀπόδειξις δὲν δίδεται εἰς τὰς προτάσεις αὐτάς, ἀλλ' εἶναι πιθανώτατον, διὰ νὰ μὴ εἴπωμεν βέβαιον, ὅτι ὁ Descartes ὡδηγήθη εἰς τὰς ἀληθείας αὐτὰς ἑρμηνεύων γεωμετρικῶς τ' ἀποτέλεσματα τῶν ὑπολογισμῶν τῶν χορδῶν κύκλου, οἱ ὁποῖοι ἀνευρεθέντες μεταξὺ τῶν χειρογράφων του ἐδόθησαν ἐσχάτως εἰς τὴν δημοσιότητα.



Σχ. 25

Εἰς τὰ ἔτη 1619 - 20* πιθανῶς ἀνάγονται μερικαὶ πνευματώδεις παρατηρήσεις του ἐπὶ τῶν πολυέδρων, αἱ ὁποῖαι τοποθετοῦν τὸν Descartes εἰς τὴν πρώτην θέσιν μεταξὺ τῶν συγχρόνων πρωταγωνιστῶν τῆς σχετικῆς θεωρίας. Αἱ παρατηρήσεις αὐταὶ ἔχουν καταχωρηθῆ εἰς μερικὰς σελίδας ὑπὸ τὸν τίτλον De solidorum elementis καὶ ἔχουν ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: «Ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας, οὕτω καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν διέδρων γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς 8 ὀρθὰς γωνίας». Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ὁ Descartes συνάγει τὴν σχέσιν:

$$\Sigma = 4V - 8, \tag{1}$$

ἡ ὁποία συνδέει τὸν ἀριθμὸν V τῶν κορυφῶν πολυέδρου πρὸς τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ἐπιπέδων του γωνιῶν ἐκπεφρασμένων εἰς ὀρθὰς γωνίας, καὶ ἐν συνεχείᾳ τὴν

$$\Sigma = 4(S - F), \tag{2}$$

ὅπου S παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν καὶ F τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν τοῦ ὑπ' ὄψει πολυέδρου. Καὶ ἐπειδὴ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ Σ προκύπτει:

$$4(S - F) = 4(V - 2)$$

ἤ, ἁπλούστερον,

$$S + 2 = V + F, \tag{3}$$

* Τοῦτο, προκύπτει, μεταξὺ ἄλλων, ἐκ τῆς παρουσίας τῶν «κοσσικῶν σημείων» τὰ ὁποῖα ὁ Descartes ἐγκατέλειψεν εἰς ὥριμον ἡλικίαν.

φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Descartes ἔφθασε πολὺ πρὸ τοῦ Euler εἰς τὴν θεμελιώδη σχέσιν τῆς θεωρίας τῶν πολυέδρων, τὴν φέρουσαν συνήθως τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου. Ἐκ τῶν προγενεστέρων στοχασμῶν ὁ Descartes ἐξήγαγε πολλὰς συνεπείας· περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τοὺς «πολυεδρικοὺς ἀριθμούς», ὡς ἐπέκτασιν τῶν «πολυγωνικῶν ἀριθμῶν», τοὺς ὁποίους ἐμελέτησαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες.

Κριτικαὶ καὶ ἐπιθέσεις

351. Ἐνῷ αἱ ἀστραπαὶ τῆς μεγαλοφυΐας, αἱ ὁποῖαι ἐκπέμπονται ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Descartes, εἶχον ὡς ἀποτέλεσμα τὴν δημιουργίαν περὶ αὐτὸν μιᾶς ὁλοκλήρου λεγεῶνος θαυμαστῶν καὶ μαθητῶν, ἡ ζηλοτυπία, ἡ ὁποία πάντοτε ἐνεδρεύει ἐναντίον τῶν μεγάλων, ἐγέννησε περὶ αὐτὸν ἕνα πλῆθος δυσφημιστῶν, τῶν ὁποίων τὸ μένος ὑπεδαύλιζεν ἡ ἀλαζονικὴ καὶ προκλητικὴ στάσις, τὴν ὁποίαν ἐτήρει ὁ Descartes εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Ἡ πρώτη ἔρις, εἰς τὴν ὁποίαν ἐνεπλάκη, ἔχει ὡς πρωταγωνιστὴν τὸν Beaugrand. Ἰδοὺ ἐν συντομίᾳ ἡ ἀρχὴ καὶ αἱ κυριώτεραι φάσεις τῆς ἔριδος. Ὅταν ὁ Mersenne, ἀρχομένου τοῦ 1637, ἔλαβεν ἀπὸ τὴν Ὁλλανδίαν τὰ τυπωμένα φυλλάδια τοῦ Discours de la méthode καὶ τῶν Essais (Dioptrique, Météores, Géométrie), διὰ νὰ τὰ παρουσιάσῃ εἰς τὸν γενικὸν γραμματέα τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας καὶ λάβῃ τὸ προνόμιον τῆς δημοσιεύσεως, ὁ Beaugrand, ἐπωφελούμενος ἢ μᾶλλον ἐκμεταλλευόμενος τὴν ὑπ' αὐτοῦ κατεχομένην ὑψηλὴν καὶ ἐπίσημον θέσιν, κατεκράτησε τὸ μέρος Dioptrique ἐπὶ χρονικὸν διάστημα τοὐλάχιστον τεσσάρων μηνῶν. Ἐπὶ πλέον, ὅταν ἔλαβεν ἕνα τυπωμένον ἀντίτυπον τοῦ ὅλου ἔργου, τὸ ἐδέχθη, ἀλλ' ἠρνήθη νὰ καταβάλῃ τὸ ἀντίτιμον. Τὰ δύο αὐτὰ δείγματα ἐλλείψεως λεπτότητος ἐξηρέθισαν δικαίως τὸν Descartes, ὁ ὁποῖος δὲν ἄφησε νὰ τοῦ διαφύγῃ ἡ εὐκαιρία νὰ ἐκδηλώσῃ τὴν περιφρόνησίν του πρὸς ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον πάντοτε ἐχαρακτήριζε μὲ τὸ ὄνομα «le géostacien» ἐξ ἀφορμῆς ἑνὸς ἔργου του τιτλοφορουμένου, ὡς εἴδομεν, Géostatice (§ 342). Τοὺς λόγους τῆς μικρᾶς ἐκτιμήσεως ποὺ ἔτρεφε πρὸς αὐτὸν ὁ Descartes ἐξέθεσεν εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne τὴν 31ην Μαρτίου 1638. Προγενεστέρως (Δεκέμβριος 1637), ὁ Descartes εἶχεν ἀναβιβάσει εἰς τὰ ἄστρα τὴν Γεωμετρίαν του, προσθέτων ἐν τέλει τῆς ἐπιστολῆς του τὰ ἑξῆς: «Σᾶς παρακαλῶ νὰ μείνουν αὐτὰ μεταξύ μας· διότι θὰ εὑρισκόμην εἰς δυσχερεστάτην θέσιν, ἂν ἄλλοι ἐμάνθανον ὅτι σᾶς ἔγραψα ἐπ' αὐτοῦ τοῦ θέματος».

Τὴν σύστασιν ὅμως αὐτὴν ὁ μωρότατος ἐκεῖνος φλύαρος δὲν ἔλαβε καθόλου ὑπ' ὄψιν του. Ὅτι ἔδειξε τὴν ἐπιστολὴν ἐκείνην εἰς τὸν Beaugrand ἀποδεικνύεται ἀπὸ τρία φύλλα ὀξυτάτης κριτικῆς, ἀνώνυμα, ἀλλ' ἀναμφιβόλως ὀφειλόμενα εἰς αὐτόν, ὅπου μὲ δριμύτητα καταπολεμεῖ τὸν «mé-

φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Descartes ἔφθασε πολὺ πρὸ τοῦ Euler εἰς τὴν θεμελιώδη σχέσιν τῆς θεωρίας τῶν πολυέδρων, τὴν φέρουσαν συνήθως τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου. Ἐκ τῶν προγενεστέρων στοχασμῶν ὁ Descartes ἐξήγαγε πολλὰς συνεπείας· περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τοὺς «πολυεδρικοὺς ἀριθμούς», ὡς ἐπέκτασιν τῶν «πολυγωνικῶν ἀριθμῶν», τοὺς ὁποίους ἐμελέτησαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες.

Κριτικαὶ καὶ ἐπιθέσεις

351. Ἐνῷ αἱ ἀστραπαὶ τῆς μεγαλοφυΐας, αἱ ὁποῖαι ἐκπέμπονται ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Descartes, εἶχον ὡς ἀποτέλεσμα τὴν δημιουργίαν περὶ αὐτὸν μιᾶς ὁλοκλήρου λεγεῶνος θαυμαστῶν καὶ μαθητῶν, ἡ ζηλοτυπία, ἡ ὁποία πάντοτε ἐνεδρεύει ἐναντίον τῶν μεγάλων, ἐγέννησε περὶ αὐτὸν ἕνα πλῆθος δυσφημιστῶν, τῶν ὁποίων τὸ μένος ὑπεδαύλιζεν ἡ ἀλαζονικὴ καὶ προκλητικὴ στάσις, τὴν ὁποίαν ἐτήρει ὁ Descartes εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Ἡ πρώτη ἔρις, εἰς τὴν ὁποίαν ἐνεπλάκη, ἔχει ὡς πρωταγωνιστὴν τὸν Beaugrand. Ἰδοὺ ἐν συντομίᾳ ἡ ἀρχὴ καὶ αἱ κυριώτεραι φάσεις τῆς ἔριδος. Ὅταν ὁ Mersenne, ἀρχομένου τοῦ 1637, ἔλαβεν ἀπὸ τὴν Ὀλλανδίαν τὰ τυπωμένα φυλλάδια τοῦ Discours de la méthode καὶ τῶν Essais (Dioptrique, Météores, Géométrie), διὰ νὰ τὰ παρουσιάσῃ εἰς τὸν γενικὸν γραμματέα τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας καὶ λάβῃ τὸ προνόμιον τῆς δημοσιεύσεως, ὁ Beaugrand, ἐπωφελούμενος ἢ μᾶλλον ἐκμεταλλευόμενος τὴν ὑπ' αὐτοῦ κατεχομένην ὑψηλὴν καὶ ἐπίσημον θέσιν, κατεκράτησε τὸ μέρος Dioptrique ἐπὶ χρονικὸν διάστημα τοὐλάχιστον τεσσάρων μηνῶν. Ἐπὶ πλέον, ὅταν ἔλαβεν ἕνα τυπωμένον ἀντίτυπον τοῦ ὅλου ἔργου, τὸ ἐδέχθη, ἀλλ' ἠρνήθη νὰ καταβάλῃ τὸ ἀντίτιμον. Τὰ δύο αὐτὰ δείγματα ἐλλείψεως λεπτότητος ἐξηρέθισαν δικαίως τὸν Descartes, ὁ ὁποῖος δὲν ἄφησε νὰ τοῦ διαφύγῃ ἡ εὐκαιρία νὰ ἐκδηλώσῃ τὴν περιφρόνησίν του πρὸς ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον πάντοτε ἐχαρακτήριζε μὲ τὸ ὄνομα «le géostacien» ἐξ ἀφορμῆς ἑνὸς ἔργου του τιτλοφορουμένου, ὡς εἴδομεν, Géostatice (§ 342). Τοὺς λόγους τῆς μικρᾶς ἐκτιμήσεως ποὺ ἔτρεφε πρὸς αὐτὸν ὁ Descartes ἐξέθεσεν εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne τὴν 31ην Μαρτίου 1638. Προγενεστέρως (Δεκέμβριος 1637), ὁ Descartes εἶχεν ἀναβιβάσει εἰς τὰ ἄστρα τὴν Γεωμετρίαν του, προσθέτων ἐν τέλει τῆς ἐπιστολῆς του τὰ ἑξῆς: «Σᾶς παρακαλῶ νὰ μείνουν αὐτὰ μεταξύ μας· διότι θὰ εὑρισκόμην εἰς δυσχερεστάτην θέσιν, ἂν ἄλλοι ἐμάνθανον ὅτι σᾶς ἔγραψα ἐπ' αὐτοῦ τοῦ θέματος».

Τὴν σύστασιν ὅμως αὐτὴν ὁ μωρότατος ἐκεῖνος φλύαρος δὲν ἔλαβε καθόλου ὑπ' ὄψιν του. Ὅτι ἔδειξε τὴν ἐπιστολὴν ἐκείνην εἰς τὸν Beaugrand ἀποδεικνύεται ἀπὸ τρία φύλλα ὀξυτάτης κριτικῆς, ἀνώνυμα, ἀλλ' ἀναμφιβόλως ὀφειλόμενα εἰς αὐτόν, ὅπου μὲ δριμύτητα καταπολεμεῖ τὸν «mé-

thodiste», ἐπίθετον δημιουργηθὲν εἰς ἀνταπόδοσιν τοῦ «géostacien», ποὺ ἐφιλοτέχνησεν ὁ Descartes ἐναντίον του. Φυσικὰ εἰς τὰ φύλλα ἐκεῖνα δὲν περιέχεται τίποτε τὸ δυνάμενον νὰ κλονίσῃ τὴν στερεὰν δομὴν τῆς Γεωμετρίας, καὶ τίποτε τὸ δυνάμενον, τοὐλάχιστον, νὰ πληρώσῃ τὰ κενὰ τοῦ μνημειώδους ἔργου.

Ὁ Descartes, μολονότι ἐγνώριζεν, ὅτι οἱ ἐναντίον του λίβελλοι τοῦ Beaugrand εἶχον εὐρεῖαν διάδοσιν εἰς Παρισίους, ἠρνεῖτο πάντοτε νὰ λάβῃ γνῶσιν προτοῦ δοθοῦν εἰς τὴν δημοσιότητα διὰ τοῦ τύπου (ἐπιστολὴ πρὸς Mersenne 11ης Ἰουνίου 1640). Τοιουτοτρόπως ἡ ἔρις δὲν εἶχεν εὐρυτέραν διάδοσιν καὶ παρέμεινε στεῖρα διὰ τὴν ἐπιστήμην. Παρὰ ταῦτα εἶναι χρήσιμος εἰς τὸ νὰ δώσῃ μίαν ἰδέαν τῶν συνηθειῶν τῆς ἐποχῆς καὶ νὰ ρίψῃ ὀλίγον φῶς εἰς τὴν ψυχολογίαν τῶν διαμαχομένων.

Ἡ ἀγένεια τοῦ Beaugrand δὲν περιωρίσθη μόνον εἰς τὴν ἀπρέπειαν τῆς αὐθαιρέτου καὶ μακρᾶς κατοχῆς τῶν τυπωμένων φυλλαδίων τῆς Dioptrique πρὸ τῆς δημοσιεύσεώς των, ἀλλ' ἔφθασε μέχρι τοῦ σημείου νὰ φέρῃ εἰς γνῶσιν τοῦ Fermat τὸ περιεχόμενον. Ὁ δὲ νομομαθὴς τῆς Τουλούζης, κατόπιν τῆς ἐνημερώσεώς του, ἀπέστειλεν εἰς τὸν Mersenne ἀπὸ τοῦ Ἀπριλίου 1637, μὲ τὸν σκοπὸν ν' ἀνακοινωθοῦν εἰς τὸν Descartes, μερικὰς κριτικὰς παρατηρήσεις του ἐπὶ τῶν ὅσων ὁ τελευταῖος εἶχε γράψει σχετικῶς μὲ τὴν ἀνάκλασιν καὶ διάθλασιν τοῦ φωτός. Ὁ Descartes ἐπεχείρησε νὰ ἀνταποδώσῃ τὸ κτύπημα (ἐπιστολὴ πρὸς Mersenne 5 Ὀκτωβρίου 1637), ἀλλ' ὁ Fermat, μετὰ ἕνα μῆνα, ἐπανέλαβε τὴν ἐπίθεσιν μὲ νέα ἐπιχειρήματα. Ἡ ὑπόθεσις δὲν ἐβράδυνε νὰ λάβῃ διαστάσεις καὶ οἱ δύο ἀντιμαχόμενοι ἀντήλλαξαν ἀρκετὰς προκλήσεις, αἱ ὁποῖαι συνίσταντο εἰς προβλήματα πρὸς λύσιν καὶ θεωρήματα πρὸς ἀπόδειξιν. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀπαντήσεις δὲν ἤρχοντο μὲ μακρὰ περιθώρια ἀναμονῆς, ἡ ἐπιστήμη μας δὲν ὠφελήθη ὀλίγον ἐκ τῆς παρατάσεως τῆς ἔριδος. Ἐγένοντο πράγματι τότε γνωσταὶ ἐνδιαφέρουσαι ἰδιότητες τῶν παραβολῶν πάσης τάξεως καὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς αὐτῶν παραγομένων στερεῶν, ἦλθον εἰς φῶς σημαντικαὶ προτάσεις τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἐμελετήθησαν αἱ καμπύλαι «φύλλον τοῦ Καρτεσίου», «κυκλοειδὴς» καὶ ἄλλαι.

Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι, ἐνῷ ὁ Descartes εἰς μερικὰς φάσεις τῆς φιλονικίας παρεσύρθη εἰς φράσεις εἰρωνικὰς καὶ ἀγενεῖς, μὴ κατανοήσας ἴσως ἢ παρανοήσας τὰ γραφόμενα τοῦ ἀντιπάλου του, δὲν ἐδίστασεν ὅμως ἔπειτα νὰ δηλώσῃ εἰς τὸν Fermat : «δὲν ἐγνώρισα μέχρι τῆς στιγμῆς πρόσωπον, τόσον καταπληκτικὰ ἐνήμερον εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅσον σεῖς». Εἰς τὸν Mersenne ἐξ ἄλλου εἶχε γράψει (Δεκέμβριος 1638) ὅτι «εἰς τὰ γραπτὰ τοῦ ἀντιπάλου του εἶχεν εὕρει δύο ἢ τρία πράγματα ποὺ ἦσαν καλά, ἀνάμικτα μὲ πολλὰ ἄλλα, ποὺ δὲν εἶχον τὸ προσὸν αὐτό».

352. Ἀκόμη καὶ εἰς τὴν Ὁλλανδίαν ἡ δημοσίευσις τῆς Γεωμετρίας ἔδωσε λαβὴν εἰς μίαν ἐπιστημονικὴν φιλονικίαν, μὲ τὰς ἀπαραιτήτους προκλήσεις, ἡ ὁποία δὲν ἐγνώσθη βεβαίως εὐρύτατα, ὅπως ἐκείνη ποὺ ἔλαβε χώραν μεταξὺ Cardano καὶ Tartaglia, διότι ἐξειλίχθη διὰ δημοσιευμάτων γραφέντων εἰς τὴν φλαμανδικήν, μίαν γλῶσσαν ἀκόμη καὶ τότε ἐλάχιστα γνωστὴν εἰς τὴν Εὐρώπην. Ἡ ἔρις προεκλήθη ἀπὸ τὸν Johann Stampionen, γεννηθέντα εἰς Rotterdam τὸ 1610 ἀπὸ πατέρα μαθηματικὸν φέροντα τὸ αὐτὸ ὄνομα. Ὑπῆρξε διδάσκαλος τοῦ Huygens καὶ τοῦ πρίγκιπος τῆς Ὀράγγης τοῦ μετέπειτα ἀνελθόντος εἰς τὸν θρόνον ὑπὸ τὸ ὄνομα Γουλιέλμος II. Τοῦ μαθηματικοῦ τούτου ἔχομεν μίαν τριγωνομετρίαν (1632) καὶ μίαν ἄλγεβραν (1639). Ἡ ἀλληλογραφία τοῦ Descartes παρέχει πληροφορίας περὶ μιᾶς ἀνταλλαγῆς προβλημάτων, ἡ ὁποία ἔλαβε χώραν μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ Stampionen κατὰ τὰ τέλη τοῦ 1633, ὡς καὶ περὶ τῆς μικρᾶς ὑπολήψεως, τὴν ὁποίαν ἔτρεφε δι' αὐτὸν ὁ μέγας στοχαστής. Καὶ ἴσως εἰς τὴν ἀδυναμίαν τοῦ Stampionen νὰ λύσῃ τὰ δύο προβλήματα ποὺ τοῦ προέτεινε πρέπει ν' ἀναζητηθῇ ἡ πρώτη ρίζα τῆς μετὰ πενταετίαν ἐκραγείσης διαμάχης (Τοῦ ἑνὸς προβλήματος τὴν ἐκφώνησιν εἶχε σκοπίμως καταστήσει περίπλοκον, κατὰ τὴν συνήθειαν τοῦ Descartes νὰ φέρῃ εἰς ἀμηχανίαν τοὺς ἀντιπάλους του· τὸ ἄλλο ἦτο τὸ πρόβλημα τοῦ Πάππου, εἰς τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν, ἀφιέρωσεν ὁ ἴδιος τόσας σελίδας τῆς Γεωμετρίας του).

Ἡ φιλονικία ἤνοιξε μὲ μίαν πρόκλησιν, φέρουσαν ὑπογραφὴν κάποιου Jean Baptiste d'Anverse, καὶ ἀπευθυνομένην πρὸς τοὺς ὀλλανδοὺς μηχανικούς. Εἰς τὴν πρόκλησιν αὐτὴν ἐπροτείνοντο πρὸς λύσιν μερικὰ προβλήματα καὶ ἀνηγγέλετο ἡ προσεχὴς δημοσίευσις μιᾶς Ἀλγέβρας. Ὅταν ἡ ἄλγεβρα ἐδημοσιεύθη μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Stampionen, ἀπεκαλύφθη ἡ προέλευσις τῆς προκλήσεως ἐκείνης. Μολονότι τὸ ἔργον ἐκεῖνο ἔβριθε σφαλμάτων, ὁ Descartes ἐφοβήθη ὅτι ἡ δημοσίευσις ἑνὸς ὀλλανδικοῦ ἀντικαρτεσιανικοῦ ἔργου θ' ἀπετέλει ἐνδεχομένως μίαν ἀπειλὴν κατὰ τῆς ὑπολήψεως, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν εἰς τὰς Κάτω Χώρας, θὰ ἐμετρίαζε τὴν ἐπιτυχίαν τῆς Γεωμετρίας του καὶ θὰ ἔρριπτεν ἔλαιον εἰς τὴν πυρὰν τῆς ἐχθρότητος, τὴν ὁποίαν διετήρουν οἱ ἐν Παρισίοις ἀντίπαλοί του. Διὰ τοῦτο ἐσκέφθη ν' ἀνασκευάσῃ τὸ ἔργον ἐκεῖνο διὰ μιᾶς κριτικῆς. Ἀλλ' ἐν μέρει διὰ νὰ συμμορφωθῇ πρὸς τὰς συνηθείας τῆς ἐποχῆς καὶ ἐν μέρει, διότι δὲν ἠσθάνετο ἑαυτὸν τέλειον εἰς τὴν χρῆσιν τῆς φλαμανδικῆς γλώσσης, ἀπεφάσισε νὰ παρακινήσῃ τὸν Jacopo Wassenaer, νεαρὸν ἀγρονόμον τῆς Οὐτρέχτης, συνδεόμενον μὲ τὸν Descartes δι' ἐγκαρδίου φιλίας, νὰ γράψῃ αὐτὸς τὴν κριτικήν, ἡ ὁποία καὶ ἐδημοσιεύθη τὸ αὐτὸ ἔτος (1639) μὲ τὸν μετριόφρονα τίτλον Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ἔργου τοῦ Stampionen.

Ὁ τελευταῖος εὐθὺς ὡς ἔλαβε γνῶσιν τῆς κριτικῆς προεκάλεσε τὸν ἀντίπαλόν του μὲ τρία φύλλα τυπωμένα, ν' ἀποδείξῃ τὴν βασιμότητα τῶν

ἰσχυρισμῶν τῆς κριτικῆς του. Ἐπηκολούθησε κατακλυσμὸς ἀνταλλασσομένων λιβέλλων* καὶ μία πρότασις στοιχήματος διὰ ποσὸν 600 ταλήρων, τὸ ὁποῖον ἐπρόκειτο νὰ καταθέσῃ ὁ ἐν ἀδίκῳ εὑρισκόμενος ὑπὲρ ἀγαθοεργοῦ σκοποῦ. Ἐξέρχεται τοῦ πλαισίου τῆς ἱστορίας μας ἡ περιγραφὴ τῶν λεπτομερειῶν ἐπὶ τῶν μακρῶν ἀντεγκλήσεων περὶ τοῦ τρόπου διεξαγωγῆς τῆς κρίσεως, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεγάλην ὁμοιότητα πρὸς τὰ διαδραματισθέντα μεταξὺ Tartaglia καὶ Ferrari. Ἡ ἀναλογία ἐπικυροῦται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι, μολονότι ἡ διαμάχη ἐνετοπίζετο τελικῶς εἰς τὸν κανόνα, ποὺ ἔδιδεν ὁ Stampionen διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ρίζης διωνύμου τῆς μορφῆς $a+\sqrt{b}$, χάρις εἰς τὴν εἰρηνευτικὴν ἐπέμβασιν τοῦ Κωνσταντίνου Huygens, πατρὸς τοῦ διασήμου μαθηματικοῦ, τὰ πάντα περιέπεσαν εἰς σιωπήν, πρὸς μεγάλην ἱκανοποίησιν τῶν Ὁλλανδῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ εἰλικρινεῖς θαυμασταὶ τοῦ διασήμου φιλοξενουμένου των, ἐφοβοῦντο μίαν δυσμενῆ κρίσιν εἰς βάρος ἑνὸς συμπατριώτου των, εὐνοουμένου τῆς Αὐλῆς. Δι' ἄλλην μίαν φορὰν «πολὺς θόρυβος διὰ τὸ τίποτε !»

ΜΕΡΟΣ II: FERMAT

Βιογραφία τοῦ Fermat

353. Κατὰ τὴν ἐποχήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἔζησεν ὁ Descartes, ἡ Γαλλία ἐγέννησε πολλοὺς ἐξέχοντας διανοουμένους, οἱ ὁποῖοι, χάρις εἰς τὴν στάσιν ποὺ ἐτήρησαν ἀπέναντι τοῦ μεγάλου ἐκείνου στοχαστοῦ, πρέπει νὰ ἐξετασθοῦν ἐν συναφείᾳ πρὸς αὐτόν. Ἔχομεν κάμει ἤδη λόγον διὰ μερικοὺς μόνον (§ 342). Ἀλλὰ προέχουσαν θέσιν μεταξὺ τούτων κατέχει ὁ Pierre Fermat. Ἐξ ὁλοκλήρου ἀπησχολημένος εἰς ἐπίσημα καθήκοντα πλήρη εὐθύνης, δὲν διέθετεν εἰς τὰ μαθηματικὰ παρὰ τὰς σπανίας μόνον στιγμὰς τῆς ἀργίας του, ἀφίνων εἰς τοὺς ἐπιγενομένους τὴν φροντίδα νὰ διασώσουν ἐκ τῆς διασπορᾶς τὰς σημειώσεις, τὰς ὁποίας ἐκράτει ἐν σπουδῇ, καὶ τὰς μαθηματικοῦ περιεχομένου ἐπιστολάς του. Ἡ ἐνθουσιώδης νεκρολογία, ποὺ ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Ἐφημερίδα τῶν σοφῶν (Journal des Sçavants) ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ θανάτου του, ἀποτελεῖ τεκμήριον τοῦ θαυμασμοῦ τῶν συγχρόνων του πρὸς αὐτόν, καὶ εἶναι πρὸς ὄνειδος τοῦ Voltaire τὸ ὅτι δὲν περιέλαβε τὸ ὄνομά του εἰς τὸν πίνακα τῶν προσωπικοτήτων ποὺ ἐδόξασαν τὸν αἰῶνα, τὸν ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἀποκληθέντα, μὲ προφανῆ δόσιν αὐλοκολακείας, αἰῶνα τοῦ Λουδοβίκου XIV.

---

* Ἐκ τούτων ὁ πλέον ἐνδιαφέρων εἶναι ὁ τοῦ Wassennaer ὑπὸ τὸν τίτλον Ὁ ἀποκαλυφθεὶς Stampionen (1640). Ὁ λίβελλος φέρει ἀνώνυμον πρόλογον, ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐγράφη ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὸν Descartes.

ἰσχυρισμῶν τῆς κριτικῆς του. Ἐπηκολούθησε κατακλυσμὸς ἀνταλλασσομένων λιβέλλων* καὶ μία πρότασις στοιχήματος διὰ ποσὸν 600 ταλήρων, τὸ ὁποῖον ἐπρόκειτο νὰ καταθέσῃ ὁ ἐν ἀδίκῳ εὑρισκόμενος ὑπὲρ ἀγαθοεργοῦ σκοποῦ. Ἐξέρχεται τοῦ πλαισίου τῆς ἱστορίας μας ἡ περιγραφὴ τῶν λεπτομερειῶν ἐπὶ τῶν μακρῶν ἀντεγκλήσεων περὶ τοῦ τρόπου διεξαγωγῆς τῆς κρίσεως, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεγάλην ὁμοιότητα πρὸς τὰ διαδραματισθέντα μεταξὺ Tartaglia καὶ Ferrari. Ἡ ἀναλογία ἐπικυροῦται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι, μολονότι ἡ διαμάχη ἐνετοπίζετο τελικῶς εἰς τὸν κανόνα, ποὺ ἔδιδεν ὁ Stampionen διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ρίζης διωνύμου τῆς μορφῆς $a+\sqrt{b}$, χάρις εἰς τὴν εἰρηνευτικὴν ἐπέμβασιν τοῦ Κωνσταντίνου Huygens, πατρὸς τοῦ διασήμου μαθηματικοῦ, τὰ πάντα περιέπεσαν εἰς σιωπήν, πρὸς μεγάλην ἱκανοποίησιν τῶν Ὁλλανδῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ εἰλικρινεῖς θαυμασταὶ τοῦ διασήμου φιλοξενουμένου των, ἐφοβοῦντο μίαν δυσμενῆ κρίσιν εἰς βάρος ἑνὸς συμπατριώτου των, εὐνοουμένου τῆς Αὐλῆς. Δι' ἄλλην μίαν φορὰν «πολὺς θόρυβος διὰ τὸ τίποτε !»

ΜΕΡΟΣ II: FERMAT

Βιογραφία τοῦ Fermat

353. Κατὰ τὴν ἐποχήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἔζησεν ὁ Descartes, ἡ Γαλλία ἐγέννησε πολλοὺς ἐξέχοντας διανοουμένους, οἱ ὁποῖοι, χάρις εἰς τὴν στάσιν ποὺ ἐτήρησαν ἀπέναντι τοῦ μεγάλου ἐκείνου στοχαστοῦ, πρέπει νὰ ἐξετασθοῦν ἐν συναφείᾳ πρὸς αὐτόν. Ἔχομεν κάμει ἤδη λόγον διὰ μερικοὺς μόνον (§ 342). Ἀλλὰ προέχουσαν θέσιν μεταξὺ τούτων κατέχει ὁ Pierre Fermat. Ἐξ ὁλοκλήρου ἀπησχολημένος εἰς ἐπίσημα καθήκοντα πλήρη εὐθύνης, δὲν διέθετεν εἰς τὰ μαθηματικὰ παρὰ τὰς σπανίας μόνον στιγμὰς τῆς ἀργίας του, ἀφίνων εἰς τοὺς ἐπιγενομένους τὴν φροντίδα νὰ διασώσουν ἐκ τῆς διασπορᾶς τὰς σημειώσεις, τὰς ὁποίας ἐκράτει ἐν σπουδῇ, καὶ τὰς μαθηματικοῦ περιεχομένου ἐπιστολάς του. Ἡ ἐνθουσιώδης νεκρολογία, ποὺ ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Ἐφημερίδα τῶν σοφῶν (Journal des Sçavants) ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ θανάτου του, ἀποτελεῖ τεκμήριον τοῦ θαυμασμοῦ τῶν συγχρόνων του πρὸς αὐτόν, καὶ εἶναι πρὸς ὄνειδος τοῦ Voltaire τὸ ὅτι δὲν περιέλαβε τὸ ὄνομά του εἰς τὸν πίνακα τῶν προσωπικοτήτων ποὺ ἐδόξασαν τὸν αἰῶνα, τὸν ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἀποκληθέντα, μὲ προφανῆ δόσιν αὐλοκολακείας, αἰῶνα τοῦ Λουδοβίκου XIV.

---

* Ἐκ τούτων ὁ πλέον ἐνδιαφέρων εἶναι ὁ τοῦ Wassennaer ὑπὸ τὸν τίτλον Ὁ ἀποκαλυφθεὶς Stampionen (1640). Ὁ λίβελλος φέρει ἀνώνυμον πρόλογον, ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐγράφη ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὸν Descartes.

Ὁ Pierre Fermat ἐγεννήθη κατ' Αὔγουστον τοῦ 1601 εἰς τὸ χωρίον Beaumont-en-Lomagne. Τὴν 14ην Μαΐου 1631 εἰσῆλθεν εἰς τὸ δικαστικὸν σῶμα ὡς δικαστικὸς σύμβουλος (conseiller aux requêtes) τοῦ Κοινοβουλίου τῆς Τουλούζης. Ὑπὸ τὴν ἰδιότητά του ταύτην προσέφερεν εἰς τὸ Κράτος ὑπηρεσίας τόσον σημαντικάς, ὥστε (μεταξὺ 1631 καὶ 1638) ἀνεγράφη εἰς τὴν χορείαν τῶν εὐγενῶν τοῦ δικανικοῦ σώματος (noblesse de robe) καὶ ἔλαβε τὴν ἄδειαν νὰ προτάσσῃ εἰς τὸ ἐπίθετόν του τὸ μόριον de. Τὴν 16ην Ἰανουαρίου 1638 προήχθη εἰς σύμβουλον τῆς Αὐλῆς τῆς Τουλούζης. Ἀπέθανεν εἰς Chartres (ὅπου εἶχε μεταβῆ εἰς ἐκτέλεσιν ὑπηρεσίας) τὴν 12ην Ἰανουαρίου 1665.



PIERRE DE FERMAT

Μολονότι δὲν ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα παρὰ μίαν συντομωτάτην πραγματείαν του ὑπὸ τὸν τίτλον Dissertatio geometrica de linearum curvarum comparatione[14] (§ 363), ἡ ὁποία παρενεβλήθη ἐν παραρτήματι εἰς ἄλλο μὴ ἰδικόν του ἔργον, ἐν τούτοις αἱ προφορικαί του ἀνακοινώσεις καὶ αἱ ἐπιστολαί του ἐπὶ τῶν ἀνακαλύψεών του τὸν κατέστησαν γνωστὸν

εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ πέραν τοῦ Ρήνου καὶ τῆς Μάγχης, ὡς ἕνα τῶν μεγίστων μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του.

Τὸ 1670 ὁ υἱός του Samuel (1630-1690), ἐπιμελούμενος τῆς ἀνατυπώσεως τῆς ἐκδόσεως τοῦ Διοφάντου, τῆς ὀφειλομένης εἰς τὸν Bachet de Méziriac, προσέθεσε καὶ τὰς παρατηρήσεις ποὺ εἶχε γράψει ὁ πατήρ του εἰς τὰ περιθώρια τοῦ εἰς χεῖρας του ἀντιτύπου τοῦ Διοφάντου, ὡς καὶ ἀρκετὸν ἀριθμὸν ἀποσπασμάτων ἐκ τῆς ἐπιστημονικῆς του ἀλληλογραφίας. Ἐννέα ἔτη βραδύτερον ὁ ἴδιος Samuel Fermat, ἐνθαρρυνθεὶς ἀπὸ τὴν ἐπιτυχίαν τῆς ἐκδόσεως ἐκείνης, περισυνέλεξε τὰ «διεσπαρμένα μέλη» (disjecta membra) τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ πατρός του εἰς ἕνα Τόμον μὲ τίτλον Varia opera matematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani.

Νεώτερα ὅμως εὑρήματα τοῦ διεσπαρμένου ἔργου τοῦ μεγάλου νομομαθοῦς ἐδημιούργησαν τὴν ἀνάγκην μιᾶς νέας ἐκδόσεως, ἡ ὁποία ἀποφασισθεῖσα ὑπὸ τῆς γαλλικῆς κυβερνήσεως τὸ 1843, δὲν ἠδυνήθη νὰ ἔλθῃ εἰς φῶς παρὰ ἥμισυ αἰῶνα βραδύτερον. Χάρις εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν εἶναι εὔκολον σήμερον ν' ἀναμετρήσωμεν κατὰ μεγάλην προσέγγισιν τὴν ὁλότητα τῶν συμβολῶν, τὰς ὁποίας χρεωστοῦν εἰς τὸν Fermat αἱ θετικαὶ ἐπιστῆμαι.

Εἰς τὰς προηγουμένας γραμμὰς περιέχονται ὅσα ἠδυνήθημεν νὰ περισυλλέξωμεν γύρω ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ὀφείλομεν τὴν δημιουργίαν νέων κλάδων εἰς τὰ μαθηματικά. Προσθέτομεν μόνον ὅτι, ὡς ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του προκύπτει, ἦτο χαρακτῆρος ἐντελῶς διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸν ἀλαζονικὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον παρουσιάζει ὁ Descartes εἰς ὅλα τὰ γραπτά του. Ἐντεῦθεν ἡ ἰδέα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν δύο τούτων κορυφαίων γάλλων μαθηματικῶν τοῦ XVII αἰῶνος πρὸς τοὺς δύο φωστῆρας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται Εὐκλείδης καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ τῶν ὁποίων τοὺς χαρακτῆρας περιέγραψε κατὰ τρόπον ἀνάγλυφον ὁ Πάππος (Τόμος I, § 35, § 45).

Γεωμετρικὰ ἔργα τοῦ Fermat

354. Ἐλλιπεῖς εἶναι, ὅπως εἴδομεν, αἱ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ Fermat, ἀλλ' ἀκόμη ἐλλιπέστεραι εἶναι αἱ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὰς πρώτας ἐκδηλώσεις καὶ τὰς μετέπειτα ἐξελικτικὰς φάσεις τῆς μαθηματικῆς του σκέψεως. Τὰ πρῶτα σχετικὰ δεδομένα συνάγονται ἀπὸ τὴν μελέτην τῶν περισωθέντων ἔργων του (δὲν εἶναι ὀλίγα ὅσα ἐχάθησαν, συνεπείᾳ τῆς ἰδιοτροπίας τοῦ συγγραφέως ν' ἀποφεύγῃ τὴν δημοσίευσιν τῶν ἐργασιῶν του) καὶ ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν ὅσων ἀπέμειναν ἐκ τῆς ἐπιστημονικῆς του ἀλληλογραφίας. Τὰ πρῶτα ὁδηγοῦν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὴν μαθηματικήν του κατάρτισιν ὀφείλει κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν μελέτην τῶν ἔργων

εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ πέραν τοῦ Ρήνου καὶ τῆς Μάγχης, ὡς ἕνα τῶν μεγίστων μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του.

Τὸ 1670 ὁ υἱός του Samuel (1630-1690), ἐπιμελούμενος τῆς ἀνατυπώσεως τῆς ἐκδόσεως τοῦ Διοφάντου, τῆς ὀφειλομένης εἰς τὸν Bachet de Méziriac, προσέθεσε καὶ τὰς παρατηρήσεις ποὺ εἶχε γράψει ὁ πατήρ του εἰς τὰ περιθώρια τοῦ εἰς χεῖρας του ἀντιτύπου τοῦ Διοφάντου, ὡς καὶ ἀρκετὸν ἀριθμὸν ἀποσπασμάτων ἐκ τῆς ἐπιστημονικῆς του ἀλληλογραφίας. Ἐννέα ἔτη βραδύτερον ὁ ἴδιος Samuel Fermat, ἐνθαρρυνθεὶς ἀπὸ τὴν ἐπιτυχίαν τῆς ἐκδόσεως ἐκείνης, περισυνέλεξε τὰ «διεσπαρμένα μέλη» (disjecta membra) τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ πατρός του εἰς ἕνα Τόμον μὲ τίτλον Varia opera matematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani.

Νεώτερα ὅμως εὑρήματα τοῦ διεσπαρμένου ἔργου τοῦ μεγάλου νομομαθοῦς ἐδημιούργησαν τὴν ἀνάγκην μιᾶς νέας ἐκδόσεως, ἡ ὁποία ἀποφασισθεῖσα ὑπὸ τῆς γαλλικῆς κυβερνήσεως τὸ 1843, δὲν ἠδυνήθη νὰ ἔλθῃ εἰς φῶς παρὰ ἥμισυ αἰῶνα βραδύτερον. Χάρις εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν εἶναι εὔκολον σήμερον ν' ἀναμετρήσωμεν κατὰ μεγάλην προσέγγισιν τὴν ὁλότητα τῶν συμβολῶν, τὰς ὁποίας χρεωστοῦν εἰς τὸν Fermat αἱ θετικαὶ ἐπιστῆμαι.

Εἰς τὰς προηγουμένας γραμμὰς περιέχονται ὅσα ἠδυνήθημεν νὰ περισυλλέξωμεν γύρω ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ὀφείλομεν τὴν δημιουργίαν νέων κλάδων εἰς τὰ μαθηματικά. Προσθέτομεν μόνον ὅτι, ὡς ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του προκύπτει, ἦτο χαρακτῆρος ἐντελῶς διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸν ἀλαζονικὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον παρουσιάζει ὁ Descartes εἰς ὅλα τὰ γραπτά του. Ἐντεῦθεν ἡ ἰδέα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν δύο τούτων κορυφαίων γάλλων μαθηματικῶν τοῦ XVII αἰῶνος πρὸς τοὺς δύο φωστῆρας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται Εὐκλείδης καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ τῶν ὁποίων τοὺς χαρακτῆρας περιέγραψε κατὰ τρόπον ἀνάγλυφον ὁ Πάππος (Τόμος I, § 35, § 45).

Γεωμετρικὰ ἔργα τοῦ Fermat

354. Ἐλλιπεῖς εἶναι, ὅπως εἴδομεν, αἱ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ Fermat, ἀλλ' ἀκόμη ἐλλιπέστεραι εἶναι αἱ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὰς πρώτας ἐκδηλώσεις καὶ τὰς μετέπειτα ἐξελικτικὰς φάσεις τῆς μαθηματικῆς του σκέψεως. Τὰ πρῶτα σχετικὰ δεδομένα συνάγονται ἀπὸ τὴν μελέτην τῶν περισωθέντων ἔργων του (δὲν εἶναι ὀλίγα ὅσα ἐχάθησαν, συνεπείᾳ τῆς ἰδιοτροπίας τοῦ συγγραφέως ν' ἀποφεύγῃ τὴν δημοσίευσιν τῶν ἐργασιῶν του) καὶ ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν ὅσων ἀπέμειναν ἐκ τῆς ἐπιστημονικῆς του ἀλληλογραφίας. Τὰ πρῶτα ὁδηγοῦν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὴν μαθηματικήν του κατάρτισιν ὀφείλει κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν μελέτην τῶν ἔργων

τῶν ἑλλήνων μαθηματικῶν, τὴν ὁποίαν καθίστα εὔκολον ἡ βαθεῖα ἐκ μέρους του γνῶσις τῶν κλασσικῶν γλωσσῶν, κατὰ δεύτερον δὲ λόγον εἰς τὴν μελέτην τῶν ἔργων τοῦ μεγάλου συμπατριώτου του Viète.

Ἀπὸ τὰς ἐπιστολάς του, ἐξ ἄλλου, μανθάνομεν ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 1630, ἀκολουθῶν τὸ παράδειγμα τῶν Viète, Snellius, Ghetaldi καὶ ἄλλων, ἐπεχείρησε ν' ἀνακατασκευάσῃ διὰ τῆς φαντασίας ἕνα ἀπολεσθὲν ἔργον τῆς χρυσῆς περιόδου τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας· ὅτι ἡ ἐποχὴ τῆς ἐντονωτέρας παραγωγικῆς του δραστηριότητος περιλαμβάνει τὰ ἔτη 1636-1641, καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1643 καὶ 1654 ἠναγκάσθη νὰ διακόψῃ τὰς ἐπιστημονικὰς του μελέτας, ἄγνωστον ἐὰν διὰ λόγους ἐντόνου ὑπηρεσιακῆς του ἀπασχολήσεως ἢ δι' ἄλλην αἰτίαν.

Ἡ διὰ τῆς φαντασίας ἀνάπλασις τοῦ ἀπολεσθέντος ἑλληνικοῦ ἔργου ἀφορᾷ τὸ Βιβλίον II τῶν Ἐπιπέδων τόπων τοῦ ἐκ Πέργης Ἀπολλωνίου, τὸ ὁποῖον ἠκολούθησε μετὰ ἑξαετίαν ἡ ἀνάπλασις τοῦ Βιβλίου I. Τὴν παράδοξον αὐτὴν ἀντιστροφὴν τῆς σειρᾶς τῶν Βιβλίων (γίνεται περὶ αὐτῆς λόγος εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne, ὑπὸ χρονολογίαν 26 Ἀπριλίου 1636) δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν παρατηροῦντες ὅτι, ἐνῷ, κατὰ τὰς πληροφορίας τοῦ Πάππου, αἱ προτάσεις τοῦ Βιβλίου II εἶναι ἀρκετὰ ἁπλαῖ, ἐκεῖναι τοῦ Βιβλίου I, περιέχοντος ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον γενικοὺς νόμους παραγωγῆς ἑνὸς ἐπιπέδου τόπου ἐξ ἑνὸς ἄλλου, ἀπαιτοῦν ἀπὸ τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ τὰς ἀποδείξῃ ὑψηλοῦ βαθμοῦ ἐμπειρίαν εἰς τὰς σχετικὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων γεωμετρῶν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονός, ὅτι μεγάλαι εἶναι αἱ δυσκολίαι ποὺ συναντῶνται κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ νοήματος τῶν λόγων τοῦ ἕλληνος ὑπομνηματιστοῦ διὰ μέσου τῆς λατινικῆς μεταφράσεως τοῦ Κομμαντίνου, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὑπ' ὄψιν ὁ Fermat. Μερικὰ ἐκ τῶν θεωρημάτων ποὺ ἀποδεικνύονται εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν ἀνάπλασιν, ἀνακοινωθέντα τὸ 1637 εἰς τὸν Roberval, προεκάλεσαν τεράστιον θαυμασμὸν εἰς τοὺς γεωμέτρας τῶν Παρισίων, ὡς προκύπτει ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ ἰδίου τοῦ Roberval ὑπὸ χρονολογίαν 4 Ἀπριλίου 1637. Ἐνῷ, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εἰς τὴν ἄλγεβραν ὁ Fermat υἱοθέτησε πιστῶς τὴν συμβολικὴν τοῦ Viète, εἰς τὰς γεωμετρικάς του ἐργασίας οὐδεμίαν ἔκαμε χρῆσιν αὐτῆς, ἀλλὰ ἔγραφε τὰς ἀναλογίας ὡς ἑξῆς:

ut... ad... ita... ad..., δηλαδή: ὡς... πρός, οὕτω... πρός...

Καρπὸς τοῦ ἰδίου προσανατολισμοῦ τῆς σκέψεως τοῦ Fermat πρὸς τὰ μαθηματικὰ τῶν ἀρχαίων εἶναι μία προσπάθειά του νὰ λύσῃ τὸ προαιώνιον αἴνιγμα τῶν Πορισμάτων τοῦ Εὐκλείδου (Τόμος I, § 38), ὡς καὶ μία ἀπόδειξις ἀφορῶσα τὸν «ἐπὶ τρεῖς εὐθείας» τόπον. Ἐν σχέσει πρὸς τὸ εἶδος τοῦτο τῶν ἐρευνῶν, ἂς σημειωθῇ ὅτι ὁ Fermat, ἀνησυχῶν ἴσως ἐκ τῆς εἰσβολῆς ποὺ ἐφοβεῖτο ἐκ μέρους τῆς ἀλγέβρας, εἰς μίαν ἐπιστολήν του,

ἀναγομένην χρονικῶς εἰς τὸ θέρος τοῦ 1658, ἐδήλωνεν ὅτι «ἐπιθυμητὸν εἶναι τόσον εἰς τὰς κατασκευὰς ὅσον καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις νὰ μὴ ἐγκαταλείπεται ἡ κομψότης ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπέβλεπον οἱ ἀρχαῖοι, ὅπως ἀποδεικνύεται ἐπαρκῶς ἀπὸ τὰ Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα βιβλία ἀναλυτικῆς μεθόδου, περὶ τῶν ὁποίων ὁμιλεῖ ὁ Πάππος».

Εἰς τὴν ἰδίαν νοοτροπίαν τοῦ Fermat ὀφείλεται μία ἄλλη ἐργασία, ἀκόμη σπουδαιοτέρα, εἰς τὴν ὁποίαν, ὑπὸ τὸν τίτλον Σφαιρικαὶ ἐπαφαί, ἐξετάζονται αἱ 15 περιπτώσεις, τὰς ὁποίας παρουσιάζει τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς μιᾶς σφαίρας διερχομένης ἀπὸ m δοθέντα σημεῖα καὶ ἐφαπτομένης εἰς p ἐπίπεδα καὶ s σφαίρας, ὑπὸ τὸν ὅρον $m + p + s = 4$. Ὁ Fermat ἤχθη ἀναμφιβόλως εἰς τὴν σύλληψιν τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος ἐκ τῆς μελέτης τοῦ ἔργου τοῦ Viète τοῦ ἀποτελοῦντος ἀνάπλασιν ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου περὶ Κυκλικῶν ἐπαφῶν (§ 266). Σημειωτέον ἐν τούτοις ὅτι περὶ τῆς ἐρεύνης τῆς ἀκτῖνος σφαίρας, ἐφαπτομένης τεσσάρων δεδομένων σφαιρῶν, γίνεται λόγος εἰς μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Descartes πρὸς τὸν Mersenne, ὑπὸ χρονολογίαν 15 Ἀπριλίου 1630 καὶ ὅτι ὁ Descartes, ὅταν ἔλαβε γνῶσιν τοῦ ἔργου τοῦ Fermat, ἐπέμεινε, μέσῳ πάντοτε τοῦ Mersenne (ἐπιστολαὶ 13 Ἰουλίου καὶ 11 Ὀκτωβρίου 1638), ἵνα ὁ γερουσιαστὴς τῆς Τουλούζης ἐπιχειρήσῃ τὴν δι' ἀλγεβρικῆς ὁδοῦ λύσιν τοῦ προβλήματος, χωρὶς μολοντοῦτο νὰ ἐπιτύχῃ τὸν σκοπόν του. Ἂς παρατηρήσῃ ἐδῶ ὁ ἀναγνώστης τὴν πρώτην ἐμφάνισιν τῆς ἐμμονῆς ἐκείνης, ποὺ χαρακτηρίζει μερικοὺς μεταγενεστέρους ἀλγεβριστάς, νὰ μὴ δέχωνται ἀποτελέσματα ἐξαχθέντα μὲ καθαρῶς γεωμετρικοὺς συλλογισμούς.

Ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία εἰς τὸν Fermat

355. Ὅσον εὐφυεῖς καὶ ἂν ἦσαν αἱ συμβολαὶ τοῦ Fermat εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας, δὲν θὰ ἦσαν πάντως ἐπαρκεῖς νὰ τοῦ ἐξασφαλίσουν μίαν ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς. Τοῦτο ὑπῆρξε κυρίως ἀποτέλεσμα τοῦ ὑπομνήματός του Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἐπιπέδους καὶ στερεοὺς τόπους (Ad locos planos et solidos isagoge), τὸ ὁποῖον, γραφὲν πρὸ τοῦ 1637, τοποθετεῖ τὸν Fermat, εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς τοῦ ἱστορικοῦ, εἰς τὴν αὐτὴν στάθμην μὲ τὸν Descartes, μεταξὺ τῶν δημιουργῶν τῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων.

Ἡ θεμελιώδης ἰδέα τοῦ ἔργου τούτου ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἦλθεν εἰς τὸν νοῦν τοῦ Fermat ὑπὸ μίαν μορφὴν πλησιεστέραν πρὸς τὴν γνωστὴν σήμερον εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας ἀπὸ ὅ,τι συνέβη μὲ τὸν Descartes. Ἡ μέθοδος πράγματι ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: «Ὁσάκις εἰς μίαν τελικὴν ἐξίσωσιν εἰσέρχονται δύο ποσότητες* ἄγνωστοι, ἔχομεν ἕνα γεω-

* Ἐδῶ «ποσότης» ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ «τμῆμα» τὸ ὁποῖον τὴν μετρεῖ.

ἀναγομένην χρονικῶς εἰς τὸ θέρος τοῦ 1658, ἐδήλωνεν ὅτι «ἐπιθυμητὸν εἶναι τόσον εἰς τὰς κατασκευὰς ὅσον καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις νὰ μὴ ἐγκαταλείπεται ἡ κομψότης ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπέβλεπον οἱ ἀρχαῖοι, ὅπως ἀποδεικνύεται ἐπαρκῶς ἀπὸ τὰ Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα βιβλία ἀναλυτικῆς μεθόδου, περὶ τῶν ὁποίων ὁμιλεῖ ὁ Πάππος».

Εἰς τὴν ἰδίαν νοοτροπίαν τοῦ Fermat ὀφείλεται μία ἄλλη ἐργασία, ἀκόμη σπουδαιοτέρα, εἰς τὴν ὁποίαν, ὑπὸ τὸν τίτλον Σφαιρικαὶ ἐπαφαί, ἐξετάζονται αἱ 15 περιπτώσεις, τὰς ὁποίας παρουσιάζει τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς μιᾶς σφαίρας διερχομένης ἀπὸ m δοθέντα σημεῖα καὶ ἐφαπτομένης εἰς p ἐπίπεδα καὶ s σφαίρας, ὑπὸ τὸν ὅρον $m + p + s = 4$. Ὁ Fermat ἤχθη ἀναμφιβόλως εἰς τὴν σύλληψιν τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος ἐκ τῆς μελέτης τοῦ ἔργου τοῦ Viète τοῦ ἀποτελοῦντος ἀνάπλασιν ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου περὶ Κυκλικῶν ἐπαφῶν (§ 266). Σημειωτέον ἐν τούτοις ὅτι περὶ τῆς ἐρεύνης τῆς ἀκτῖνος σφαίρας, ἐφαπτομένης τεσσάρων δεδομένων σφαιρῶν, γίνεται λόγος εἰς μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Descartes πρὸς τὸν Mersenne, ὑπὸ χρονολογίαν 15 Ἀπριλίου 1630 καὶ ὅτι ὁ Descartes, ὅταν ἔλαβε γνῶσιν τοῦ ἔργου τοῦ Fermat, ἐπέμεινε, μέσῳ πάντοτε τοῦ Mersenne (ἐπιστολαὶ 13 Ἰουλίου καὶ 11 Ὀκτωβρίου 1638), ἵνα ὁ γερουσιαστὴς τῆς Τουλούζης ἐπιχειρήσῃ τὴν δι' ἀλγεβρικῆς ὁδοῦ λύσιν τοῦ προβλήματος, χωρὶς μολοντοῦτο νὰ ἐπιτύχῃ τὸν σκοπόν του. Ἂς παρατηρήσῃ ἐδῶ ὁ ἀναγνώστης τὴν πρώτην ἐμφάνισιν τῆς ἐμμονῆς ἐκείνης, ποὺ χαρακτηρίζει μερικοὺς μεταγενεστέρους ἀλγεβριστάς, νὰ μὴ δέχωνται ἀποτελέσματα ἐξαχθέντα μὲ καθαρῶς γεωμετρικοὺς συλλογισμούς.

Ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία εἰς τὸν Fermat

355. Ὅσον εὐφυεῖς καὶ ἂν ἦσαν αἱ συμβολαὶ τοῦ Fermat εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας, δὲν θὰ ἦσαν πάντως ἐπαρκεῖς νὰ τοῦ ἐξασφαλίσουν μίαν ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς. Τοῦτο ὑπῆρξε κυρίως ἀποτέλεσμα τοῦ ὑπομνήματός του Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἐπιπέδους καὶ στερεοὺς τόπους (Ad locos planos et solidos isagoge), τὸ ὁποῖον, γραφὲν πρὸ τοῦ 1637, τοποθετεῖ τὸν Fermat, εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς τοῦ ἱστορικοῦ, εἰς τὴν αὐτὴν στάθμην μὲ τὸν Descartes, μεταξὺ τῶν δημιουργῶν τῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων.

Ἡ θεμελιώδης ἰδέα τοῦ ἔργου τούτου ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἦλθεν εἰς τὸν νοῦν τοῦ Fermat ὑπὸ μίαν μορφὴν πλησιεστέραν πρὸς τὴν γνωστὴν σήμερον εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας ἀπὸ ὅ,τι συνέβη μὲ τὸν Descartes. Ἡ μέθοδος πράγματι ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: «Ὁσάκις εἰς μίαν τελικὴν ἐξίσωσιν εἰσέρχονται δύο ποσότητες* ἄγνωστοι, ἔχομεν ἕνα γεω-

* Ἐδῶ «ποσότης» ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ «τμῆμα» τὸ ὁποῖον τὴν μετρεῖ.

μετρικὸν τόπον, τοῦ ἄκρου τῆς μιᾶς γράφοντος γραμμὴν εὐθεῖαν ἢ καμπύλην». Πρὸς διασάφησιν τῆς ἐννοίας τῶν φράσεων τούτων εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ μαθηματικός μας ὑποθέτει δεδομένην μίαν εὐθεῖαν NZM, κατ' ἀμφότερα ἀπεριόριστον, καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον σταθερὸν N. Λαμβανομένου τότε ἐπὶ τῆς ἰδίας τμῆμα NZ ἴσον πρὸς τὴν μίαν (A) τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων (ὑπονοεῖται ἐδῶ ἡ παραδοχὴ μονάδος μετρήσεως, ἐνῷ δηλοῦται ρητῶς ἀπὸ τοὺς Bombelli καὶ Descartes), ἄγεται διὰ τοῦ Z τὸ τμῆμα ZX σχηματίζον μετὰ τῆς εὐθείας ZN δοθεῖσαν γωνίαν (ἐν γένει ὑποτιθεμένην ὀρθήν) καὶ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἄλλην ποσότητα (E). Συνεπῶς μεταβαλλομένης τῆς (A), ἑπομένως καὶ τοῦ Z, μεταβάλλεται ἐπίσης ἡ (E), ἑπομένως καὶ τὸ X, τὸ ὁποῖον τοιουτοτρόπως γράφει κάποιαν γραμμήν, ὅπως ἀκριβῶς περιγράφει ὁ Fermat.

Τούτου τεθέντος, ἐπιλαμβάνεται τῆς ἐρεύνης τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Προτοῦ τὰς ἀπαριθμήσωμεν, πληροφοροῦμεν τὸν ἀναγνώστην ὅτι ὁ Fermat χρησιμοποιεῖ πιστῶς τοὺς συμβολισμοὺς τοῦ Viète, ἐπιβάλλων ἐπίσης εἰς τὸν ἑαυτόν του τὴν ὑποχρέωσιν νὰ γράφῃ πάντοτε ἐξισώσεις ὁμογενεῖς*. Οὕτω ἡ κανονικὴ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς γράφεται : A in E aeq. Z pl. Δὲν ὑπάρχει λόγος ν' ἀκολουθήσωμεν ἐδῶ τὸ παράδειγμά του· θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἑπομένως τοὺς συμβολισμούς, πρὸς τοὺς ὁποίους ἔχουν ἐξοικειωθῆ οἱ ἀναγνῶσται μας.

Μὲ ἁπλᾶς σχέσεις ὁμοιότητος τριγώνων ὁ Fermat ἀποδεικνύει κατ' ἀρχήν, ὅτι μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $ax = by$ παριστᾷ εὐθεῖαν. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ διὰ τὴν γενικωτέραν ἐξίσωσιν $c - ax = by$, καταφαίνεται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ τελευταία γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $by = a(k - x)$, ὅπου $c = ak$, καί, κατόπιν ἀλλαγῆς ἀρχῆς συντεταγμένων, $by' = ax'$. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, παρατηρεῖ ὁ Fermat, ὅτι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἔχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα διὰ νὰ λύσωμεν ὅλα τὰ προβλήματα γεωμετρικῶν τόπων ποὺ ὁδηγοῦν εἰς εὐθεῖαν. Τοιουτοτρόπως φθάνει εἰς μίαν γενικὴν πρότασιν, τὴν ὁποίαν διατυπώνει κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον : «Ἔστωσαν δεδομέναι ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι καὶ ἂς ἀχθοῦν πρὸς αὐτὰς ἔκ τινος σημείου ἰσάριθμοι εὐθεῖαι σχηματίζουσαι μετ' αὐτῶν δεδομένας γωνίας. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν εὐθειῶν τούτων ἐπὶ ἰσαρίθμους ἄλλας δοθείσας ἰσοῦται πρὸς μίαν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ὑπ' ὄψει σημείου εἶναι εὐθεῖα γραμμή».

Μεταβαίνων κατόπιν εἰς τὰς ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, ὁ συγγραφεὺς

* Ὁ Fermat ἦτο τόσον πεπεισμένος περὶ τῆς ἀρτιότητος τοῦ συμβολικοῦ συστήματος τοῦ Viète, ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἐμέμφετο ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐγκατέλειπον τὴν χρῆσιν αὐτοῦ διὰ νὰ ἐγκολπωθοῦν τὸ σύστημα τοῦ Descartes. Ἂς μὴ σπεύσωμεν νὰ τὸν κατακρίνωμεν, γνωστῆς οὔσης τῆς δυσκολίας μὲ τὴν ὁποίαν ἐγκαταλείπομεν ἕνα συμβολισμόν, μὲ τὸν ὁποῖον ἔχομεν πλέον ἐξοικειωθῆ, χάριν ἑνὸς ἄλλου.

μας ἀρχίζει μὲ τὴν ἐξέτασιν τῆς μορφῆς $xy = k^2$ καὶ μὲ σιωπηρὰν ἐφαρμογὴν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἀποκαθιστᾷ τὸ θεώρημα, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις παριστᾷ ὑπερβολήν. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ διὰ τὴν γενικωτέραν ἐξίσωσιν:

$$l^2 + xy = mx + ny,$$

προκύπτει ἂν γράψωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(x - m)(n - y) = l^2 - mn$$

καὶ κάμωμεν ἔπειτα παράλληλον μεταφορὰν ἀξόνων.

Ὀλιγώτερον συνεπὴς πρὸς τὴν ἀκρίβειαν εἶναι ὁ Fermat, ὅταν βεβαιώνῃ ὅτι αἱ ἐξισώσεις $x^2/y^2 =$ σταθ. καὶ $(x^2 + xy)/y^2 =$ σταθ. παριστοῦν, ἑκάστη, εὐθεῖαν, ἐνῷ εἰς τὴν πραγματικότητα παριστοῦν, ἑκάστη, δύο εὐθείας. Ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 = py$ παριστᾷ παραβολὴν ἀποδεικνύεται πάλιν ἐπὶ τῇ βάσει λημμάτων τοῦ Ἀπολλωνίου. Τοιουτοτρόπως ὁ Fermat προσφέρει μίαν νέαν ἐπιβεβαίωσιν τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ ἐκτιθεμένη θεωρία εἶναι κατὰ βάθος μία ἀλγεβρικὴ μεταμόρφωσις τῆς γεωμετρίας τῶν ἀρχαίων. Ὅτι ἀνάλογον γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν ἐπιδέχεται ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 = py + l^2,$$

καταφαίνεται μὲ μίαν ἀλλαγὴν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

Ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $a^2 - x^2 = y^2$ εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας παριστᾷ περιφέρειαν, ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ ὅλας τὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

ἀποδεικνύεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τῶν ἀξόνων ἀναφορᾶς.

Τέλος εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$a^2 \pm x^2 = ky^2,$$

φθάνει ὁ Fermat χρησιμοποιῶν ἐκ νέου τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν, ἐνῷ περὶ τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων πολυπλοκωτέρας μορφῆς δίδει ἁπλῆν καὶ σύντομον νύξιν, ἐμβάλλων εἰς τὸν ἀναγνώστην του τὴν πεποίθησιν ὅτι εἶναι περαιτέρω εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσῃ τὴν φύσιν τῶν καμπύλων, τὰς ὁποίας αὗται παριστοῦν, ἐφαρμόζων τὴν μέθοδον τῶν συντεταγμένων, τοὐλάχιστον ὅταν πρόκειται περὶ ἁπλῆς μεταφορᾶς ἀξόνων. Εἰς τὸ τέλος διατυπώνει τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, τῆς ὁποίας προφανὴς εἶναι ἡ ἀναλογία μὲ τὴν ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαν: «Ἔστωσαν δεδομέναι ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι καὶ ἂς ἀχθοῦν πρὸς αὐτὰς ἔκ τινος σημείου ἰσάριθμοι εὐθεῖαι σχηματίζουσαι μὲ τὰς δοθείσας ὡρισμένας γωνίας. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς δεδομένην ἐπιφάνειαν, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ὑπ' ὄψει σημείου εἶναι ὡρισμένος στερεὸς τόπος».

Ἐν κατακλεῖδι δηλοῖ ὅτι, ἂν τὴν νέαν αὐτὴν μέθοδον εἶχεν ἀνακαλύψει προηγουμένως, ἡ ὑπ' αὐτοῦ γενομένη ἀνάπλασις τῶν Ἐπιπέδων τόπων θὰ ἐλάμβανε κομψοτέραν μορφήν. Πάντως δὲν μετανοεῖ, διότι τὴν ἔκαμε, δικαιολογῶν τοῦτο μὲ τοὺς ἀκολούθους λόγους : «Nec tamen praecocis licet et immaturi partus nos adhuc poenitet, et informes ingenii foetus posteris non invidere scienitae ipsius quadamtenus interest, cujus opera primo rudia et simplicia novis inventis et roborantur et augescunt» [15].

Ἡ εἰς τὸν χῶρον ἐπέκτασις τῶν δύο προαναφερθέντων γενικῶν θεωρημάτων ὑπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Fermat εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Carcavy ἀπὸ 3 Ἰανουαρίου 1643. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπέκτασις θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς μία προσπάθεια λύσεως τῆς ἀπορίας τί περίπου ἦσαν οἱ Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ τῶν ἀρχαίων γεωμετρῶν. Προηγουμένως εἶχεν ἀνακοινώσει εἰς τὸν Mersenne (26 Δεκεμβρίου 1638) ἄλλας προτάσεις τῆς αὐτῆς φύσεως, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ ἀκόλουθος: «Ἡ σφαῖρα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ ὁσαδήποτε σημεῖα τοῦ χώρου εἶναι σταθερόν». Ἡ ἐν λόγῳ σφαῖρα δὲν διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα, ἐκτὸς ἐὰν (ἐπιστολὴ πρὸς Mersenne 26ης Μαρτίου 1641) τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἀλγεβρικὰ ἔργα τοῦ Fermat

356. Ἐπιστρέφομεν εἰς τὸ ἐπίπεδον, διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς ἕνα σημαντικὸν παράρτημα τῆς Εἰσαγωγῆς, ὁ Fermat ἐξέθεσε τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων γ' καὶ δ' βαθμοῦ, ἐφαρμόζων τὰς προμνημονευθείσας ἐξισώσεις τῶν δευτεροβαθμίων καμπύλων. Πρόκειται περὶ θέματος ἀναπτυχθέντος ἤδη, καὶ μάλιστα μὲ μεγαλυτέραν κομψότητα, ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὴν Γεωμετρίαν του, ἀλλὰ τὸ θέμα, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς καταστάσεως τῆς ἀλγέβρας ἐκείνην τὴν ἐποχήν, εὑρίσκετο εἰς τὸ ἐπίκεντρον τῆς ἐπικαιρότητος, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ νέα διαπραγμάτευσίς του θὰ χρησιμεύσῃ χωρὶς ἀμφιβολίαν εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικός.

Τὸ αὐτὸ θέμα ἔχει μία τριμερὴς διατριβὴ Ἐπὶ τῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων μέσῳ τῶν ἁπλουστέρων δυνατῶν καμπύλων, ἡ ὁποία, παρὰ τὸν κριτικὸν χαρακτῆρα της, ἐπιφέρει ἀξιολόγους συμπληρώσεις εἰς ὅσα ἐκτίθενται εἰς τὸ μέγα ἔργον τοῦ Descartes. Ὁ χαρακτὴρ τῆς διατριβῆς γίνεται φανερὸς ἀπὸ τὰς εἰσαγωγικὰς φράσεις : «Ἠμπορεῖ νὰ φανῇ παράδοξον τὸ νὰ εἴπῃ κανεὶς ὅτι, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν, ὁ Descartes δὲν ἦτο παρὰ ἕνας ἄνθρωπος». Τὸ ἀσθενὲς σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀποκαλύπτει ὁ Fermat, εὑρίσκεται εἰς τὴν ταξινόμησιν τῶν καμπύλων, ἰσχυριζόμενος (δικαίως) ὅτι δὲν ὑπάρχει κανεὶς

Ἐν κατακλεῖδι δηλοῖ ὅτι, ἂν τὴν νέαν αὐτὴν μέθοδον εἶχεν ἀνακαλύψει προηγουμένως, ἡ ὑπ' αὐτοῦ γενομένη ἀνάπλασις τῶν Ἐπιπέδων τόπων θὰ ἐλάμβανε κομψοτέραν μορφήν. Πάντως δὲν μετανοεῖ, διότι τὴν ἔκαμε, δικαιολογῶν τοῦτο μὲ τοὺς ἀκολούθους λόγους: «Nec tamen praecocis licet et immaturi partus nos adhuc poenitet, et informes ingenii foetus posteris non invidere scienitae ipsius quadamtenus interest, cujus opera primo rudia et simplicia novis inventis et roborantur et augescunt»[15].

Ἡ εἰς τὸν χῶρον ἐπέκτασις τῶν δύο προαναφερθέντων γενικῶν θεωρημάτων ὑπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Fermat εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Carcavy ἀπὸ 3 Ἰανουαρίου 1643. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπέκτασις θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς μία προσπάθεια λύσεως τῆς ἀπορίας τί περίπου ἦσαν οἱ Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ τῶν ἀρχαίων γεωμετρῶν. Προηγουμένως εἶχεν ἀνακοινώσει εἰς τὸν Mersenne (26 Δεκεμβρίου 1638) ἄλλας προτάσεις τῆς αὐτῆς φύσεως, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ ἀκόλουθος: «Ἡ σφαῖρα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ ὁσαδήποτε σημεῖα τοῦ χώρου εἶναι σταθερόν». Ἡ ἐν λόγῳ σφαῖρα δὲν διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα, ἐκτὸς ἐὰν (ἐπιστολὴ πρὸς Mersenne 26ης Μαρτίου 1641) τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἀλγεβρικὰ ἔργα τοῦ Fermat

356. Ἐπιστρέφομεν εἰς τὸ ἐπίπεδον, διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς ἕνα σημαντικὸν παράρτημα τῆς Εἰσαγωγῆς, ὁ Fermat ἐξέθεσε τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων γ' καὶ δ' βαθμοῦ, ἐφαρμόζων τὰς προμνημονευθείσας ἐξισώσεις τῶν δευτεροβαθμίων καμπύλων. Πρόκειται περὶ θέματος ἀναπτυχθέντος ἤδη, καὶ μάλιστα μὲ μεγαλυτέραν κομψότητα, ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὴν Γεωμετρίαν του, ἀλλὰ τὸ θέμα, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς καταστάσεως τῆς ἀλγέβρας ἐκείνην τὴν ἐποχήν, εὑρίσκετο εἰς τὸ ἐπίκεντρον τῆς ἐπικαιρότητος, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ νέα διαπραγμάτευσίς του θὰ χρησιμεύσῃ χωρὶς ἀμφιβολίαν εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικός.

Τὸ αὐτὸ θέμα ἔχει μία τριμερὴς διατριβὴ Ἐπὶ τῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων μέσῳ τῶν ἁπλουστέρων δυνατῶν καμπύλων, ἡ ὁποία, παρὰ τὸν κριτικὸν χαρακτῆρα της, ἐπιφέρει ἀξιολόγους συμπληρώσεις εἰς ὅσα ἐκτίθενται εἰς τὸ μέγα ἔργον τοῦ Descartes. Ὁ χαρακτὴρ τῆς διατριβῆς γίνεται φανερὸς ἀπὸ τὰς εἰσαγωγικὰς φράσεις: «Ἠμπορεῖ νὰ φανῇ παράδοξον τὸ νὰ εἴπῃ κανεὶς ὅτι, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν, ὁ Descartes δὲν ἦτο παρὰ ἕνας ἄνθρωπος». Τὸ ἀσθενὲς σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀποκαλύπτει ὁ Fermat, εὑρίσκεται εἰς τὴν ταξινόμησιν τῶν καμπύλων, ἰσχυριζόμενος (δικαίως) ὅτι δὲν ὑπάρχει κανεὶς

λόγος νὰ τοποθετήσωμεν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν τὰς καμπύλας, τῶν ὁποίων ὁ βαθμὸς εἶναι $2n-1$ καὶ $2n$, ἀφοῦ οὐδεμία μέθοδος ὑφίσταται ἐπιτρέπουσα νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς μὲν εἰς τὰς δέ.

Ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἐπισημαίνει ὁ Fermat ὡς ἐπιδεκτικὸν κριτικῆς εἶναι ἐκεῖνο, ὅπου ὁ Descartes λύει μερικὰ προβλήματα μέσῳ καμπύλων πολυπλοκωτέρων ἀπὸ ὅσον εἶναι ἀπαραίτητον, παραβιάζων τοιουτοτρόπως μίαν ἀρχήν, τὴν ὁποίαν ἐθέσπισαν καὶ ἐσεβάσθησαν πάντοτε οἱ ἀρχαῖοι. Ὁ Fermat ἐκάλεσε τοὺς Καρτεσιανοὺς ν' ἀποδείξουν ἐσφαλμένους τοὺς ἰσχυρισμούς του καὶ τοῦτο ὄχι δι' ἄλλον, λόγον ἀλλὰ πρὸς ὠφέλειαν τῆς γεωμετρίας, εἰς τελειοποίησιν τῆς ὁποίας πρέπει ὅλοι νὰ συνεργασθοῦν ἐν τῷ μέτρῳ τῶν δυνάμεών των.

Εἰς ἀπόδειξιν τῆς βασιμότητος τῶν ἰσχυρισμῶν του, ὁ Fermat ἐξετάζει μίαν ἐξίσωσιν 6ου βαθμοῦ. Δέχεται ὅτι εἶναι θεμιτὸν νὰ ὑποθέσῃ τὴν ἐξίσωσιν ἐλλιπῆ ὡς πρὸς τὸν πρωτοβάθμιον ὅρον τοῦ ἀγνώστου, πιθανῶς στηριζόμενος εἰς τὸ γεγονός, ὅτι μία ἐξίσωσις 6ου βαθμοῦ δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς ἄλλην μὲ ἐλλείποντα τὸν ὅρον τοῦ x^5 καὶ ἔπειτα εἰς ἄλλην χωρὶς τὸν ὅρον τοῦ x, διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $y = 1/x$. Συνεπῶς ὑποθέτει τὴν ἐξίσωσιν γεγραμμένην τελικῶς ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$x^6 + ax^5 + b^2x^4 + c^3x^3 + d^4x^2 = e^6. \qquad (1)$$

Πρὸς λύσιν αὐτῆς ἂς τεθοῦν ἀμφότερα τὰ μέλη ἴσα πρός:

$$(x^3 + bxy)^2, \text{ ἤτοι } x^6 + 2bx^4y + b^2x^2y^2.$$

Συγκρίνοντες τώρα τὸ ἀνωτέρω τετράγωνον πρὸς τὸ e^6 καὶ ἐξάγοντες ἔπειτα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$x^3 + bxy = e^3. \qquad (2)$$

Ἐξισοῦντες, ἐξ ἄλλου, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) πρὸς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ἀνωτέρω τετραγώνου, δυνάμεθα ν' ἀπαλείψωμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ x^6 καὶ νὰ διαιρέσωμεν κατόπιν ὁλόκληρον τὴν ἐξίσωσιν διὰ τοῦ x^2, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$ax^3 + b^2x^2 + c^3x + d^4 = 2bx^2y + b^2y^2. \qquad (3)$$

Ἐκ τούτου ἐξάγεται, ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο καμπύλων (2) καὶ (3), ἐνῷ κατὰ τὸν Descartes, θὰ ἔπρεπε νὰ καταφύγωμεν εἰς καμπύλας 6ου βαθμοῦ.

Δὲν δυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν ὅλα τὰ ἄλλα παραδείγματα ποὺ φέρει ὁ Fermat εἰς ὑποστήριξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ του. Θὰ κάμωμεν ὅμως μίαν ἐξαίρεσιν· παρατηρεῖ ὅτι ἡ παρεμβολὴ 256 μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μεγεθῶν a, b, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^{257} = a^{256} \cdot b. \qquad (4)$$

Ἐξισοῦντες τὰ δύο μέλη πρὸς $x^{240}y^{16}b$, φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον ζεῦγος ἐξισώσεων :

$$x^{17} = y^{16}\,b, \quad a^{16} = x^{15}\cdot y. \tag{5}$$

Αὗται παριστοῦν καμπύλας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χρησιμεύσουν εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (4) καὶ εἶναι βαθμῶν 16 καὶ 17, τουτέστι κατὰ πολὺ κατωτέρων τοῦ 257, ποὺ ὑποδεικνύει ὁ Descartes. Ὅλα αὐτὰ ἀρκοῦν διὰ ν' ἀποκαταστήσουν τὴν βασιμότητα τῶν παρατηρήσεων τοῦ Fermat.

357. Εἰς τὴν ἀναγωγὴν ἑνὸς ὡρισμένου προβλήματος εἰς ἀναζήτησιν τῶν κοινῶν σημείων δύο γραμμῶν, ἀνταποκρίνεται τὸ πρόβλημα τῆς ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ δύο ἐξισώσεων. Τοῦτο ἐμελέτησεν ἐπίσης ὁ Fermat καὶ ἔδωσεν, εἰς μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν, μίαν λύσιν στηριζομένην ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἰδέας : ἂς συνδυασθοῦν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτῃ ἐξ αὐτῶν μία τρίτη, ἡ ὁποία νὰ εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων. Ἂς λυθῇ ὡς πρὸς τοῦτον καὶ τέλος ἂς γίνῃ ἀντικατάστασις τῆς εὑρεθείσης ἐκφράσεως εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων. Ὁ γεωμέτρης μας δὲν προβαίνει εἰς διερεύνησιν τοῦ ζητήματος, κατὰ πόσον δηλαδὴ μία τοιαύτη μέθοδος εἶναι πάντοτε ἐφαρμόσιμος, ἀλλὰ παρατηρεῖ εὐφυέστατα, ὅτι τὸ ζήτημα τὸ θιγὲν εἰς δύο ἐπιστολάς του (1648 καὶ 1650) περὶ τροπῆς ἑνὸς πολυωνύμου εἰς ρητὴν ἔκφρασιν δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς πρόβλημα ἀπαλοιφῆς. Πρόκειται περὶ μιᾶς παρατηρήσεως, ἡ ὁποία ἐπανελήφθη καὶ ἀνεπτύχθη εἰς χρόνους πλησιεστέρους πρὸς ἡμᾶς, ἀλλ' ἦτο ὑποχρέωσίς μας νὰ ἐπισημάνωμεν ἐδῶ τὴν πρώτην της ἐμφάνισιν.

Δὲν ἐγκαταλείπομεν τὸ πεδίον τῆς ἀλγέβρας πρὶν ἢ ἀναφέρωμεν μίαν ἀξιόλογον συμπλήρωσιν ποὺ ἔδωσεν ὁ Fermat εἰς τὴν λύσιν τοῦ Viète διὰ τὸ γνωστὸν πρόβλημα τοῦ A. van Roomen (§ 274) καὶ ἀνεκοίνωσεν ὁ ἴδιος δι' ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Huygens. Ἡ ἐν λόγῳ λύσις ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὑπάρχουσα σταθερὰ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 2. Ὁ Fermat ἠσχολήθη μὲ τὴν ἀντίθετον ὑπόθεσιν ἐν σχέσει μὲ ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου. Ὑποθέτων τὴν σταθερὰν ἴσην πρὸς 4 εἰσάγει τὴν ἀντικατάστασιν :

$$x = y + \frac{1}{y}, \tag{1}$$

καὶ ἀνάγει τὰς ἐπιλυούσας ἐξισώσεις εἰς τὴν μορφήν :

$$y^n + \frac{1}{y^n} = 4. \tag{2}$$

Λαμβάνει τοιουτοτρόπως τὰς ἐκφράσεις τῶν ριζῶν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$x = \sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}}\,. \tag{3}$$

Ἔκαμε κατόπιν τὸν ὑπολογισμὸν διὰ $n = 3, 5, 7$ καὶ ἐβεβαίωσεν ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει δι' ὅλας τὰς περιττὰς δυνάμεις τοῦ n, μὴ ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως $n = 45$ τὴν ὁποίαν ἐθεώρησεν ὁ Fermat.

Διὰ νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν εἰς τὴν γενικότητά του τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, οἱασδήποτε οὔσης τῆς σταθερᾶς c, ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$y^n + \frac{1}{y^n} = 2c \tag{4}$$

λαμβάνεται:

$$y = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} \tag{5}$$

καὶ διὰ νὰ πληροῦται ἡ (1), θὰ ἔχωμεν:

$$x = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}}}$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό:

$$x = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \sqrt[n]{c - \sqrt{c^2 - 1}} \tag{6}$$

Ἐὰν $c < 1$, ὅπως ὑπέθετεν ὁ Viète, καὶ τεθῇ ἴσον πρὸς ημφ, τότε ἡ ἔκφρασις (6) γίνεται:

$$x = \sqrt[n]{\text{συν}\,\varphi + i\,\text{ημ}\varphi} + \sqrt[n]{\text{συν}\,\varphi - i\,\text{ημ}\varphi} = 2\,\text{συν}\,\frac{\varphi}{n}, \tag{7}$$

ἀποτέλεσμα σύμφωνον πρὸς τὸ ὑπ' αὐτοῦ ληφθέν.

Ἐὰν πάλιν $c > 1$, ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x δὲν περιέχει φανταστικὰ στοιχεῖα καὶ διὰ $c = 2$, π.χ., ἐπανευρίσκομεν τὸ ἀποτέλεσμα (3), ποὺ ἔδωσεν ὁ Fermat.

Ὁ Fermat θεμελιωτὴς τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν

358. Συνεχίζοντες τὴν ἐπισκόπησιν τῶν ἔργων τοῦ Fermat, φθάνομεν εἰς πεδία, ὅπου ἡ πρωτοτυπία του προβάλλει κατὰ τρόπον τόσον σαφῆ καὶ ἀδιαφιλονίκητον, ὥστε νὰ τὸν ἀναβιβάζῃ εἰς τὸ ὕψος ἑνὸς πραγματικοῦ δημιουργοῦ.

Ὅτι δὲ ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς τοῦ ἁρμόζει ἐν σχέσει μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, προκύπτει ἀπὸ τὸ γενονός, ὅτι ὁ Fermat, ἔστω καὶ ὡς ἕνας πολὺ μακρινὸς μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου, ἐνεκαινίασε τὴν μεθοδικὴν ἐκείνην ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας ἴχνη ματαίως θ' ἀνεζήτει κανεὶς εἰς τὸν Διόφαντον, ὁ ὁποῖος, ὅπως γνωρίζομεν (Τόμος I,

Ἔκαμε κατόπιν τὸν ὑπολογισμὸν διὰ $n = 3, 5, 7$ καὶ ἐβεβαίωσεν ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει δι' ὅλας τὰς περιττὰς δυνάμεις τοῦ n, μὴ ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως $n = 45$ τὴν ὁποίαν ἐθεώρησεν ὁ Fermat.

Διὰ νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν εἰς τὴν γενικότητά του τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, οἱασδήποτε οὔσης τῆς σταθερᾶς c, ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$y^n + \frac{1}{y^n} = 2c \qquad (4)$$

λαμβάνεται:

$$y = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} \qquad (5)$$

καὶ διὰ νὰ πληροῦται ἡ (1), θὰ ἔχωμεν:

$$x = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}}}$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό:

$$x = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \sqrt[n]{c - \sqrt{c^2 - 1}} \qquad (6)$$

Ἐὰν $c < 1$, ὅπως ὑπέθετεν ὁ Viète, καὶ τεθῇ ἴσον πρὸς ημφ, τότε ἡ ἔκφρασις (6) γίνεται:

$$x = \sqrt[n]{\text{συν}\,\varphi + i\,\text{ημ}\varphi} + \sqrt[n]{\text{συν}\,\varphi - i\,\text{ημ}\varphi} = 2\,\text{συν}\,\frac{\varphi}{n}, \qquad (7)$$

ἀποτέλεσμα σύμφωνον πρὸς τὸ ὑπ' αὐτοῦ ληφθέν.

Ἐὰν πάλιν $c > 1$, ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x δὲν περιέχει φανταστικὰ στοιχεῖα καὶ διὰ $c = 2$, π.χ., ἐπανευρίσκομεν τὸ ἀποτέλεσμα (3), ποὺ ἔδωσεν ὁ Fermat.

Ὁ Fermat θεμελιωτὴς τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν

358. Συνεχίζοντες τὴν ἐπισκόπησιν τῶν ἔργων τοῦ Fermat, φθάνομεν εἰς πεδία, ὅπου ἡ πρωτοτυπία του προβάλλει κατὰ τρόπον τόσον σαφῆ καὶ ἀδιαφιλονίκητον, ὥστε νὰ τὸν ἀναβιβάζῃ εἰς τὸ ὕψος ἑνὸς πραγματικοῦ δημιουργοῦ.

Ὅτι δὲ ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς τοῦ ἁρμόζει ἐν σχέσει μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, προκύπτει ἀπὸ τὸ γενονός, ὅτι ὁ Fermat, ἔστω καὶ ὡς ἕνας πολὺ μακρινὸς μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου, ἐνεκαινίασε τὴν μεθοδικὴν ἐκείνην ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας ἴχνη ματαίως θ' ἀνεζήτει κανεὶς εἰς τὸν Διόφαντον, ὁ ὁποῖος, ὅπως γνωρίζομεν (Τόμος I,

§ 90), ἔστρεψε πάντοτε τὰς προσπαθείας του εἰς τὰς «ρητὰς λύσεις» τῶν ἀορίστων προβλημάτων.

Περὶ τῆς καινοτομίας καὶ τῆς σπουδαιότητος τῶν ἐν λόγῳ ἐρευνῶν του ὁ Fermat εἶχε πλήρη συνείδησιν, διότι εἰς ἕνα χωρίον ἑνὸς σχολίου του ἐπὶ τῶν Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν τοῦ Διοφάντου, ἔγραφεν ὅτι «ἡ θεωρία τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἡ τόσον ὡραία καὶ λεπτή, δὲν ἦτο γνωστὴ μέχρι σήμερον οὔτε εἰς τὸν Bachet οὔτε εἰς ἄλλον», βραδύτερον δὲ (Φεβρουάριος 1657) ἐβεβαίωνεν, μὲ πλῆρες δίκαιον, ὅτι «ἡ ἀριθμητικὴ ἔχει ἰδικήν της ἐπικράτειαν τὴν θεωρίαν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, μόλις διαχαραχθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ μὴ ἐπαρκῶς καλλιεργηθεῖσαν ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων». Προλαμβάνων ἔπειτα (Αὔγουστος 1659) τὰς κρίσεις τῶν μελλουσῶν γενεῶν, ἔγραφεν εἰς τὸν Carcavy ὅτι «οἱ ἐπιγενόμενοι θὰ ἔπρεπε νὰ τοῦ εἶναι εὐγνώμονες, διότι ἀπέδειξεν ὅτι οἱ ἀρχαῖοι δὲν εἶχον ἀνακαλύψει τὰ πάντα».

Δυστυχῶς, τῶν ἐκτεταμένων ἐρευνῶν, τὰς ὁποίας διεξήγαγεν ἐπὶ τοῦ πεδίου τούτου, δὲν περιεσώθησαν ἴχνη, παρὰ μόνον εἰς τὰ στενὰ περιθώρια ἑνὸς βιβλίου τοῦ Διοφάντου, ποὺ εἶχεν εἰς τὴν κατοχήν του, καὶ εἰς μερικὰς σελίδας τῆς ἀλληλογραφίας του. Παρὰ ταῦτα, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς περισωθέντα καὶ φθάσαντα μέχρις ἡμῶν τὰ σπουδαιότερα συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα κατέληξε. Ἀντιθέτως ἐλάχιστα πράγματα εἶναι γνωστὰ γύρω ἀπὸ τοὺς δρόμους, ποὺ ἠκολούθησε διὰ νὰ φθάσῃ εἰς αὐτά, μολονότι θὰ πρέπει νὰ εἶχον σαφῶς διαχαραχθῆ, ἀφοῦ εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne (26 Ἀπριλίου 1636) ἔγραφεν, ὅτι αἱ μέθοδοί του ἦσαν τελείως διάφοροι τῶν ὑπὸ τοῦ Viète ἐφαρμοζομένων.

Μόνον μιᾶς γενικῆς μορφῆς συλλογισμοῦ, ἡ ὁποία, ὅπως φαίνεται, θαυμασίως τὸν ἐβοήθησε, ἐγένοντο γνωσταί, ἂν ὄχι ἄλλο, αἱ γενικαί της γραμμαί· εἶναι «ἡ μέθοδος τῶν καταρρακτῶν» ἢ «τῆς ἀπεριορίστου καθόδου». Ἡ μέθοδος στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς, καθ' ἣν ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικὸς δὲν δύναται νὰ ἐλαττωθῇ ἀπεριορίστως*. Βάσει τῆς ἀρχῆς αὐτῆς, διὰ νὰ ἀποδείξῃ μίαν σχέσιν μεταξὺ περισσοτέρων ἀκεραίων ἀριθμῶν $x, y, z, \ldots$ ἀνάγει τοὺς συλλογισμοὺς ἐπὶ ἄλλων ἀριθμῶν $x_1, y_1, z_1 \ldots$ μικροτέρων καὶ ἐξαγομένων ἐκ τῶν πρώτων κατὰ τρόπον μεταβαλλόμενον ἀπὸ περιπτώσεως εἰς περίπτωσιν. Διὰ νέας ἐφαρμογῆς, φθάνομεν εἰς νέαν σειρὰν ἀριθμῶν $x_2, y_2, z_2, \ldots$, μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μίαν ὁμάδα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως προκύπτει προφανής**.

* Ὁ A. Genocchi παρετήρησεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀρχὴ ἐφηρμόσθη πρωτύτερα ὑπὸ τοῦ Campano, ὅπως δύναται κανεὶς ν' ἀναγνωρίσῃ εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ ἰδίου γενομένην ἔκδοσιν τοῦ Εὐκλείδου (1482).

** Ἐσχάτως παρετηρήθη (Vacca), ὅτι τὸ λογικὸν τοῦτο τέχνασμα ἀποτελεῖ μεταμόρφωσιν τῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία δὲν ἦτο ἄγνωστος εἰς τοὺς ἀρχαίους.

359. Διὰ νὰ δυνηθῇ ὁ ἀναγνώστης νὰ κρίνῃ περὶ τῆς ἐκτάσεως καὶ τῆς σπουδαιότητος τῶν συμπερασμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα κατέληξεν ὁ διάσημος γάλλος ἀριθμητικός, θ' ἀναφέρωμεν τὰς σημαντικωτέρας τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακαλυφθεισῶν προτάσεων:

I. Ἡ ἀρχαία ἔρευνα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμοὺς (Τόμος I σ. 146), ἤτοι ἡ δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως (n > 2):

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (1)$$

ὡδήγησε τὸν Fermat εἰς τὴν μελέτην τῆς ἀναλόγου περιπτώσεως:

$$x^n + y^n = z^n \quad (2)$$

καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς προτάσεως, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀδύνατος εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς. Τὴν πρότασιν συνοδεύει μὲ τὴν δήλωσιν, ὅτι εἰς αὐτὴν ἔφθασε χάρις εἰς μίαν θαυμασίαν ἀπόδειξιν, τὴν ὁποίαν ἀτυχῶς δὲν ἠδύνατο νὰ περιλάβῃ εἰς τὸ στενὸν περιθώριον τοῦ βιβλίου (τοῦ Διοφάντου), τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀνὰ χεῖρας[16]. Παρὰ ταῦτα, γράφων εἰς τὸν Carcavy κατ' Αὔγουστον 1659, κατέστρωσεν ἕνα παράδειγμα ἀποδείξεως, διὰ τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν n = 3.

Μετὰ τὸν Fermat, πολλοὶ προσεπάθησαν ν' ἀναπληρώσουν τὴν σιωπήν του, εἰς μάτην ὅμως, διότι περὶ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως ἐξακολουθοῦμεν πράγματι νὰ εἴμεθα βέβαιοι μόνον δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ ἐκθέτου n. Ἐσχάτως ὁ E. Landau ἐπρότεινε τὴν ἔκφρασιν «ὑπόθεσις τοῦ Fermat» εἰς ἀντικατάστασιν τῆς πρότερον χρησιμοποιουμένης «μέγα θεώρημα τοῦ Fermat», γεγονὸς ἀποδεικνῦον ὅτι δικαιολογημέναι ἀμφιβολίαι κατέλαβον τὴν θέσιν τῆς ἀπολύτου πίστεως, μὲ τὴν ὁποίαν ἐδέχοντο ἄλλοτε τὴν ἀλήθειαν τῆς ἐν λόγῳ προτάσεως. Τοιουτοτρόπως ἡ ἀνθρωπότης σήμερον, ἀβεβαία καὶ ἀμήχανος, ταλαντεύεται ὡς πρὸς τὴν λῆψιν μιᾶς ὁριστικῆς θέσεως: νὰ σημειώσῃ μὲ ἕνα ἀκόμη παράδειγμα τοὺς κινδύνους τῶν ἐσπευσμένων γενικεύσεων ἢ νὰ ὑποκλιθῇ μετὰ θαυμασμοῦ ἐνώπιον μιᾶς ὑπερόχου πτήσεως τοῦ πνεύματος ὑπεράνω περιοχῶν, τὰς ὁποίας ἕνας μόνον ἄνθρωπος μέχρι σήμερον ἠξιώθη ν' ἀντικρύσῃ.

II. Ἀντιθέτως τὸ ὄνομα «θεώρημα τοῦ Fermat» δίδεται πάντοτε εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: «Ἐὰν a τυχὼν ἀκέραιος καὶ p ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ ἀριθμός:

$$a^{p-1} - 1$$

εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ p». Ἡ πρότασις αὐτὴ ἐλήφθη ἀπὸ ἕνα χωρίον ἐπι-

---

ἐφηρμόσθη δὲ εἰς εὐρεῖαν κλίμακα ἀπὸ τὸν Μαυρόλυκον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον καὶ τὴν ἐδιδάχθη ὁ B. Pascal (Βλ. ἑπόμενον Κεφάλαιον)

στολῆς τοῦ Fermat πρὸς τὸν Frenicle (18 Ὀκτωβρίου 1640) καὶ ἀπεδείχθη κατόπιν κατὰ πολλοὺς τρόπους.

III. Ὁ Fermat ἀνεκάλυψε πολλὰς ἰδιότητας τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $4n + 1$. Ἀναφέρομεν ὡς παράδειγμα τὴν πρότασιν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς αὐτῆς τῆς μορφῆς εἶναι κατὰ ἕνα μόνον τρόπον ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐνῷ τὸ τετράγωνόν του εἶναι κατὰ δύο τρόπους, ὁ κύβος του κατὰ τρεῖς κ.ο.κ.

IV. Κατὰ τὸν ἴδιον, ἡ ἐξίσωσις :

$$x^4 + y^4 = z^2$$

εἶναι ἀδύνατος εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀκεραίων. Ἀντιθέτως ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2 = y^3 - 2$$

ἐπιδέχεται μοναδικὴν λύσιν : $x = 5$, $y = 3$. Ἡ ἐξίσωσις, τέλος,

$$x^2 + 4 = y^3$$

δὲν δύναται νὰ ἱκανοποιηθῇ, παρὰ μόνον ἐὰν δεχθῶμεν $x = 2$ ἢ 11.

V. Ὁ Διόφαντος εἶχε διαβλέψει (Τόμος I, σ. 155) καὶ ὁ Bachet βεβαίωσει τὴν δυνατότητα ἀναλύσεως παντὸς ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα ἑνὸς πλήθους τὸ πολὺ 4 τετραγώνων. Ὁ Fermat κατέληξεν εἰς ἕνα ἀποτέλεσμα ἀρκετὰ γενικώτερον καὶ σημαντικώτερον. Ὅτι, δηλαδή, κάθε ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι ἢ τριγωνικὸς ἢ ἄθροισμα 2 ἢ 3 τριγωνικῶν. Ὅτι κάθε ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι ἢ τετράγωνον ἢ ἄθροισμα 2, 3 ἢ 4 τετραγώνων. Ὅτι κάθε ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι ἢ πενταγωνικὸς ἢ ἄθροισμα 2,3,4, ἢ 5 πενταγωνικῶν ἀριθμῶν κ.ο.κ. Παρατηρεῖ δὲ εἰς ἕνα σχόλιον του ἐπὶ τοῦ Διοφάντου : «Δὲν δύναμαι νὰ δώσω ἐδῶ τὴν ἀπόδειξιν, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλὰ καὶ παράδοξα μυστήρια τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν. Προτίθεμαι ν' ἀφιερώσω εἰς αὐτὸ τὸ θέμα ἕνα ὁλόκληρον βιβλίον, διὰ νὰ ἐπιφέρω εἰς τὴν ἀριθμητικὴν προόδους ἐξικνουμένας πέραν τῶν γνωστῶν ὁρίων της». Τὸ ὡραῖον ὅμως αὐτὸ σχέδιον δὲν ἔλαβε οὔτε τὴν ἀρχὴν τῆς πραγματοποιήσεώς του.

VI. Μία ἄλλη ἀξιόλογος πρότασις, εὑρεθεῖσα ὑπὸ τοῦ Fermat, εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία βεβαιώνει ὅτι δὲν ὑφίσταται ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἐκφράζεται μὲ ἀριθμὸν τετράγωνον. Εἰς τὸ ἀντίτυπον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, τὸ ὁποῖον εἶχεν εἰς χεῖρας του, ὁ Fermat ἐκθέτει τὴν ἀρχὴν μόνον μιᾶς ἀποδείξεως, τῆς ὁποίας πάλιν τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἠδυνήθη νὰ καταχωρήσῃ λόγῳ στενότητος τοῦ περιθωρίου. Ἐκ τῶν λόγων του πάντως προκύπτει, ὅτι ἐπρόκειτο περὶ ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν καταρρακτῶν.

VII. Ἰδιαιτέραν προσοχὴν ἔστρεψεν ὁ Fermat εἰς τὰς οὕτω καλουμένας

«διπλᾶς ἐξισώσεις», τουτέστιν εἰς τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται σήμερον διὰ τῶν τύπων:

$$ax^2 + bx + c = \square$$
$$a'x^2 + b'x + c' = \square,$$

τελειοποιῶν τὰς μεθόδους, ποὺ ἔδωσαν πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων οἱ Διόφαντος καὶ Bachet. Μὴ ἀρκούμενος ὅμως εἰς τοῦτο, ἐπροχώρησεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς ἀναλόγου περιπτώσεως τῶν «τριπλῶν ἐξισώσεων» καὶ ἀπέδειξε τὴν σημαντικότητά της διὰ πολλῶν ἐφαρμογῶν. Ἀληθὲς εἶναι ὅτι ὀλίγαι εἶναι αἱ ἄμεσοι πληροφορίαι ἐπὶ τοῦ θέματος, ἀλλ' ὁ Fermat εἶχεν ἀνακοινώσει τὰς ἐπ' αὐτοῦ ἀνακαλύψεις του εἰς τὸν Giacomo de Billy (γεννηθέντα εἰς Compiègne τὴν 18ην Μαρτίου 1602 καὶ ἀποθανόντα εἰς Digeon τὴν 14ην Ἰανουαρίου 1679), ὁ δὲ τελευταῖος τὰς περιέλαβεν εἰς τὸ ἔργον τὸ φέρον τίτλον Doctrinae analyticae inventum novum (Ἀναλυτικαὶ θεωρίαι νέων ἀνακαλύψεων, Τουλούζη, 1670), καὶ τὸ ὁποῖον, ἀποτελοῦν πολύτιμον συμπλήρωμα εἰς τὰ ἔργα τοῦ Μεγάλου ἐκείνου, ἀνεδημοσιεύθη μεταφρασθὲν εἰς τὴν γαλλικήν, κατὰ τὴν τελευταίαν πρόσφατον ἔκδοσιν τῶν Ἀπάντων του.

VIII. Οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς:

$$N = 2^{2^n} + 1$$

εἶναι πρῶτοι διά:

$$n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ὁ Fermat, ὅπως καὶ ὁ Torricelli (§ 319), ἐθεώρει ὅτι εἶναι ἐπίσης πρῶτοι καὶ οἱ δύο ἑπόμενοι, ἐνῷ ὁ Euler ἀπέδειξεν ὅτι αὐτοὶ εἶναι σύνθετοι. Ἀπὸ τὴν ἐσφαλμένην αὐτὴν διαπίστωσιν, προχωρῶν μὲ μίαν ἐσπευσμένην γενίκευσιν, ἔφθασεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ N εἶναι πάντοτε πρῶτοι, ὁμολογῶν ὅμως εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Frenicle (18 Ὀκτωβρίου 1640), ὅτι δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ τὸ ἀποδείξῃ. Ἐπανέλαβε δὲ τὴν ἐξομολόγησιν αὐτὴν εἰς ἄλλην ἐπιστολήν του πρὸς τὸν B. Pascal (29 Αὐγούστου 1654), ἐνῷ μετέπειτα (Ἰούνιος 1658) ἐπρότεινεν εἰς ἕνα εὐπατρίδην, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω (§ 360), τὸν Digby, ν' ἀναζητήσῃ μίαν ἀπόδειξιν. Ἡ ἐσφαλμένη αὐτὴ πρότασις μᾶς δίδει τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐξάρωμεν τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Fermat εἶχεν ἀναμετρήσει καλῶς τὴν πρακτικὴν δυσκολίαν τοῦ προβλήματος τῆς ἀναγνωρίσεως κατὰ πόσον ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος. Εἰς μίαν ἐπιστολήν του, ἡ ὁποία φαίνεται ἀναγομένη εἰς τὸ ἔτος 1643, ὑπέδειξε μίαν διαδικασίαν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, τὴν ὁποίαν δὲν ἐδίστασεν ὁ ἴδιος νὰ χαρακτηρίσῃ ἀργότερα (Αὔγουστος 1659) ὡς ἀτελῆ, προσθέτων ὅμως ὅτι εἶναι κάτοχος καὶ ἄλλων τρόπων ποὺ τοῦ ἐπιτρέπουν νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν.

IX. Εἰς πολλὰ χωρία τῆς ἀλληλογραφίας τοῦ Fermat ἀπαντῶνται ἀπροσδιόριστοι ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$ax^2 + 1 = y^2, \quad (1)$$

ὅπου a εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος μὴ τετράγωνος. Εἰς ἕνα σημείωμά του ἀναγόμενον εἰς τὸ ἔτος 1659 εὑρίσκεται ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος, ποὺ συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, συνοδευομένη ἀπὸ τὴν δήλωσιν ὅτι ἡ λύσις ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν καταρρακτῶν.

Πῶς ὁ μαθηματικός μας ἤχθη εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς μᾶς εἶναι ἄγνωστον. Ἂν καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὡς μία εἰδικωτάτης μορφῆς ἀπροσδιόριστος ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, εἶναι ἐν τούτοις σήμερον γνωστὴ ἡ μεγάλη σημασία της εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀποτελοῦσα μίαν τῶν τυπικῶν μορφῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγεται ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ εἴδους τούτου. Λαμβανομένης ὑπ' ὄψει τῆς ἰδιοφυΐας τοῦ Fermat, ποῖος θὰ εἶχε σήμερον τὸ δικαίωμα ν' ἀρνηθῇ ὅτι ἔφθασεν ἀκριβῶς ἐκεῖ διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ; Ὁ ἀναγνώστης θὰ ἐνθυμηθῇ ἀσφαλῶς ὅτι οἱ Ἰνδοὶ εἶχον εἰς τὴν κατοχήν των μίαν μέθοδον πρὸς λύσιν τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως (Τόμος I, σ. 241), ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενά των δὲν ἔγιναν γνωστὰ εἰς τὴν Εὐρώπην παρὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου τετάρτου τοῦ XIX αἰῶνος.

Μᾶς δίδεται ἐδῶ ἡ εὐκαιρία νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατόπιν μιᾶς παρεξηγήσεως εἰς τὴν ὁποίαν ἐνέπεσεν ὁ Euler, ἡ ἐξίσωσις (1) χαρακτηρίζεται πολὺ συχνὰ μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Pell, ὁ ὁποῖος, ὅπως θὰ ἴδωμεν, οὐδέποτε ἠσχολήθη μὲ αὐτήν. Κατὰ συνέπειαν, ἐὰν γίνῃ δεκτὸν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις πρέπει νὰ φέρῃ ἕνα ὄνομα, τοῦτο ἀσφαλῶς δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Fermat.

X. Ἀπὸ ἕνα χωρίον ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Mersenne, γραφείσης τὸ 1640, ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ Fermat ἐμελέτησεν ἐπίσης τοὺς τελείους ἀριθμοὺς τοῦ Εὐκλείδου (Τόμος I, σ. 67). Εἰς τὸ χωρίον αὐτὸ ἀποκαλύπτεται ὡς ἐσφαλμένη ἡ τότε κρατοῦσα γνώμη ὅτι, ὅπως ὑπάρχει ἕνας τέλειος εἰς τὸ διάστημα 1...10, ἕνας εἰς τὸ διάστημα 10...100 καὶ ἕνας εἰς τὸ διάστημα 100...1000 τὸ αὐτὸ θὰ συνέβαινεν εἰς τὰ ἀνάλογα διαδοχικὰ διαστήματα. Πράγματι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τέλειος εἰς τὸ διάστημα $10^{19}...10^{20}$.

XI. Μελετῶν τὰ ὅσα ἔγραψεν ὁ Διόφαντος περὶ τῶν πολυγωνικῶν ἀριθμῶν, συνέλαβεν ὁ Fermat μίαν ἀπεριόριστον σειρὰν ἀριθμῶν («πολυεδρικῶν») διαδεχομένων ἀλλήλους συμφώνως πρὸς τὸν ἀκόλουθον νόμον:

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{3} n \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\frac{1}{4} n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3}, \cdots$$

Ἕνα χωρίον ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Mersenne, ἀναγομένης πιθανῶς εἰς τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1636, ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν χρονολογίαν τῆς ἀνακαλύψεως αὐτῆς.

XII. Ἀπὸ μίαν ἄλλην ἐπιστολὴν γραφεῖσαν τὸ 1640 ὑπὸ τοῦ Frenicle πρὸς τὸν Mersenne, ὑπὸ τούτου δὲ κοινοποιηθεῖσαν πρὸς τὸν Fermat, ὁ τελευταῖος ἤχθη εἰς συμπλήρωσιν τῶν ἐρευνῶν τοῦ Bachet ἐπὶ τῶν μαγικῶν τετραγώνων, ὡς καὶ εἰς τὴν ἔρευναν ἄλλων σχημάτων τοῦ εἴδους τούτου. Τὰ κυριώτερα ἐξαγόμενα τῶν μελετῶν του εὑρίσκομεν εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne (1 Ἀπριλίου 1640) καὶ εἶναι τόσον ἀξιοθαύμαστα, ὥστε θὰ ἦτο εὔκολον νὰ ὑποκύψῃ κανεὶς εἰς τὸν πειρασμὸν τῆς ἐν συνόλῳ ἀντιγραφῆς των. Μὴ ἐπιτρέποντος ὅμως τοῦ χώρου, περιοριζόμεθα εἰς τὸ ν' ἀναφέρωμεν, ὅτι ὁ μέγας ἐκεῖνος μαθηματικὸς βεβαιώνει, ὅτι εἶναι εἰς θέσιν νὰ κατασκευάσῃ μαγικὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα παραμένουν τοιαῦτα καὶ κατόπιν ἀποκοπῆς μιᾶς ἢ δύο γωνιῶν καὶ ἀναφέρει εἰς διαπίστωσιν τοῦ πράγματος τὸ ἀκόλουθον πλαίσιον :

1	2	185	186	5	6	7	190	191	192	11	194	195	14
15	16	26	25	27	177	176	175	174	173	172	171	27	38
42	156	31	165	159	34	35	162	37	164	158	40	167	29
56	142	152	46	52	149	148	147	146	47	53	45	153	43
57	128	59	130	61	135	134	63	132	66	137	68	139	70
71	126	73	123	122	76	120	119	19	75	116	62	114	84
85	111	96	109	108	107	91	92	90	103	102	87	100	98
112	97	110	95	89	93	106	100	104	94	88	101	86	99
126	83	115	81	80	118	77	78	121	117	74	124	73	123
140	69	138	60	131	81	64	133	65	136	67	129	58	127
141	55	54	144	150	151	50	49	48	145	151	143	44	154
168	41	157	32	33	160	161	36	163	38	39	166	30	155
182	170	180	179	178	23	22	21	20	19	18	17	181	169
183	184	3	4	187	188	189	8	9	10	193	12	13	196

Ἐξορμήσας κατόπιν εἰς τὸν χῶρον, ἀνεκάλυψε τοὺς κανόνας κατασκευῆς τῶν «μαγικῶν κύβων», καὶ ὡς παράδειγμα περιγράφει τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον μὲ τοὺς πρώτους 64 φυσικοὺς ἀριθμούς, διατεταγμένους

εἰς τέσσαρα στρώματα οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων ἑκάστης γραμμῆς νὰ εἶναι 130. Ἰδοὺ ἡ δομὴ ἑνὸς τοιούτου μαγικοῦ κύβου:

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

I.

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	33
9	55	54	12

II.

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

III.

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

IV.

Μία πρόκλησις εἰς μονομαχίαν

360. Ἄλλα παραδείγματα τῆς αὐτῆς φύσεως ἀπαντῶνται εἰς μίαν ἐπιστολήν, ὀλίγον μεταγενεστέραν, τοῦ Fermat πρὸς τὸν Mersenne, ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διατρίψωμεν περισσότερον ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου, τὸ ὁποῖον ἐγκαταλείποντες εἴμεθα ὑποχρεωμένοι ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι δὲν ἠδυνήθημεν νὰ ἐπισημάνωμεν ὅλας τὰς ὑπ' αὐτοῦ γενομένας ἀνακαλύψεις εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς. Εἰς τὸν ἱστορικὸν ὅμως ἀπόκειται ἡ αὐστηρὰ ὑποχρέωσις νὰ σημειώσῃ, ὅτι μερικὰ ἐκ τῶν ζητημάτων ποὺ ἐπραγματεύθη ὁ κορυφαῖος μαθηματικός, περὶ οὗ ὁ λόγος, ἀνευρίσκονται εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν, ἡ ὁποία ἐγεννήθη ἐκ τῆς διεξαγωγῆς δύο μονομαχιῶν, τὰς ὁποίας προεκάλεσεν ὁ ἴδιος, συμμορφούμενος πρὸς τὰς συνηθείας τῆς ἐποχῆς του.

Εἰς τὴν πρώτην μονομαχίαν, τὴν ὁποίαν προεκάλεσεν ὑπὸ χρονολογίαν 3 Ἰανουαρίου 1657, ἐπρότεινε νὰ εὑρεθῇ κύβος (ἢ τετράγωνον), ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ τοὺς παράγοντάς του, νὰ δίδῃ ὡς ἀποτέλεσμα τετράγωνον (ἢ ἀντιστοίχως κύβον). Τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ὁ ἀριθμὸς $7^3 = 343$· ὁ Fermat ἐζήτει καὶ ἕνα δεύτερον.

Γενικώτερον, καὶ σπουδαιότερον, εἶναι τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον προσέθεσεν ὁ ἴδιος, περίπου ἕνα μῆνα κατόπιν, διότι τοῦτο συνίστατο εἰς τὴν λύσιν τῆς ἀπροσδιορίστου ἐξισώσεως:

$$ax^2 + 1 = y^2$$

(πάντοτε ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ a δὲν εἶναι τετράγωνον), περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν ἤδη (§ 359, ἐδ. IX). Καίτοι δὲν προεβλέπετο χρηματικὸν βραβεῖον εἰς τὸν λύτην, ἐν τούτοις ἡ πρόκλησις εἶχεν ἀνταπόκρισιν εἰς Ἀγγλίαν, Ὁλλανδίαν καὶ Γαλλίαν, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ σημειώσῃ ἡ ἀριθμητικὴ ἀξιολόγους προόδους.

Ἂν ἡ Ἀγγλία ἐνδιεφέρθη διὰ τὰ ζητήματα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Fermat, τοῦτο ἐξηρτήθη ἀπὸ τὴν παρέμβασιν δύο ἐξεχουσῶν προσωπικοτήτων, τὰς

ὁποίας ὀφείλομεν νὰ καταστήσωμεν γνωστὰς εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας: τὸν Sir Kenelm Digby καὶ τὸν Λόρδον William Brouncker.

Ὁ πρῶτος ἐγεννήθη εἰς τὴν κομητείαν τοῦ Buckingham τὴν 11ην Ἰουλίου 1603, κατέλαβεν ὑψηλὰς θέσεις εἰς τὸ βρεττανικὸν ναυτικὸν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς βασιλείας Καρόλου τοῦ Ι. Ἐξορισθεὶς κατόπιν ὡς βασιλόφρων ἠδυνήθη νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρίδα μὲ τὴν εἰς τὸν θρόνον ἄνοδον τοῦ Καρόλου ΙΙ. Ἔγραψε διάφορα ἔργα, φιλοσοφικοῦ καὶ θεολογικοῦ περιεχομένου, ἔδειξεν ἐνδιαφέρον εἰς τὴν ἐπιστήμην, καὶ ἀπέθανεν τὴν 11ην Ἰουνίου 1665.

Ὁ δεύτερος, γεννηθεὶς εἰς τὴν Ἰρλανδίαν τὸ 1620, διετέλεσε κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς παλινορθώσεως γενικὸς γραμματεὺς τοῦ σφραγιδοφύλακος καὶ συνεπῶς πρόεδρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν καὶ ἀπέθανε τὴν 5ην Ἀπριλίου 1684, ἀφοῦ ἐκληροδότησε τὸ ὄνομά του εἰς μερικὰς ἀνακαλύψεις, περὶ τῶν ὁποίων ὀφείλομεν νὰ ὁμιλήσωμεν.

Ἡ δευτέρα πρόκλησις τοῦ Fermat ἔφθασεν εἰς τὸν Λόρδον Brouncker ἐκ μέρους τοῦ Digby μέσῳ τοῦ Thomas White, τὸν ὁποῖον συνηντήσαμεν ἤδη προηγουμένως (§ 310) ὁμιλοῦντες περὶ τῶν μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου. Ἀκριβῶς δὲ εἰς μερικὰς ἐπιστολὰς ἀνταλλαγείσας μεταξὺ Digby καὶ Fermat εὑρίσκονται τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν προσπαθειῶν πρὸς λύσιν τῶν προταθέντων ζητημάτων. Εἰσάγουν ὅμως περαιτέρω εἰς τὴν ἀφήγησίν μας ἕνα νέον πρόσωπον, τὸ ὁποῖον κατέλαβεν ἐξέχουσαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀγγλικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κατὰ τὴν νευτώνειον περίοδον αὐτῆς: τὸν John Wallis.

Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Ashford (Kent) τὴν 23ην Νοεμβρίου 1616. Εἰς ἡλικίαν 16 ἐτῶν εἰσῆλθεν εἰς τὸ Emmanuel College τοῦ Cambridge καὶ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦτο ἔλαβε διαδοχικῶς τοὺς τίτλους B.A. = Bachelor of Arts (1637), καὶ M.A. = Master of Arts (1640), καὶ εἰσῆλθεν αἰφνιδίως ὡς παρεκκλησιάρχης εἰς διαφόρους εὐγενεῖς οἴκους. Τὸ 1644 ἐξελέγη ἑταῖρος ὑπὸ τοῦ Queen's College τοῦ Cambridge, ἀλλ' ἐδέησε νὰ παραιτηθῇ συντόμως τοῦ ἀξιώματος τούτου διὰ νὰ νυμφευθῇ. Ἐγκατεστάθη τότε εἰς τὸ Λονδῖνον καὶ συμμετέσχεν εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς συνεδριάσεις, αἱ ὁποῖαι κατέληξαν εἰς τὴν ἵδρυσιν τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας (§ 287) Τὸ 1649 ὠνομάσθη Savilian Professor[17] εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford καὶ τὴν 31ην Ἰουνίου 1654 ἔλαβεν ἐπίσης ἐκεῖ τὸν τίτλον τοῦ διδάκτορος τῆς θεολογίας, κατόπιν τοῦ ὁποίου τὸ 1661 ἀνέλαβε τὸ ἀξίωμα τοῦ παρεκκλησιάρχου τῆς Αὐλῆς. Τὴν 27ην Δεκεμβρίου 1642 ἐπέτυχε νὰ διαβάσῃ ἕνα σημαντικὸν κρυπτογραφικὸν χειρόγραφον, ἀνυψωθεὶς οὕτω διὰ μιᾶς εἰς τὴν φήμην δεινοῦ ἑρμηνευτοῦ τῶν κρυπτογραφημένων κειμένων. Αἱ ἐπιστολαί, τὰς ὁποίας ἠδυνήθη κατόπιν ν' ἀποκρυπτογραφήσῃ, κατετέθησαν

ὑπὸ τοῦ ἰδίου τὸ 1653 εἰς τὴν Bodleian Library τοῦ Oxford καὶ ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1657. Ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἠδυνήθη νὰ προσφέρῃ εἰς τὸ Κράτος ἄλλας ἀξιολόγους ὑπηρεσίας*, οὐδέποτε ὅμως ἠθέλησε ν' ἀνακοινώσῃ εἰς οἱονδήποτε τὰς ἀποκρυπτογραφικάς του μεθόδους, ἀνθιστάμενος ἀκόμη καὶ εἰς τὰς πιέσεις τοῦ Leibniz. Ἀπέθανε τὴν 28ην Ὀκτωβρίου 1703. Κατὰ τὴν περίοδον 1693-99 ἐδημοσιεύθη ἡ πλήρης συλλογὴ τῶν Ἀπάντων του εἰς τρεῖς πολυτελεῖς τόμους μεγάλου σχήματος, ἐπὶ τοῦ περιεχομένου τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον.

Σημειοῦμεν πάντως ἐδῶ, ὅτι ὁ Λόρδος Brouncker μόλις ἔλαβε γνῶσιν τῆς προκλήσεως τοῦ Fermat, ἔσπευσε νὰ τὴν ἀνακοινώσῃ εἰς τὸν Wallis (ἐπιστολὴ 5-15 Μαρτίου 1656-57) μὲ τὴν παράκλησιν ν' ἀσχοληθῇ μὲ αὐτήν**. Ὁ δὲ Wallis ἀποδεχθεὶς ἀμέσως τὴν πρόσκλησιν, ἠναγκάσθη νὰ λάβῃ μέρος εἰς μίαν ἐκτεταμένην ἀλληλογραφίαν μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν ποὺ ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω, καὶ τοῦ ὀλλανδοῦ Fr. van Schooten, ἐν ἔτει δὲ 1658 νὰ περισυλλέξῃ ὅλα τὰ στοιχεῖα της εἰς ἕνα σημαντικὸν τόμον, ἀφιερωμένον εἰς τὸν Digby καὶ φέροντα τίτλον ἀρχόμενον μὲ τὰς λέξεις Commercium epistolicum (Ἐπιστολικὴ ἐπικοινωνία). Πρόκειται περὶ μιᾶς πολυτίμου ἐκδόσεως δι' ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίσῃ τὴν ἀνωτέραν ἀριθμητικὴν κατὰ τὴν πρώτην περίοδον τῆς ζωῆς της, καθ' ὅσον εἶναι τὸ πρῶτον ἔργον ποὺ εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος γύρω ἀπὸ τὸν νέον κλάδον, ποὺ ἐδημιούργησεν ἡ μαθηματικὴ ἰδιοφυΐα τοῦ Fermat. Ὁ χῶρος δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάμωμεν μίαν πλήρη ἀνάλυσιν. Περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν, ὅτι πολλαὶ σελίδες παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ ἀπόψεως συγκριτικῆς ψυχολογίας, καθ' ὅσον ἀποδεικνύουν τὴν ἀντίθεσιν μεταξὺ τοῦ εὐεξάπτου καὶ ὄχι πάντοτε εὐγενοῦς χαρακτῆρος τοῦ Frenicle καὶ τῆς ἀδιαταράκτου εὐγενείας τῶν ἄγγλων μαθηματικῶν, ἐνῷ ἄλλαι σελίδες περιέχουν πλούσιον ὑλικὸν ἐπιστημονικοῦ καὶ ἱστορικοῦ ἐνδιαφέροντος. Ἐκ τούτων π.χ. μανθάνομεν πόσον ἀπροσδόκητος ἐφάνη ὁ περιορισμός, τὸν ὁποῖον ἔθεσεν ὁ Fermat, ὅσον ἀφορᾷ τὴν θεώρησιν ἀκεραίων μόνον τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ἐνῷ γενικὴ συνήθεια τῶν μαθηματικῶν ἦτο νὰ συμμορφοῦνται πρὸς τὸ παράδειγμα τοῦ Διοφάντου, ἐξαιροῦντος ὡς γνωστὸν μόνον τὰς ἀσυμμέτρους τιμάς.

Εἰς τὰς ἰδίας σελίδας ἀπαντᾶται κατ' ἐπανάληψιν ἡ προτροπὴ τοῦ Fermat ν' ἀνακαλύψουν τὰς γενικὰς ἀρχάς, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐπέτρεψαν νὰ

---

* Μερικὰ τεκμήρια τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τῆς δραστηριότητος τοῦ Wallis ἀπαντῶνται εἰς τὸ ἄρθρον τοῦ D. E. Smith: John Wallis as a cryptographer (Δελτίον τῆς Amer. Math. Soc., Τόμος XXIV, 1917).

** Τοιαύτη ἀπόφασις ἐξηγεῖται, λαμβανομένης ὑπ' ὄψει τῆς μεγάλης φήμης, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν ὁ Wallis, ὡς ἀριθμητικὸς ὑπολογιστὴς τερατώδους ἱκανότητος.

φθάσῃ εἰς τόσα ὡραῖα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα δικαίως ἐθεωροῦντο ὡς ἀντικείμενα γενικῆς περιεργείας. Σποραδικῶς ἀπαντῶνται προβλήματα καὶ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἐμνημονεύσαμεν ἤδη κατὰ τὴν κατάστρωσιν ἑνὸς ἀπολογισμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν ἀνακαλύψεων τοῦ Fermat, ὡς καὶ ἄλλα νέα. Ἐπὶ πλέον εἰς μίαν ἐπιστολὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Wallis (περὶ τὰ τέλη τοῦ 1657) εὑρίσκεται μία σειρὰ ἀρνητικῶν προτάσεων*. Τὸ αὐτὸ ῥητέον ἐπίσης διὰ δύο προτάσεις ἐπὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν διατυπωθείσας ὑπὸ τοῦ Schooten**. Ἀλλ' αἱ σελίδες τοῦ Commercium epistolicum, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον, εἶναι αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

διότι οἱ Brouncker καὶ Wallis ἐδίδαξαν πῶς εὑρίσκεται μία λύσις καὶ περαιτέρω πῶς δυνάμεθα, ταύτης εὑρεθείσης, νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπειρίαν ἄλλων, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ παρατηρήσουν, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δὲν ἐπιδέχεται πάντοτε λύσεις.

Τὸ πρῶτον ζήτημα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Fermat, ὡς εἴδομεν, εἶχε τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν: «Νὰ εὑρεθῇ κύβος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς διαιρέτας του νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· π.χ. ὁ $7^3 = 343$ ἔχει διαιρέτας 1, 7, 49, οἱ ὁποῖοι προστιθέμενοι εἰς τὸν 343 δίδουν $400 = 20^2$. Ζητεῖται δεύτερος ἀριθμὸς μὲ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα. Ζητεῖται ἐπίσης τετράγωνον, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τοὺς διαιρέτας του ν' ἀποτελῇ κύβον» (Ἔργα Fermat, Τόμος II, σ. 333 καὶ τόμος III, σ. 311). Ἡ λύσις ἐδόθη μὲ θαυμαστὴν ἀνταπόκρισιν ἀπὸ ἕνα γάλλον εὐπατρίδην (βλ. ἐπιστολὴν τοῦ C. Huygen 26ης Φεβρουαρίου 1658), τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἤδη κάμει γνωστὸν (§ 342) εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας: τὸν Bernard Frenicle de Bessy.

Εἰς κανένα ἀπὸ τὰ γραπτὰ ποὺ φέρουν τὸ ὄνομά του δὲν θίγεται ζήτημα ἐξ ἐκείνων ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Fermat. Εἰς αὐτὰ ἀφιεροῦται ἀντιθέτως ἕνα εἰδικὸν τεῦχος, διαφυγὸν τῆς προσοχῆς τοῦ de la Hire, καὶ τὸ ὁποῖον ἐπὶ μακρὸν ἐθεωρεῖτο ἀπολεσθέν, ὡς μὴ διαλαμβανόμενον εἰς ἕνα δημοσίευμα μὲ ἔμβλημα D.B.F.D.B. (Dominus Bernadus Frenicle de Bessy). Σήμερον γνωρίζομεν, ὅτι τούτου ὑφίστανται δύο ἀντίτυπα εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων καὶ ἕνα εἰς τὴν Δημοτικὴν τοῦ Clermont - Ferrand. Οἱ

* Ἀναφέρομεν μερικάς: — Δὲν ὑπάρχουν ἕκται δυνάμεις οὔτε τετράγωνοι, αἱ ὁποῖαι προστιθέμεναι εἰς τὸ 62 ν' ἀποτελοῦν τετράγωνα. Μόνον τὸ 4 εἶναι τετράγωνον ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸ 12 ἀποτελεῖ διτετράγωνον. Ἐκτὸς τοῦ 16, δὲν ὑπάρχει διτετράγωνον, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸ 9 ν' ἀποτελῇ τετράγωνον. Δὲν ὑπάρχουν κύβοι τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι 20, καὶ μόνον τὸ ζεῦγος 8 καὶ 27 δίδει διαφορὰν 19. Δὲν ὑφίστανται ζεύγη διτετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι 100.

** Ἀξίζει νὰ τὰς ἀναφέρωμεν: Δὲν ὑπάρχουν τέλειοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἐκτὸς ἐκείνων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐὰν ὑπάρχουν ἀριθμοὶ τέλειοι περιττοί, δέον νὰ ἔχουν τὴν μορφὴν a (2b - 1), ὑποτιθεμένου ὅτι 2b — 1 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

ἀριθμοὶ οἱ διδόμενοι ὑπὸ τοῦ Frenicle, ὡς λύοντες τὸ πρῶτον ζήτημα τοῦ Fermat, εἶναι $(751530)^2$ καὶ $(37200735)^2$, καθ' ὅσον ὁ πρῶτος προστιθέμενος εἰς τοὺς διαιρέτας του δίδει $(1292054400)^2$ καὶ ὁ δεύτερος $(346787400960)^2$. Προσθέτει δὲ ὁ Frenicle τὴν παρατήρησιν, ὅτι πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7^2, ποὺ δίδει ὁ Fermat, λαμβάνονται δύο νέαι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Τὸ ἄλλο πρόβλημα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ διάσημος γερουσιαστὴς τῆς Τουλούζης πληροῦται, ἐξ ἄλλου, ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $(30519275171)^2$, ἀφοῦ οὗτος προστιθέμενος εἰς τοὺς διαιρέτας του δίδει $(10773399)^2$. Τὰ ἀξιόλογα αὐτὰ ἀποτελέσματα ἐκτίθενται χωρὶς τὰς ἀποδείξεις των (ὁ γράφων τὰ ἔχει ἐπαληθεύσει καὶ ἐγγυᾶται τὴν ἀκρίβειάν των), φαίνεται δὲ ὅτι ἱκανοποίησαν τὸν Fermat, ἀφοῦ οὗτος εἰς τὴν δευτέραν του πρόκλησιν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν, δὲν ἔκαμε πλέον λόγον σχετικῶς.

361. Πληροφορίαι περὶ τῶν προκλήσεων, μὲ τὰς ὁποίας ἀσχολούμεθα, ἔφθασαν εἰς τὴν Ὁλλανδίαν χάρις εἰς τὸν G. Boreel, ὁ ὁποῖος ἀπὸ τοῦ 1650 μέχρι τοῦ 1658 ἐχρημάτισεν ἀντιπρόσωπος τῶν Ἡνωμένων Ἐπαρχιῶν εἰς Παρισίους. Ὁ Golio, τότε πρύτανις εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Leiden, ἔλαβε τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων τοῦ Fermat τὴν 7 Φεβρουαρίου 1657 καὶ μετὰ δέκα ἡμέρας κατέφθανον εἰς Παρισίους αἱ ἀποσταλεῖσαι λύσεις, τῶν ὁποίων συγγραφεὺς ἦτο ὁ François van Schooten, υἱὸς τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ φέροντος τὸ αὐτὸ ὄνομα (1581 - 1646). Οὗτος εἶχε γεννηθῆ εἰς Leiden κατὰ τὸ 1615 καὶ ἀπέθανεν ἐκεῖ τὸν Ἰανουάριον τοῦ 1661. Διεδέχθη τὸν πατέρα του ἀποθανόντα εἰς τὴν ἕδραν τῶν μαθηματικῶν τῆς Σχολῆς Μηχανικῶν, ποὺ ἦτο προσηρτησμένη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς πόλεως. Ὀφείλεται εἰς αὐτὸν μία ἀνακατασκευὴ τῶν Ἐπιπέδων Τόπων τοῦ Ἀπολλωνίου, εἰς τὴν ὁποίαν προέβη χωρὶς νὰ ἔχῃ γνῶσιν τῆς ἀναλόγου ἐργασίας τοῦ Fermat. Ἔχει τὴν δόξαν ὅτι ὑπῆρξε καθηγητὴς τοῦ C. Huygens καὶ τοῦ G. de Witt (§ 405).

Περὶ τῶν ἀπαντήσεων, ποὺ ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Schooten εἰς τὰ προβλήματα τοῦ Fermat, λαμβάνομεν γνῶσιν ἀπὸ τὸ μνημονευθὲν ἀνωτέρω μικρὸν ἔργον τοῦ Frenicle, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶχε τυπωθῆ εἰς μικρὸν ἀριθμὸν ἀντιτύπων καὶ διαδοθῆ εἰς περιωρισμένον κύκλον, ἀφοῦ, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἐπὶ μακρὸν ἐθεωρεῖτο ὡς μὴ ὑφιστάμενον καὶ ἀφοῦ σήμερον δὲν εἶναι γνωστὰ παρὰ μόλις καὶ μετὰ βίας τρία ἀντίτυπα.

Προσθέτομεν ὅτι εἰς τὴν Ὁλλανδίαν ἐπίσης ἠσχολήθη ἐπιτυχῶς μὲ τὰ ἴδια ζητήματα καὶ ὁ John Hudde (§ 404). Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν συγκεντρώσει ἐπαρκῆ στοιχεῖα διὰ νὰ συμπεράνωμεν ὅτι, ἀντιθέτως πρὸς ἄλλας γνωστάς μας περιπτώσεις, ἡ πρόκλησις τὴν ὁποίαν ἐξαπέλυσεν ὁ Fermat ἐγένετο ἀφορμὴ ν' ἀποκτήσῃ ἡ ἐπιστήμη μας συμπεράσματα ἀδιαφιλονικήτου ἀξίας.

Ὁ Fermat καὶ ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς

362. Ἄς στραφῶμεν τώρα εἰς ἕνα ἄλλον κλάδον τῶν μαθηματικῶν, εἰς τὴν ἱστορίαν τοῦ ὁποίου ὁ Fermat κατέχει μίαν θέσιν τόσον ἐξέχουσαν, ὥστε ὁ Lagrange ἔφθασε μέχρι τοῦ σημείου νὰ τὸν ἀνακηρύξῃ δημιουργὸν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Ἄν δύναται νὰ εἶναι κανεὶς κάπως ἀπρόθυμος νὰ ἐνστερνισθῇ μίαν τοιαύτην βεβαίωσιν, ἐξ ὅσων πρόκειται τώρα νὰ ἐκθέσωμεν θὰ προκύψῃ, ὅτι ὁ κορυφαῖος ἰταλὸς μαθηματικὸς ἤχθη εἰς τὸν ὡς ἄνω χαρακτηρισμὸν στηριζόμενος ἐπὶ σοβαρωτάτων τεκμηρίων.

Ὁ Fermat παρωρμήθη εἰς τὴν μελέτην ζητημάτων, τὰ ὁποῖα σήμερον ἀνήκουν εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν, ἐκ τῆς ἐπιθυμίας νὰ λύσῃ προβλήματα μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐπέσυραν τὴν προσοχήν του οἱ Mersenne καὶ Carcavy*. Τὰ ὑπομνήματα ποὺ ἀφιέρωσεν εἰς τὰ θεμελιώδη αὐτὰ ζητήματα, ἀνακοινωθέντα εἰς τὸν Descartes, προεκάλεσαν μεταξὺ τῶν δύο μεγάλων μαθηματικῶν ζωηρὰν συζήτησιν, εἰς ἐξήγησιν τῆς ὁποίας προβάλλεται τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Fermat ἐξέθεσε τότε τὴν μέθοδόν του χωρὶς νὰ τὴν ἀποδεικνύῃ (πρὸς δικαιολογίαν τοῦ κανόνος του, θὰ ἐχρειάζετο ἐκτεταμένον ὑπόμνημα, συμφώνως πρὸς ὅσα ἔγραφε δι' ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 7 Ἀπριλίου 1646).

Ἡ μέθοδος τοῦ Fermat παρουσιάζεται εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς τοῦ ἱστορικοῦ ὡς ἐξελικτικὴ μορφὴ μιᾶς παρατηρήσεως, τὴν ὁποίαν, ὅπως εἴδομεν, εἶχον ἤδη κάμει ὁ Oresme καὶ ὁ Kepler (§ 306). Εἰς τοὺς συγχρόνους μας ὅμως ἐμφανίζεται ὡς ἰσοδύναμος πρὸς τὸν κανόνα, δυνάμει τοῦ ὁποίου εἰς πᾶν σημεῖον μεγίστου ἢ ἐλαχίστου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς πρέπει νὰ μηδενίζεται ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς. Πράγματι, ἂν εἶναι $f(a)$ ἡ ἐρευνητέα συνάρτησις, ὁ Fermat διδάσκει νὰ ὑπολογίζωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ποσότητας:

$$f(a+e), \quad f(a+e)-f(a), \quad \frac{f(a+e)-f(a)}{e},$$

κατόπιν νὰ θέσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν $e=0$ (παρατηρητέον, ὅτι ὁ Fermat δὲν ὁμιλεῖ περὶ διαβάσεως εἰς τὸ ὅριον), τὸ δὲ προϊὸν νὰ ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ μηδέν. Προκύπτει οὕτω μία ἐξίσωσις ὡς πρὸς a, ἡ ὁποία λυομένη δίδει τὴν λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα.

Βεβαίως ὁ ἀνωτέρω κανὼν δὲν εἶναι πλήρης, ἐφ' ὅσον δὲν λέγει τίποτε περὶ διακρίσεως τῶν τιμῶν εἰς ἐκείνας ποὺ δίδουν μέγιστον καὶ ἐκείνας

---

* Ἡ πρώτη δημοσία ἀνακοίνωσις τῆς μεθόδου τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τοῦ Fermat ἐδόθη τὸ 1642 ὑπὸ τοῦ Hérigone εἰς ἰδιαίτερον τόμον Συμπλήρωμα ἀποτελοῦντα συνέχειαν τῆς σειρᾶς τῶν μαθημάτων του (Cours, § 337).

ποὺ δίδουν ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως f(a), οὔτε περὶ διευκρινίσεως τοῦ θέματος κατὰ πόσον εἰς ὅλας τὰς ρίζας τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἀντιστοιχοῦν ἢ ὄχι ἀκρότατα τῆς δοθείσης συναρτήσεως. Ὑπάρχει ὅμως ἕνα τεκμήριον, ἀναγόμενον εἰς τὴν ἄνοιξιν τοῦ 1643, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἀπαραίτητος αὐτὴ συμπληρωματικὴ διασάφησις ἐδόθη ὑπὸ τοῦ ἰδίου διὰ μιᾶς θεωρίας ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν ἔρευναν τοῦ σημείου τῆς δευτέρας παραγώγου. Σημειωτέον δὲ ἀκόμη, ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ δοκουμέντον εὑρίσκονται μερικαὶ φράσεις («ὑποθέτω ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἔρευνα ἀπολήγει εἰς ἕνα σημεῖον ἢ εἰς ἕνα μοναδικὸν τέρμα»), ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται ὅτι ὁ Fermat δὲν ἀπεσκόπει παρὰ ν' ἀσχοληθῇ ἀποκλειστικῶς μὲ συναρτήσεις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς.

Ἀδίκως προεβλήθη ἡ ἀντίρρησις, ὅτι ἡ μέθοδος ἦτο ἀνεφάρμοστος εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ συνάρτησις f(a) περιεῖχε ριζικά, διότι ὁ Fermat ἔδειξε διὰ καταλλήλων παραδειγμάτων τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἔπρεπε νὰ προχωρήσωμεν εἰς τοιαύτας περιπτώσεις. Εἰς τὸν ἴδιον ὀφείλεται περαιτέρω ἡ θεμελιώδης παρατήρησις, ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, ἀπὸ ἀναλυτικῆς ἀπόψεως, δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν ἔρευναν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς. Ἐπίσης ἡ ἔρευνα τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς τμήματος παραβολικοῦ κωνοειδοῦς ἀπησχόλησεν ἐπιτυχῶς τὸν Fermat, ὁ ὁποῖος ἔκαμε πρὸς τοῦτο χρῆσιν σκέψεων τῆς αὐτῆς φύσεως. Ὅτι δὲ τέλος τοιαῦται σκέψεις ἠδύναντο νὰ ληφθοῦν ὡς βάσεις διὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῶν σημείων καμπῆς εἶναι πράγματα, τῶν ὁποίων τὴν ἐπίτευξιν ἐβεβαίωνε μέν, ἀλλὰ δὲν ἀπεδείκνυε κατὰ τρόπον ἐξαντλητικόν.

Τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν εὐκαμψίαν τῶν ἀνωτέρω μεθόδων κατέδειξεν ὁ Fermat ἐπὶ σειρᾶς παραδειγμάτων. Ἀναφέρομεν μεταξὺ τούτων τὰς ὑπ' αὐτοῦ ὑποδειχθείσας κατασκευὰς τῶν ἐφαπτομένων τῆς κισσοειδοῦς τοῦ Διοκλέους, τῆς κογχοειδοῦς τοῦ Νικομήδους, τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τῆς τετραγωνιστρίας· ἐπίσης τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀναγγελθεῖσαν λύσιν, κατ' ἐφαρμογὴν τῶν ἰδίων ἀρχῶν, τοῦ προβλήματος τοῦ προσδιορισμοῦ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου, σημείου τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἐλάχιστον. Εὔλογος λοιπὸν ὑπῆρξεν ὁ ἐνθουσιασμός, ὁ ὁποῖος κατέλαβε τὸν Roberval, ὅταν ἔλαβε γνῶσιν τῶν νέων μεθόδων, καὶ ὁ ὁποῖος τὸν ὤθησε νὰ συνταχθῇ ἀδιστάκτως παρὰ τὸ πλευρὸν τοῦ Fermat, ἐναντίον τοῦ Descartes. Ἂς σημειωθῇ δέ, ὅτι ἡ ὀργὴ τοῦ συγγραφέως τοῦ Discours de la méthode ἐξήφθη κυρίως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ Fermat ἐφήρμοσεν εἰς τὴν Διοπτρικὴν τὴν μέθοδόν του περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, καὶ ἀπέδειξεν ὅτι αὕτη ὡδήγει

λογικῶς εἰς τοὺς νόμους τῆς ἀνακλάσεως καὶ διαθλάσεως τοῦ φωτός, οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν Διοπτρικὴν περιεβάλλοντο ἀπὸ μίαν ἀχλὺν μεταφυσικοῦ μυστηρίου. Αἱ σχετικαὶ θεωρίαι μάλιστα τοῦ Fermat ἔχουν ἀξίαν γενικωτέρου χαρακτῆρος, ἐπειδὴ στηρίζονται ἐπάνω εἰς μίαν ἔννοιαν οἰκονομίας διεπούσης ὅλα τὰ φυσικὰ φαινόμενα.

363. Εἰς τὰ σημαντικὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα, ποὺ θεωροῦνται σήμερον ὡς ἀνήκοντα εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν, ἀνταποκρίνεται σειρὰ ἄλλων, οὐχὶ μικροτέρας σπουδαιότητος, ὑπαγομένων εἰς τὰ ἀντικείμενα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Πρὶν ἢ ἀπαριθμήσωμεν τοὐλάχιστον τὰ σπουδαιότερα, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς πολλὰ χωρία τῶν ἔργων τοῦ Fermat ἀπαντῶνται παραβολαὶ ἀνωτέρας τάξεως. Ἐπανειλημμένως ἠγέρθη τὸ ζήτημα κατὰ πόσον ἀνήκει εἰς αὐτὸν ἡ πατρότης των ἢ μήπως ἔχουν δικαιώματα εἰς αὐτὴν ὁ Cavalieri ἢ ἄλλοι μαθηματικοί. Χωρὶς νὰ εἰσχωρήσωμεν εἰς τοὺς μαιάνδρους τοιούτου προβλήματος, σημειοῦμεν ὅτι οἱ χρόνοι ἦσαν προφανῶς ὥριμοι διὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $y^2 = px$ εἰς τὴν $y^3 = px$, κατὰ συνέπειαν δὲν πρέπει νὰ μᾶς προκαλῇ θαυμασμόν, ἂν ἕνα βῆμα, ὅπως αὐτό, ἠδυνήθη νὰ πραγματοποιηθῇ συγχρόνως καὶ ἀνεξαρτήτως εἰς τὴν Ἰταλίαν, τὴν Γαλλίαν ἢ ἀλλαχοῦ*. Συμπτώσεις τοιαύτης φύσεως εἶναι συχναὶ εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Εἰς τὰς παραβολὰς ἀκριβῶς ἀνωτέρας τάξεως ἀναφέρεται ἕνα σημείωμα ἀπευθυνθὲν περὶ τὸ 1648 εἰς τὸν B. Cavalieri, ὅπου ἐκτίθεται γενικὸς κανὼν τετραγωνισμοῦ των, χωρὶς νὰ παρασιωπᾶται ὅτι καὶ ὁ Roberval, τῇ προσκλήσει τοῦ Fermat, εἶχεν ἀσχοληθῇ μὲ κάποιαν ἐπιτυχίαν ἐπὶ τοῦ θέματος. Ἐπὶ πλέον εἰς τὸ σημείωμα τοῦτο δίδει ὁ μαθηματικός μας τὸν κυβισμὸν τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς τυχούσης παραβολῆς περὶ τὸν ἄξονά της.

Ἀπὸ τὰς παραβολὰς εἰς τὰς ὑπερβολὰς ἀνωτέρου βαθμοῦ μικρὸν εἶναι τὸ βῆμα· τὸ βῆμα τοῦτο ἔκαμεν ἀσφαλῶς ὁ Fermat (χωρὶς νὰ εἶναι βέβαιον ἂν τὸ ἐπραγματοποίησεν μόνον αὐτὸς καὶ πρὶν ἀπὸ ὅλους). Διότι περὶ τῶν ἐν λόγῳ καμπύλων ἠσχολήθη ἀπὸ ἀπόψεως τετραγωνισμοῦ των εἰς τὸ ἔργον ποὺ φέρει τίτλον De aequationum localium transmutatione et emendatione[18]. Βάσις τῶν ἐρευνῶν, αἱ ὁποῖαι ἐκτίθενται εἰς τὸ ἔργον αὐτό, εἶναι ἡ παρατήρησις ὅτι, καίτοι ὁ Ἀρχιμήδης ἐχρησιμοποίησεν ἀποκλειστικῶς ἀριθμητικὰς προόδους, αἱ γεωμετρικαὶ δὲν ὑστεροῦν εἰς τὴν παροχὴν σημαντικῶν ὑπηρεσιῶν. Ἡ δυνατότης ἐφαρμογῆς των προκύπτει ἀπὸ ἕνα λῆμμα, τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος S τῶν

---

* Ὑπὸ ἀναλόγους συνθήκας εὑρισκόμεθα ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἕλικας ἀνωτέρας τάξεως $\rho^n = a\omega$, τὰς ὁποίας ἐμελέτησαν πολλοὶ γεωμέτραι τῆς ἰδίας ἐποχῆς, ἐκκινοῦντες ἀπὸ τὴν ἀρχιμήδειον ἕλικα $\rho = a\omega$.

ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου. Ἐὰν εἶναι a ὁ πρῶτος ὅρος καὶ $q = \frac{u}{v} < 1$ ὁ λόγος, τὸ λῆμμα τοῦτο γράφεται:

$$\frac{a}{S-a} = \frac{v-u}{u},$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Μεταξὺ τῶν ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα ἐπέτυχεν ὁ γάλλος μαθηματικός, ἀναφέρομεν τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ὑπερβολῶν καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, δυνάμει τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς κισσοειδοῦς ἰσοῦται πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ θεμελιώδους κύκλου.

Ἄλλα σημαντικὰ ἀποτελέσματα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ἀνεκοινώθησαν ἀνωνύμως τὸ 1670, ἐν παραρτήματι, εἰς τὸ ἔργον Veterum geometria promota in septem de cycloidi libris[19] τοῦ Ἰησουΐτου Antoine de la Louvère (γενν. τὸ 1600, ἀποθ. εἰς Τουλούζην τὴν 2αν Σεπτ. 1664). Ἐκεῖ ἀντιμετωπίζεται θαρραλέως τὸ πρόβλημα τῆς εὐθειοποιήσεως τῆς κοινῆς παραβολῆς καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι, κατὰ βάθος, τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὸν τετραγωνισμὸν μιᾶς συνήθους ὑπερβολῆς· εἶναι πράγματι γνωστόν, ὅτι τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἕνα ὁλοκλήρωμα δυνάμενον νὰ ἐκφρασθῇ μὲ λογαρίθμους.

Ἡ εὐθειοποίησις μιᾶς καμπύλης χρησιμοποιεῖται περαιτέρω εἰς τὴν ἀποκατάστασιν ἑνὸς ἀξιολόγου μετασχηματισμοῦ καμπύλης εἰς ἀπειρίαν ἄλλων καὶ ἀπαντᾶται ἐκ νέου εἰς τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀποκαθιστᾷ τὴν δυνατότητα εὐθειοποιήσεως μέσῳ παραβολικῶν τόξων τῶν καμπύλων τῆς οἰκογενείας τῶν κυκλοειδῶν. Ἀκόμη ἐκπληκτικώτερος εἶναι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τμήματος παραβολικοῦ κωνοειδοῦς, διότι ἀποτελεῖ ἀξιομνημόνευτον παράδειγμα μετρήσεως τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καμπύλης ἐπιφανείας μὴ σφαιρικῆς, κωνικῆς ἢ κυλινδρικῆς. Ὁ Fermat εὑρίσκει ἀκριβῶς ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου. Τέλος ἐπεξέτεινεν εἰς ὅλας τὰς παραβολὰς καὶ ἕλικας ἀνωτέρας τάξεως τὴν ὑπὸ τοῦ Cavalieri (§ 315) καὶ ἄλλων ἀνακαλυφθεῖσαν σχέσιν, διὰ τῆς ὁποίας μεταβαίνομεν ἀπὸ ἕνα τόξον μιᾶς κοινῆς παραβολῆς εἰς τόξον μιᾶς ἀρχιμηδείου ἕλικος.

Ἄλλα δείγματα τῆς θαυμαστῆς εὐχερείας τοῦ Fermat νὰ χειρίζεται, χωρὶς μεγάλην λογιστικὴν συσκευήν, τὰ πλέον περίεργα προβλήματα ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, δύναται ν' ἀντλήσῃ κανεὶς ἀπὸ τὴν γεωμετρικὴν διατριβὴν De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione[20]. Αὕτη ἐδημοσιεύθη, ἐπίσης ἀνωνύμως, καὶ περιελήφθη ὁμοίως ὡς παράρτημα εἰς

τὸν προαναφερθέντα τόμον τοῦ Louvère. Ἐκεῖ ἀποδεικνύεται ἡ δυνατότης εὐθειοποιήσεως τῆς (ἡμικυβικῆς) παραβολῆς $y^3 = px^2$ καὶ κατ' ἐπανάληψιν τονίζεται τὸ γεγονός, ὅτι τὸ νεώτατον αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἐπετεύχθη δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀρχιμηδείων μεθόδων, καταλλήλως γενικευομένων. Ἐάν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, καὶ ἄλλοι ἔφθασαν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τοῦτο δὲν μειώνει, φυσικά, τὴν μεγίστην σημασίαν τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς Τουλούζης.

364. Εἰς τὸν πίνακα, τὸν ὁποῖον ἐπεχειρήσαμεν νὰ ζωγραφίσωμεν, μὲ τὰς μαθηματικάς του ἀνακαλύψεις, ὁ ἀναγνώστης θὰ σημειώσῃ τοὐλάχιστον μίαν βαρεῖαν ἀτέλειαν, τουτέστι τὴν ἔλλειψιν ἐπαρκοῦς τεκμηριώσεως ὡς πρὸς τὰς χρονολογίας. Τοῦτο δὲν εἶναι παρὰ ἀπότοκον τῆς ἀκατανικήτου ἀποστροφῆς τοῦ μαθηματικοῦ μας πρὸς τὸν τύπον. Τὰ γραπτά του, συντεταγμένα ἐν σπουδῇ, περιεφέροντο ἀπὸ χειρὸς εἰς χεῖρα μεταξὺ ἐκείνων μόνον, οἱ ὁποῖοι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ κατανοήσουν τὴν ἐκτιθεμένην θεωρίαν, ὑπὸ μορφὴν φράσεων τρομερὰ συνεπτυγμένων καὶ κατὰ συνέπειαν σκοτεινῶν. Διὰ τοῦτο τὸ μόνον φῶς, ποὺ δύναται κανεὶς ν' ἀναζητήσῃ σχετικῶς, ἐκπηγάζει ἀπὸ τὴν ἀλληλογραφίαν του καὶ αὐτὴν πράγματι ἐξεμεταλλεύθημεν καὶ ἡμεῖς, ὅσον μᾶς ἦτο δυνατόν.

Προσθέτομεν ὅτι ἐξ αὐτῆς προκύπτει μία ἐνδιαφέρουσα διαπίστωσις· ὅτι ὁ Fermat ἠσχολεῖτο μὲ τὰ θέματα τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ἀπὸ τοῦ 1636, ἀφοῦ περὶ αὐτῶν ὁμιλεῖ εἰς ἐπιστολάς του, γραφείσας τὸ αὐτὸ ἔτος πρὸς τὸν Mersenne, τὸν Pascal καὶ τὸν Roberval. Τότε ἢ ὀλίγον ἀργότερα πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν τὴν χρονολογίαν τῆς ἀνακαλύψεως τῶν μεθόδων ἐρεύνης τῶν ἀκροτάτων, διότι εἰς τὸ ἔτος 1638 ἀνάγεται μία νύξις ἐφαρμογῆς, γενομένης ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὴν κυκλοειδῆ καὶ τὸ φύλλον τοῦ Καρτεσίου (μία ἐπιστολὴ πρὸς τὸν Brulart de Saint Martin, ἡ ὁποία φαίνεται νὰ ἐγράφη κατὰ Μάϊον 1643, ἀποδεικνύει ὅτι τότε ἡ μέθοδος εἶχεν ἐξελιχθῆ εἰς τὸ τελειότερον αὐτῆς στάδιον).

Ἐξ ἄλλου μία ἐπιστολή του πρὸς τὸν Mersenne, ὑπὸ χρονολογίαν 10 Αὐγούστου 1638, ἐπιτρέπει νὰ ἐπισημάνωμεν μίαν χρονολογίαν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἰδίων ἀρχῶν ἐπὶ τῆς ἀναζητήσεως κέντρων βάρους γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἡ εἰς τὴν διοπτρικὴν παρέμβασις τῆς ἀρχῆς τοῦ ἐλαχίστου πρέπει ν' ἀναχθῇ περίπου εἰς τὸ ἔτος 1637, σαφῶς ὅμως νύξεις περὶ αὐτῆς ἀνευρίσκονται μόνον εἰς τὴν μεταγενεστέραν ἀλληλογραφίαν. Πολὺ προσφατότεραι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἔρευναι ἐπὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, διότι πράγματι εἰς ἐπιστολὰς τῶν ἐτῶν 1659 - 61 ἀπαντῶνται πολλαὶ ἀπὸ τὰς ἐκφωνήσεις ποὺ ἀνεφέρθησαν προηγουμένως.

Ἡ ἐπιστημονικὴ ἀλληλογραφία τοῦ Fermat ἀποκαλύπτει ἀκόμη μίαν τελευταίαν ὄψιν τῆς ἐπιστημονικῆς του δραστηριότητος, καθ' ὅσον αἱ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXV

ΑΦΥΠΝΙΣΙΣ ΤΗΣ ΚΑΘΑΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ DESARGUES ΚΑΙ PASCAL

ΜΕΡΟΣ I: DESARGUES

Βιογραφία τοῦ Desargues

365. Ἐνῷ οἱ μαθηματικοὶ κατεγίνοντο μὲ τόσον ζῆλον εἰς τὴν τελειοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν μεθόδων, ἡ γεωμετρία βεβαίως δὲν ἐγκατελείφθη ἐντελῶς, οἱ ἀσχολούμενοι ὅμως μὲ αὐτὴν ἀφιέρωναν τὴν δραστηριότητά των οὐχὶ εἰς ριζικὰς ἀνακαινίσεις ἀλλὰ εἰς ἐρεύνας περιεργίας (ὅπως αἱ κατασκευαὶ μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου) ἢ εἰς ἀναπλάσεις ἀρχαίων ἔργων ἀπολεσθέντων ἢ τὸ πολὺ εἰς τελειοποίησιν καὶ συμπλήρωσιν λεπτομερειῶν τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ ἕνας αὐτοδίδακτος, ὁ ὁποῖος ἐξ ἰδίας παρορμήσεως εἶχε μελετήσει τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἠκολούθησε κατόπιν τὴν σταδιοδρομίαν τοῦ ἀρχιτέκτονος: ὁ Girard Desargues.

Ὁ Desargues ἐγεννήθη εἰς τὴν Λυὼν τὸ 1593, μετῴκησε δὲ εἰς Παρισίους τὸ 1626, ὅπου ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν καὶ κατέκτησε τὴν ἐκτίμησιν τοῦ Richelieu, ὁ ὁποῖος τὸν παρέλαβε εἰς τὴν ἀκολουθίαν του κατὰ τὴν πολιορκίαν τῆς La Rochelle (1628) ὑπὸ τὴν ἰδιότητα στρατιωτικοῦ μηχανικοῦ (σήμερον θὰ ἐλέγετο ἀξιωματικὸς τοῦ μηχανικοῦ). Ἐπιστρέψας εἰς Παρισίους ἦλθεν εἰς σχέσεις μὲ τὸν Descartes, τοῦ ὁποίου ἀνέλαβε τὴν ὑπεράσπισιν εἰς μερικὰς ἀπὸ τὰς ἔριδας, εἰς τὰς ὁποίας ἐνεπλάκη ὁ μέγας φιλόσοφος. Ἡ μεγάλη ὑπόληψις τὴν ὁποίαν ἔτρεφεν ὁ τελευταῖος διὰ τὸν Desargues ἀποδεικνύεται ἀπὸ πολλὰ χωρία τῶν ἐπιστολῶν του, ὅπου ἀπαντῶνται ἐγκωμιαστικαὶ περικοπαὶ προκαλοῦσαι ἔκπληξιν εἰς τὸν ἀναγνώστην τὸν γνωρίζοντα τὸν ὑπεροπτικὸν καὶ περιφρονητικὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐφέρετο ὁ Descartes πρὸς τοὺς λοιποὺς ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του.

Ὁ Desargues ἐφοίτα εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς συγκεντρώσεις, ποὺ ἐγίνοντο εἰς τὴν στοὰν τοῦ Mersenne καὶ αἱ ὁποῖαι κατέληξαν εἰς τὴν

ἵδρυσιν τῆς 'Ακαδημίας τῶν Παρισίων. Εἰς τὰς συγκεντρώσεις αὐτὰς ὁ Desargues ἐξέθετε τὰς θεμελιώδεις ἰδέας τῶν ἀνακαλύψεών του. Εἶναι ἐν τούτοις σκόπιμον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αἱ θεωρητικαὶ ἐργασίαι τοῦ Desargues ἐμφανίζονται ὡς δευτερογενῆ προϊόντα τῶν προσπαθειῶν του νὰ δώσῃ στερεὰς βάσεις εἰς τὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποίουν εἰς τὴν πρᾶξιν ζωγράφοι καὶ ἀρχιτέκτονες, καὶ ἐνδεχομένως νὰ τὰς τελειοποιήσῃ. Ὁ ἴδιος κάποτε (Ὀκτώβριος 1647) ἐδήλωσεν ὅτι «δὲν εὑρίσκει εὐχαρίστησιν εἰς τὴν μελέτην καὶ τὰς ἐρεύνας φυσικῆς καὶ γεωμετρίας παρὰ μόνον ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ προσπορίσουν εἰς τὸ πνεῦμα ἕνα μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου τοῦτο νὰ φθάσῃ εἰς κάποιαν γνῶσιν τῶν ἀμέσων αἰτιῶν τῶν γεγονότων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ τὴν διατήρησιν τῆς ὑγείας ἢ τὴν ἐν τῇ πράξει ἄσκησιν κάποιας τέχνης».

Τὰς ἀνακαλύψεις του ὁ Desargues ἐξετύπωνεν εἰς φυλλάδια προοριζόμενα διὰ τοὺς φίλους του, ἐκ τῶν φυλλαδίων δὲ τούτων μέρος μόνον διέφυγε τὴν καταστροφήν. Ἡ ἄκρα συντομία εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως, ἀλλὰ καὶ αἱ καινοτομίαι, μὴ πάντοτε ἀναγκαῖαι, εἰς τὴν ὁρολογίαν του, ἠμπόδισαν τὸν θρίαμβον τῶν ἰδεῶν του, αἱ ὁποῖαι ἤρχισαν νὰ καταλαμβάνουν τὴν προσήκουσαν θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην μόνον ὅταν ὁ Poncelet (1822) ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον, λίαν εὐστόχως, ἀπεκάλει «τὸν Monge τοῦ αἰῶνος του». Τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ M. Chasles, ἤρχισαν τότε νὰ συγκεντρώνωνται μὲ ἐνδιαφέρον καὶ ἀγάπην ὅσα ὑφίσταντο ἀκόμη ἀπὸ τὰ γραπτά του καὶ τελικῶς ἐδημοσιεύθησαν ὅλα τὰ εὑρεθέντα εἰς μίαν ἔκδοσιν, ἡ ὁποία ἀξίζει νὰ κατέχῃ τιμητικὴν θέσιν εἰς τὴν βιβλιοθήκην παντὸς γεωμέτρου.

Τὸ 1650 ὁ Desargues ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πόλιν ὅπου ἐγεννήθη, παρέμεινε δὲ εἰς αὐτὴν μέχρι τοῦ 1661, ὅτε καὶ ἀπέθανε.

Ἔργα τοῦ Desargues

366. Θεμελιώδης ἐπιστημονικὴ ἐργασία, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλει ὁ Desargues τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, εἶναι ἕνα συνοπτικὸν ἔργον του ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν δημοσιευθὲν εἰς Παρισίους τὸ 1639 ὑπὸ τὸν τίτλον: Brouillon - Projet des évenements de rencontre d' un cone avec un plan. (Σχεδίασμα τῶν συμβαινόντων κατὰ τὴν συνάντησιν κώνου καὶ ἐπιπέδου) Διὰ πρώτην φορὰν ἐκτίθεται καὶ ἐφαρμόζεται ἐκεῖ ἡ ἰδέα, καθ' ἣν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα θεωροῦνται ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις εὐθειῶν συντρεχουσῶν εἰς ἕνα σημεῖον ἢ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ μιᾶς εὐθείας, ἰδέα τὴν ὁποίαν μετ' ἐγκωμίων υἱοθέτησεν ὁ Descartes (ἐπιστολὴ 19 'Ιουνίου 1639).

Νέαι ἔννοιαι ἀπαιτοῦν νέαν ὁρολογίαν, τὴν ὁποίαν ὁ Desargues δὲν

ἵδρυσιν τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων. Εἰς τὰς συγκεντρώσεις αὐτὰς ὁ Desargues ἐξέθετε τὰς θεμελιώδεις ἰδέας τῶν ἀνακαλύψεών του. Εἶναι ἐν τούτοις σκόπιμον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αἱ θεωρητικαὶ ἐργασίαι τοῦ Desargues ἐμφανίζονται ὡς δευτερογενῆ προϊόντα τῶν προσπαθειῶν του νὰ δώσῃ στερεὰς βάσεις εἰς τὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποίουν εἰς τὴν πρᾶξιν ζωγράφοι καὶ ἀρχιτέκτονες, καὶ ἐνδεχομένως νὰ τὰς τελειοποιήσῃ. Ὁ ἴδιος κάποτε (Ὀκτώβριος 1647) ἐδήλωσεν ὅτι «δὲν εὑρίσκει εὐχαρίστησιν εἰς τὴν μελέτην καὶ τὰς ἐρεύνας φυσικῆς καὶ γεωμετρίας παρὰ μόνον ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ προσπορίσουν εἰς τὸ πνεῦμα ἕνα μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου τοῦτο νὰ φθάσῃ εἰς κάποιαν γνῶσιν τῶν ἀμέσων αἰτιῶν τῶν γεγονότων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ τὴν διατήρησιν τῆς ὑγείας ἢ τὴν ἐν τῇ πράξει ἄσκησιν κάποιας τέχνης».

Τὰς ἀνακαλύψεις του ὁ Desargues ἐξετύπωνεν εἰς φυλλάδια προοριζόμενα διὰ τοὺς φίλους του, ἐκ τῶν φυλλαδίων δὲ τούτων μέρος μόνον διέφυγε τὴν καταστροφήν. Ἡ ἄκρα συντομία εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως, ἀλλὰ καὶ αἱ καινοτομίαι, μὴ πάντοτε ἀναγκαῖαι, εἰς τὴν ὁρολογίαν του, ἠμπόδισαν τὸν θρίαμβον τῶν ἰδεῶν του, αἱ ὁποῖαι ἤρχισαν νὰ καταλαμβάνουν τὴν προσήκουσαν θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην μόνον ὅταν ὁ Poncelet (1822) ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον, λίαν εὐστόχως, ἀπεκάλει «τὸν Monge τοῦ αἰῶνος του». Τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ M. Chasles, ἤρχισαν τότε νὰ συγκεντρώνωνται μὲ ἐνδιαφέρον καὶ ἀγάπην ὅσα ὑφίσταντο ἀκόμη ἀπὸ τὰ γραπτά του καὶ τελικῶς ἐδημοσιεύθησαν ὅλα τὰ εὑρεθέντα εἰς μίαν ἔκδοσιν, ἡ ὁποία ἀξίζει νὰ κατέχῃ τιμητικὴν θέσιν εἰς τὴν βιβλιοθήκην παντὸς γεωμέτρου.

Τὸ 1650 ὁ Desargues ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πόλιν ὅπου ἐγεννήθη, παρέμεινε δὲ εἰς αὐτὴν μέχρι τοῦ 1661, ὅτε καὶ ἀπέθανε.

Ἔργα τοῦ Desargues

366. Θεμελιώδης ἐπιστημονικὴ ἐργασία, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλει ὁ Desargues τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, εἶναι ἕνα συνοπτικὸν ἔργον του ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν δημοσιευθὲν εἰς Παρισίους τὸ 1639 ὑπὸ τὸν τίτλον: Brouillon - Projet des évenements de rencontre d' un cone avec un plan. (Σχεδίασμα τῶν συμβαινόντων κατὰ τὴν συνάντησιν κώνου καὶ ἐπιπέδου) Διὰ πρώτην φορὰν ἐκτίθεται καὶ ἐφαρμόζεται ἐκεῖ ἡ ἰδέα, καθ' ἣν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα θεωροῦνται ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις εὐθειῶν συντρεχουσῶν εἰς ἕνα σημεῖον ἢ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ μιᾶς εὐθείας, ἰδέα τὴν ὁποίαν μετ' ἐγκωμίων υἱοθέτησεν ὁ Descartes (ἐπιστολὴ 19 Ἰουνίου 1639).

Νέαι ἔννοιαι ἀπαιτοῦν νέαν ὁρολογίαν, τὴν ὁποίαν ὁ Desargues δὲν

ἐδίστασε νὰ δημιουργήσῃ· διὰ νὰ κρίνωμεν περὶ τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔλυσε τὸ ἀκανθῶδες αὐτὸ πρόβλημα, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ ὑπ' αὐτοῦ προταθεῖσαι ὀνομασίαι ἀναφέρονται εἰς τὰ αὐτὰ σχήματα, ποὺ ἐπολιτογραφήθησαν εἰς τὴν γεωμετρίαν κατὰ τὴν πρώτην τριακονταετίαν τοῦ XIX αἰῶνος. Αἱ ὀνομασίαι του εἶναι διάφοροι τῶν σήμερον ἐν χρήσει, χωρὶς ὅμως νὰ δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι αἱ ἰδικαί του ἦσαν ὀλιγώτερον ἐπιτυχεῖς. Μία μόνον ἀπὸ τὰς λέξεις ποὺ ἐδημιούργησε περιεσώθη εἰς τὴν σύγχρονον ὁρολογίαν, ἡ λέξις involution (ἐνέλιξις) καὶ ἀναφέρεται εἰς μίαν σχέσιν, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ γεωμέτρης τῆς Λυὼν εἶχε τὴν μεγάλην τιμὴν νὰ συνδέσῃ τὸ ὄνομά του «ἐς ἀεί», ἀποδείξας τὴν σημασίαν της εἰς τὴν μελέτην τοῦ πλήρους τετραπλεύρου καὶ τοῦ εἰς κωνικὴν ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Ὁ Desargues, οὐδέποτε εὑρεθεὶς ἐνώπιον μαθητικοῦ ἀκροατηρίου, δὲν εἶχε συνείδησιν τῶν παιδαγωγικῶν ἀπαιτήσεων τῆς διδασκαλίας· διὰ τοῦτο ἡ πραγματεία του ἐφάνη δυσνόητος εἰς τὴν πλειοψηφίαν τῶν συγχρόνων του. Σήμερον, ὅτε εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα φθάνομεν δι' ἄλλης ὁδοῦ, ὁ ἀναγνώστης εὑρίσκει ἐκεῖ ὅ,τι θεωρεῖται ὡς οὐσιῶδες στοιχεῖον μιᾶς προβολικῆς θεωρίας τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ (γένεσις καὶ κατασκευὴ τούτων, πολικότης, διάμετροι, κέντρα, ἑστίαι κλπ.), μὲ κάποιας νύξεις ἐπεκτάσεως τῶν ἐκτιθεμένων πορισμάτων εἰς τὰ ἀνάλογα σχήματα τοῦ διαστήματος.

Ἐν τούτοις, παρὰ τὴν μνημονευθεῖσαν σκοτεινότητα τῆς ἐκθέσεως, δὲν ἔλειψαν εἰς τὴν ἐποχήν του τὰ πρόσωπα, ποὺ ἦσαν εἰς θέσιν νὰ κατανοήσουν τὸ ἔργον τοῦ Desargues καὶ νὰ τὸ ἐκτιμήσουν κατ' ἀξίαν. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς γεγονός. Τοῦ Brouillon - Projet γνωρίζομεν σήμερον ἕνα μόνον ἀντίτυπον, ληφθὲν τὸ 1679 ὑπὸ τοῦ F. de la Hire (γεωμέτρου τὸν ὁποῖον θὰ γνωρίσωμεν καλύτερα εἰς τὸ Κεφάλαιον XXVII), πρὸς ἰδίαν του χρῆσιν. Συνοδεύεται δὲ ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν, ἡ ὁποία πιστοποιεῖ τὴν προέλευσιν τοῦ ἀντιτύπου καὶ εἰς τὴν ὁποίαν περιέχεται τὸ ἀκόλουθον πλῆρες σημασίας ἐδάφιον: «ἔχουν παρέλθει περισσότερα τῶν ἓξ ἐτῶν, ἀφ' ὅτου ἐξετύπωσα τὸ πρῶτον μου ἔργον ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, δὲν ἔχω δὲ τὴν παραμικρὰν ἀμφιβολίαν, ὅτι ἂν κατὰ κάποιον τρόπον ἐγνώριζα τὴν πραγματείαν αὐτὴν δὲν θὰ εἶχα ἀνακαλύψει τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσα, διότι δὲν θὰ εἶχα θεωρήσει δυνατὴν τὴν ὕπαρξιν ἄλλης ἁπλουστέρας μεθόδου, ἐχούσης ἴσην γενικότητα».

367. Ἡ πραγματεία τοῦ Desargues τελειώνει μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι τὰ ὅσα ἐκτίθενται εἰς αὐτὴν εὑρίσκουν ἐφαρμογὴν εἰς τὴν προοπτικήν, εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὡρολογίων καὶ εἰς τὴν λάξευσιν τῶν λίθων. Εἰς ἀπόδειξιν δὲ τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου ἔχουν ἀφιερωθῆ ἄλλα ἔργα τοῦ ἰδίου,

περὶ τῶν ὁποίων ὀφείλομεν νὰ ὁμιλήσωμεν. Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον δι' ἡμᾶς παρουσιάζει τὸ ἔργον τὸ τιτλοφορούμενον: «Γενικὴ μέθοδος εὑρέσεως τῆς προοπτικῆς ἀπεικονίσεως ἀντικειμένων, δεδομένων ἐν τῇ πραγματικότητι ἢ ἐν σχεδίῳ μὲ τὰς διαστάσεις των, ἄνευ τῆς χρήσεως σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ πεδίου τοῦ ἔργου» (1636). Τὸ κείμενον ἀρχίζει μὲ τὴν παράθεσιν μιᾶς νέας ὁρολογίας διὰ τὰ διάφορα στοιχεῖα ποὺ εἰσέρχονται συνήθως εἰς οἱανδήποτε προοπτικήν, ὁρολογίας τῆς ὁποίας τὴν χρησιμότητα δὲν ἀνεγνώρισαν οἱ σύγχρονοί του, δοθέντος ὅτι ὑφίστατο ἤδη μία καθιερωθεῖσα ὑπὸ τῆς συνηθείας καὶ ὅτι ἡ προτεινομένη νέα ἐκρίνετο ἀνεπιτυχής. Ὁ Desargues εἶχε κακὴν ἔμπνευσιν προτείνων νέαν ὁρολογίαν, διότι, ἂν εἶναι δύσκολον νὰ πείσωμεν τοὺς πρακτικοὺς νὰ υἱοθετήσουν νέας μεθόδους εἰς τὴν ἐργασίαν των, ἀκόμη δυσκολώτερον εἶναι νὰ ἐπιβάλωμεν εἰς αὐτοὺς τὴν χρῆσιν νέων ὀνομάτων δι' ἐννοίας ἐμπεδωθείσας ἤδη ἐκ τῆς πράξεως. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ἴσως ἔκπληξιν εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι συνήντησε μεγάλας δυσχερείας εἰς τὴν ἀποδοχὴν τῶν ὑπ' αὐτοῦ προταθεισῶν κατασκευῶν, μολονότι, ὑπὸ τὸ φῶς τῆς νεωτέρας ἐπιστήμης, αὗται ἀναγνωρίζονται κατὰ βάθος ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς σήμερον ἐν χρήσει εἰς τὴν ἀξονομετρίαν, τῆς ὁποίας σημεῖον ἐκκινήσεως εἶναι ὡς γνωστὸν ἡ ἰδέα ὅτι ἑκάστου σημείου τοῦ προβλητέου σχήματος εἶναι γνωσταὶ αἱ καρτεσιαναὶ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι.

Πρέπει ἐν τούτοις νὰ προσθέσωμεν, ὅτι δὲν εἶναι αἱ καινοτομίαι του ὁ μόνος λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον αἱ νέαι κατασκευαὶ κατεπολεμήθησαν γενικῶς, ἀλλὰ καὶ τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Desargues, διὰ νὰ τὰς καταστήσῃ γνωστάς, περιωρίσθη εἰς ἕνα παράδειγμα ὄχι τόσον ἐπιτυχές, καθ' ὅσον δὲν δύναται κανεὶς ἐξ αὐτοῦ ν' ἀντιληφθῇ εὐκόλως τὴν γενικότητά των.

Οὔτε πρέπει νὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι, καίτοι ὁ Desargues δὲν ἔκαμε χρῆσιν τῶν σημείων φυγῆς (points de concours), ποὺ εἰσήγαγεν εἰς τὴν ἐπιστήμην ὁ G. del Monte (§ 263), ἐν τούτοις εἰς ἕνα παράρτημα προοριζόμενον διὰ τοὺς «ἐποπτικοὺς» (contemplatifs) κατέστησε γνωστὰς τὰς ἐναλλακτὰς θέσεις μετασχηματισμοῦ μεταξὺ μιᾶς συνήθους δέσμης εὐθειῶν καὶ ἑνὸς συστήματος παραλλήλων εὐθειῶν. Ὁ Desargues μὲ τὸ ὀξὺ γεωμετρικόν του ἔνστικτον ἀνεγνώριζεν εἰς τὴν ἀνωτέρω θεωρίαν τὴν πηγὴν «μιᾶς μυρμηκιᾶς σπουδαίων θεωρημάτων» καὶ ἐβεβαίωνεν, ὅτι ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὸν ἀκόλουθον πρόβλημα: «δοθείσης κωνικῆς, τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ προοπτικὴ εἰκών, νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι θὰ δώσουν τοὺς ἄξονας τῆς προοπτικῆς της».

368. Εἰς συμπλήρωσιν ἢ ὁλοκλήρωσιν τοῦ ἀνωτέρω ἔργου του ὁ Desargues, ἐπιθυμῶν νὰ κλείσῃ τὰ στόματα τῶν ἀντιπάλων του, ἐδημοσίευσε τὸ 1640 ἕνα μικρὸν ἔργον φέρον τὸν ἀκόλουθον μακρὸν τίτλον: Brouillon -

Projet d'exemple d'une manière universelle touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'eclaircissement d'une manière de reduire au petit pied en perspective comme en géométral et de tracer tous quadrants plats d'heures égales au soleil[21]. Μολονότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ἕνα «στύλ» καθαρώτερον καὶ ὀλιγώτερον συνεπτυγμένον τῶν προηγουμένων ἔργων του, ἐν τούτοις δὲν δύναται νὰ ἰσχυρισθῇ κανεὶς ὅτι τὸ ἔργον χαρακτηρίζεται ἀπὸ ἐξαίρετον διαύγειαν. Παρὰ ταῦτα ὑπῆρξαν πρόσωπα, τὰ ὁποῖα κατώρθωσαν νὰ κατανοήσουν τὰ ὅσα ἔγραφεν εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν, ὅπως προκύπτει ἀπὸ ἕνα κατάλογον ὀνομάτων ἢ τιμητικὸν πίνακα (albo d'onore), παρεμβληθέντα εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν.

Μεταξὺ τῶν ἐκλεκτῶν τούτων πνευμάτων, ἐξέχουσαν θέσιν κατέχει ὁ χαράκτης Abram Bosse (γεννηθεὶς εἰς Tours τὸ 1621 καὶ ἀποθανὼν ἐκεῖ τὸ 1678), ὁ ὁποῖος τὸ 1648 ἐδημοσίευσε μίαν πραγματείαν προοπτικῆς, ἐμπνευσμένην ἀπὸ τὰς ἰδέας τοῦ Desargues καὶ ἡ ὁποία, διὰ τοῦτο, ἀποτελεῖ πολύτιμον συμπλήρωμα εἰς τὰ δημοσιεύματα τοῦ ἀρχιτέκτονος τῆς Λυών. Ἐκτὸς ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ γεωμετρικῶν θεωρημάτων, προωρισμένων ν' ἀποσαφηνίσουν καὶ νὰ δικαιολογήσουν τὰς κατασκευὰς τοῦ Desargues, ἡ ἐν λόγῳ πραγματεία περιέχει τὴν περιγραφὴν ἑνὸς εἰδικοῦ διαβήτου, ἰδικῆς του κατασκευῆς, καταλλήλου νὰ διευκολύνῃ τὴν χάραξιν προοπτικῶν ἀπεικονίσεων.

Ὁ Bosse ὑπῆρξεν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος περισσότερον καὶ καλύτερον παντὸς ἄλλου, ἐπεδόθη εἰς τὴν διάδοσιν καὶ ὑπεράσπισιν τῶν ἰδεῶν τοῦ Desargues διὰ λόγων καὶ ἔργων. Εἰς τὴν διάδοσιν ἐχρησίμευσε τὸ κείμενον, τοῦ ὁποίου τίτλος εἶναι: Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux aux surfaces irrégulières (Γενικὸς τρόπος κατασκευῆς προοπτικῶν ἀπεικονίσεων ἐπὶ πινάκων μὲ ἀνώμαλον ἐπιφάνειαν, (1653), εἰς δὲ τὴν ὑπεράσπισιν ἕνα ἄλλο ὑπὸ τὸν τίτλον: Traité des pratiques géométrales et perspectives (Πραγματεία ἐπὶ τῶν γεωμετρογραφικῶν καὶ προοπτικῶν μεθόδων, 1656).

Ἕνα ἄλλο δημοσίευμα τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθενται, ἀναλύονται καὶ ἐφαρμόζονται αἱ μέθοδοι τοῦ Desargues, φέρει τὸν τίτλον Perpsective adressée aux théoriciens (Προοπτικὴ ἀπευθυνομένη εἰς θεωρητικοὺς) καὶ εὑρίσκεται προσηρτημένον εἰς τὸ προαναφερθὲν Traité. Κύριος σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἀναίρεσις κριτικῶν παρατηρήσεων στρεφομένων κατὰ τοῦ Desargues καὶ περιεχομένων εἰς τὸ ἔργον La perspective spéculative et pratique de l'invention du sieur Aléaume, mise au jour par E. Migon (Ἡ θεωρητικὴ καὶ πρακτικὴ τῆς ἐφευρέσεως τοῦ κὺρ Aléaume, ἐκδιδομένη ὑπὸ E. Migon, 1643).

369. Μίαν στάσιν ἀπέναντι τοῦ Desargues διαμετρικῶς ἀντίθετον τῆς τοῦ Bosse ἔλαβεν ἕνας ἄλλος ὀνομαζόμενος Curabelle, τοῦ ὁποίου αἱ βίαιαι ὅσον καὶ ἀδικαιολόγητοι ἐπιθέσεις θὰ εἶχον σήμερον ταφῆ εἰς τὸ νεκροταφεῖον τῆς λήθης, ὅπως καὶ ἦξιζον, ἐὰν δὲν συνέβαινε νὰ περισυλλέξῃ τὰ δηλητηριώδη κείμενα τοῦ Curabelle καὶ νὰ τὰ ἀνατυπώσῃ ὁ εὐσυνείδητος ἐκδότης τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν τοῦ Desargues. Ὡς μόνον ἐλαφρυντικὸν τοῦ Curabelle θὰ ἠδύνατο ν' ἀναφερθῇ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ 1643 ἐδημοσιεύθη εἰς Παρισίους ἕνα βιβλίον τοῦ P. Breuil, τιτλοφορούμενον La perspective pratique nécessaire a tous, par un parisien, religieux de la Compagnie de Jesus. (Ἡ πρακτικὴ προοπτικὴ εἰς πάντας ἀναγκαία, ὑπὸ ἑνὸς Ἰησουίτου ἐκ Παρισίων), εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀπόψεις τοῦ Desargues ἐκτίθενται παραμορφωμέναι ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, ἀνθρώπου μὴ δυνηθέντος προφανῶς νὰ εἰσδύσῃ εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ πρωτοτύπου γεωμέτρου. Τὰ χονδροειδῆ σφάλματα ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὸ κείμενον αὐτὸ ἐπεσήμανεν ὁ ἴδιος ὁ Desargues κατὰ τρόπον ἐλάχιστα φιλοφρονητικόν, καὶ τοῦτο ἐγένετο ἀφορμὴ μιᾶς ἀγρίας διαμάχης διαρκείας 40 ἐτῶν καὶ τῆς ὁποίας τὸ κύριον θῦμα ὑπῆρξεν ὁ Bosse. Διότι οἱ ἀντίπαλοι τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Λυὼν εἶχον τὴν ἀξίωσιν ἀπὸ τὸν Bosse ν' ἀφαιρέσῃ ἀκόμη καὶ τὸ ὄνομα τοῦ Desargues ἀπὸ τὸ προαναφερθὲν Traité des pratiques géométrales et perspectives, τὸ ὁποῖον ἐπρόκειτο νὰ δημοσιεύσῃ ὑπὸ τὴν αἰγίδα τῆς Ἀκαδημίας Καλῶν Τεχνῶν τῶν Παρισίων. Ἀντιταχθεὶς ὅμως μὲ περιφρονητικὴν ἄρνησιν εἰς τὴν παράλογον αὐτὴν ἀξίωσιν, εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἕδραν, τὴν ὁποίαν ἐπαξίως κατεῖχεν εἰς τὸ μέγα ἐκεῖνο ἵδρυμα.

370. Ἐνῷ ἡ ἔρις εὑρίσκετο εἰς τὴν ἀκμήν της, ὁ Desargues ἐπρότεινεν εἰς τὸν Curabelle ἑκατὸ χιλιάδας λίρας, ἐὰν κατώρθωνε ν' ἀποδείξῃ τὸ ἐσφαλμένον τῶν νέων μεθόδων ποὺ εἶχεν ἐπινοήσει. Ὁ Curabelle ἀπεδέχθη τὴν πρόσκλησιν, μειώνων φρονίμως τὸ ποσὸν εἰς τὸ μέτριον ὕψος τῶν ἑκατὸ πιστολῶν (περίπου χιλίων λιρῶν) καὶ τότε ὁ Desargues ἔγραψεν εἰς τὸν Bosse μίαν ἐπιστολὴν (25 Ἰουλίου 1657) μὲ τὴν ἐξουσιοδότησιν νὰ μετρήσῃ χιλίας λίρας εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ παρουσιάσῃ μεθόδους προοπτικῆς ἀπεικονίσεως καλυτέρας τῶν ἰδικῶν του. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιστολὴ κοινοποιηθεῖσα ἐπισήμως εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Καλῶν Τεχνῶν ἔλαβεν εὐρεῖαν δημοσιότητα. Ἀπόδειξις τούτου τὸ ἔργον La perspective affranchie (Ἡ προοπτικὴ χειραφετηθεῖσα Paris, 1661), γραφὲν ὑπὸ τοῦ P. Charles Bourgoing ἀκριβῶς «εἰς διεκδίκησιν τοῦ βραβείου τὸ ὁποῖον ἐπρότεινεν ὁ Desargues, ἄνθρωπος σοφὸς καὶ γενναιόδωρος». Τὸ ἔργον εἶναι ἀξιόλογον, διότι περιέχει μέγαν ἀριθμὸν κατασκευῶν ἀκριβείας, στηριζομένων εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ σημείου φυγῆς (point de concours), τὴν ὁποίαν ὁ Desargues εἶχεν ἀποφύγει. Διὰ τοῦτο εἰς ἓξ σημεῖα ἰσχυρίζετο

ὁ Bourgoing, ὅτι ἦτο φανερὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἰδικῶν του μεθόδων. Ἐὰν ἐν συνεχείᾳ τοῦ ἀπεδόθη ἢ ὄχι τὸ ἀναμενόμενον βραβεῖον μᾶς εἶναι ἄγνωστον. Εἶναι ὅμως ἐλάχιστα πιθανόν, διότι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος, καθ' ἣν στιγμὴν ὁ Desargues κατήρχετο εἰς τὸν τάφον καὶ ἤρχισε νὰ πυκνοῦται περὶ αὐτὸν ἡ σιωπὴ καὶ ἡ λήθη, ποὺ τόσον ἐζημίωσαν τὴν περαιτέρω πρόοδον τῆς γεωμετρίας. Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἡ ἅμιλλα, τὴν ὁποίαν προεκάλεσε, δὲν ὑπῆρξεν ἀνωφελὴς διὰ τὴν ἐπιστήμην, ὅπως καὶ τόσαι ἄλλαι, περὶ τῶν ὁποίων γίνεται νύξις εἰς τὰς σελίδας τῆς ἱστορίας μας.

371. Προτοῦ ἀφήσωμεν τὸν Desargues ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι οὗτος ἔστρεψε τὸ πνεῦμα του πρὸς δύο ἄλλα θέματα τῆς ἐφηρμοσμένης ἐπιστήμης, τὴν γνωμονικὴν καὶ τὴν λιθοτομίαν. Ὡς πρὸς τὴν ὑπ' αὐτοῦ προταθεῖσαν μέθοδον κατασκευῆς τῶν ἡλιακῶν ὡρολογίων, τίποτε δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ὅσα ἐγκωμιαστικὰ σχόλια τοῦ ἀφιερώνει ὁ Descartes εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne (28 Ἰανουαρίου 1641) ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς λήψεως τοῦ σχετικοῦ ὑπομνήματος τοῦ μαθηματικοῦ μας. Ὅσον ἀφορᾷ, ἐξ ἄλλου, τοὺς τρόπους τομῆς τῶν λαξευτῶν λίθων, εἰς τὸν Desargues ἀνήκει πράγματι ἡ τιμή, ὅτι πρῶτος προσεπάθησε νὰ θεμελιώσῃ τὰς σχετικὰς μεθόδους ἐπὶ θεωρητικῶν βάσεων. Ἂν καὶ εἰς αὐτὴν ἀκόμη τὴν περίπτωσιν περιωρίσθη νὰ καταστήσῃ γνωστὰς τὰς ἰδέας του ἐφ' ἑνὸς ἁπλοῦ παραδείγματος καί, ὅπερ χειρότερον, νὰ χρησιμοποιήσῃ κατὰ τὴν ἔκθεσιν ὁρολογίαν πρωτότυπον, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ μὴ ἀσκήσῃ καμμίαν εὐδιάκριτον ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ μηχανικοῦ, μολονότι ἀκόμη καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὁ Bosse ἐστάθη παρὰ τὸ πλευρόν του ὡς πιστὸς διερμηνεὺς τῶν ἰδεῶν του. Διὰ τὴν ἀποτυχίαν αὐτήν, ὑπάρχει λόγος νὰ λυπῆται κανείς, διότι ἡ ἀξία τῶν προτάσεων τοῦ Desargues καθίσταται προφανής, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἀναγνωρίσωμεν τὴν οὐσιαστικὴν ταυτότητα πολλῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὰς ἐν χρήσει σήμερον κατασκευάς, ὅταν διὰ τῆς συνήθους παραστατικῆς γεωμετρίας λύωνται προβλήματα σχετικὰ μὲ στερεὰς γωνίας καὶ πολύεδρα.

Ὅταν θὰ εἴπωμεν ἀκόμη, ὅτι εἰς τὸν Desargues ἀπαντῶνται ἐντυπωσιακαὶ νύξεις ἐπὶ τῆς κατασκευῆς ἀναγλύφων προοπτικῶν μὲ ἐφαρμογὴν τῶν ἀρχῶν τῆς στερεᾶς ὁμολογίας καὶ ὅτι εἰς αὐτὸν φαίνεται ἀνήκουσα ἡ τιμή, ὅτι πρῶτος διέγνωσε τὴν σκοπιμότητα τῆς διαμορφώσεως τῶν ὀδόντων εἰς τοὺς συμπλεκομένους τροχούς, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα ἐπικυκλοειδοῦς, θὰ ἔχωμεν συγκεντρώσει ἐπαρκῆ στοιχεῖα διὰ νὰ συμπεράνωμεν ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν Εὐρώπην, ὅπως εἰς τὴν Ἄπω Ἀνατολήν, ἦτο ἐν ἰσχύϊ τὸ σύστημα τῆς ἀπονομῆς τιμητικῶν τίτλων ἀκόμη καὶ εἰς πρόσωπα ἐκλιπόντα, εἰς τὸν Desargues θ' ἀπενέμετο ὁμοθύμως καὶ μετ' ἐγκωμίων ὁ βαθμὸς τοῦ «διδάκτορος μηχανικοῦ».

ΜΕΡΟΣ II: PASCAL

Βιογραφία τοῦ Pascal

372. Ὁ Blaise Pascal ἐγεννήθη εἰς Clermont τὴν 19ην Ἰουνίου 1623 ἀπὸ οἰκογένειαν ἀνήκουσαν εἰς ὑψηλὴν ἀστικὴν τάξιν· ὁ πατήρ του Στέφανος, ἀνώτερος κρατικὸς ὑπάλληλος καὶ ἄνθρωπος εὐρείας καὶ βαθείας παιδείας (ἦτο ἐντριβὴς ἐπίσης εἰς τὰ μαθηματικά), κατηύθυνε μὲ στοργὴν τὴν ἐκπαίδευσιν τοῦ υἱοῦ του. Ἐπιθυμῶν νὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ μίαν παιδείαν κατ' ἐξοχὴν ἀνθρωπιστικήν, τὸν ἀπέτρεψε ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὴν γεωμετρίαν. Ἀλλὰ ὁ Blaise, μαθὼν κατὰ τύχην ὅτι ἡ γεωμετρία σκοπὸν εἶχε τὴν κατασκευὴν ἀκριβῶν σχημάτων, ἐπέτυχε κατόπιν συνεχοῦς μελέτης ν' ἀνακαλύψῃ καὶ ν' ἀποδείξῃ ὅλας τὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι προηγοῦνται καὶ ὁδηγοῦν



BLAISE PASCAL

εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί. Τότε ὁ πατήρ του ἀπεφάσισε νὰ τοῦ δώσῃ πρὸς μελέτην τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ ἐπέτρεψε μάλιστα νὰ τὸν συνοδεύῃ εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς ἐκείνας συνεδριάσεις (§ 288), αἱ ὁποῖαι κατέληξαν εἰς τὴν ἵδρυσιν τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων.

Αἱ πρόοδοι, τὰς ὁποίας ἐσημείωσεν εἰς τὴν μελέτην τῆς γεωμετρίας, ὑπῆρξαν τόσον ταχεῖαι καὶ σημαντικαί, ὥστε εἰς ἡλικίαν μόλις 16 ἐτῶν ἀνεκάλυψε τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν, τὸ ὁποῖον δικαίως φέρει τὸ ὄνομά του. Ὀλίγον ἔπειτα, φλεγόμενος ἀπὸ τὴν ἐπιθυμίαν νὰ ἐλαφρύνῃ τοὺς κόπους τοῦ πατρός του, ὁ ὁποῖος ἦτο, ἐκ τῆς ὑπηρεσίας του, ὑποχρεωμένος νὰ ἐκτελῇ διαρκῶς μακρὰς προσθέσεις ἀριθμῶν, συνέλαβε τὴν ἰδέαν μιᾶς βοηθητικῆς μηχανῆς, τῆς ὁποίας ἡ κατασκευὴ τοῦ ἐστοίχισε τριῶν ἐτῶν ἐργασίαν καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἔλαβε προνόμιον εὑρεσιτεχνίας ὑπὸ χρονολογίαν 22 Μαΐου 1649 *.

Ἦτο 23 ἐτῶν, ὅταν, λαβὼν γνῶσιν τῶν ἐρευνῶν τοῦ Torricelli αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ βαρομέτρου, ἐπεδόθη εἰς μελέτας φυσικῆς, τῶν ὁποίων τὸ ἀποκορύφωμα εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς φυσικῆς ὡς «πείραμα τοῦ Puy - de - Dôme».

Μετ' ὀλίγον, ἐν τούτοις, ἐγκατέλειψε τὰς ἐπιστημονικὰς μελέτας διὰ νὰ λάβῃ ἐνεργὸν μέρος εἰς τὰς θρησκευτικὰς ἔριδας τῆς ἐποχῆς. Ἡ κατάστασις ὅμως τῆς ὑγείας του, ἡ ὁποία εἶχεν ἀρχίσει νὰ κλονίζεται κατὰ τρόπον ἀνησυχητικόν, τὸν ἠνάγκασε νὰ παραιτηθῇ ἀπὸ παντὸς εἴδους ἀπασχόλησιν καὶ νὰ ριφθῇ εἰς τὴν κοσμικὴν ζωήν, ἡ ὁποία ἀπὸ τότε ἦτο ζωηρὰ εἰς τοὺς Παρισίους. Ἡ ἐπάνοδός του εἰς μίαν ἀσκητικὴν διαβίωσιν, εἰς ἡλικίαν 31 ἐτῶν, συνδέεται μὲ ἕνα ἐπεισόδιον, τὸ ὁποῖον ὁ ἴδιος ἡρμήνευσεν ὡς οὐράνιον μήνυμα. Μίαν ἡμέραν ποὺ εὑρίσκετο ἐντὸς ἁμάξης συρομένης ἀπὸ τέσσαρα ἢ ἓξ ἄλογα, συνέβη, ἐνῷ διέβαινε τὴν γέφυραν τοῦ Neuilly, δύο ἀπὸ αὐτὰ ν' ἀφηνιάσουν αἰφνιδίως καὶ νὰ ὑπερπηδήσουν τὸ στηθαῖον τῆς γεφύρας μὲ κίνδυνον νὰ παρασύρουν καὶ τὰ ἄλλα καὶ τὴν ἅμαξαν·

* Ἡ αὐθεντικωτέρα περιγραφὴ τῆς ἀριθμομηχανῆς τοῦ Pascal εὑρίσκεται εἰς τὸν Τόμον IV (1735) τῆς συλλογῆς Machines et inventions approuvées par l' Académie des Sciences. Μία ἄλλη ἀπαντᾶται εἰς ἐπιστολὴν τοῦ Charles Bellair, γάλλου εὐπατρίδου, πρὸς τὸν Huygens ὑπὸ χρονολογίαν 4 Ἰουλίου 1659 (Oeuvres de C. Huygens, Τόμος II, σ. 426 - 29), περιλαμβάνουσα μάλιστα καὶ δύο ἐπεξηγηματικὰ σχήματα. Φαίνεται ὅτι τοῦ ἐν λόγῳ ἐργαλείου, ἀποκληθέντος «Pascaline», κατεσκευάσθησαν τότε πολλὰ ὑποδείγματα. Διότι ὁ ἴδιος ὁ Huygens ἠδυνήθη ν' ἀποκτήσῃ ἕνα, ὡς προκύπτει ἀπὸ ἐπιστολὴν τοῦ Bellair ὑπὸ χρονολογίαν 2 Ἰουλίου 1659 (Oeuvres de C. Huygens, Τομ. II, σ. 439). Τέσσαρα ἄλλα εὑρίσκονταί εἰς τὸ Ἀρχεῖον τῶν Μέτρων καὶ Σταθμῶν τῶν Παρισίων. Τὸ παράδειγμα τοῦ Pascal δὲν ἐβράδυνε νὰ εὕρῃ μιμητὰς εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ ἀλλαχοῦ. Τοῦτο ἀποδεικνύεται, πέραν τῶν ὅσων θὰ εἴπωμεν περὶ τοῦ Leibniz (§ 445), ἀπὸ τὰς ἀριθμομηχανὰς ποὺ κατεσκεύασεν ἕνα μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων, ὁ Claude Perrault (γεννηθεὶς εἰς Παρισίους τὸ 1613, καὶ ἀποθανὼν ἐκεῖ τὸν Ὀκτώβριον 1688), τοῦ ὁποίου ἀξιομνημόνευτον εἶναι τὸ ἔργον Recueil de plusieures machines (Paris, 1700) καὶ ὁ Samuel Morland (γεννηθεὶς εἰς Berkshire περὶ τὸ 1625, ἀποθανὼν εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Λονδίνου τὴν 30ὴν Δεκεμβρίου 1695), ὁ ὁποῖος, ἀπὸ τὸν Δεκέμβριον 1662 μέχρι τοῦ 1672, κατεσκεύαζε νέας ἀριθμομηχανὰς προσθέσεως καὶ ἐδημοσίευσε διαφόρους περιγραφάς των.

ἡ τύχη ἐβοήθησε νὰ κοποῦν τὰ ἡνία καὶ ν' ἀποσοβηθῇ τοιουτοτρόπως ὁ κίνδυνος τῆς δημιουργίας ἀνθρωπίνων θυμάτων. Ὁ Pascal, διὰ νὰ εὐχαριστήσῃ τὸν Θεὸν ποὺ ἐφείσθη τῆς ζωῆς του, ἀπεσύρθη ἀπὸ τὸν κόσμον καὶ μετέβη νὰ κατοικήσῃ εἰς τὸ διάσημον ἀββαεῖον τοῦ Port - Royal.

Εἰς ἡλικίαν περίπου 35 ἐτῶν, ἡ ἤδη ἀσταθὴς ὑγεία του ἐχειροτέρευσεν εἰς βαθμὸν ἀνησυχητικόν. Κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς νυκτός, ὑποφέρων ἀπὸ ἰσχυρὸν ὀδοντόπονον καὶ μὴ δυνάμενος νὰ κοιμηθῇ, εὗρε διέξοδον εἰς τὴν μελέτην τῶν ἰδιοτήτων τῆς κυκλοειδοῦς καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν θαυμασίων ἐκείνων ἀποτελεσμάτων, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον. Ἀλλ' ὅπως προκύπτει ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Fermat (10 Αὐγούστου 1660), εἰς τὴν γεωμετρίαν κατέφευγεν ἀπὸ λόγους ἀρχῆς*. Ἀπέθανε τὴν 19ην Αὐγούστου 1662 καὶ ἐτάφη εἰς τὴν ἐκκλησίαν τοῦ Saint - Etienne τοῦ Mont, ὅπου τὰ λείψανά του ἀναπαύονται μέχρι σήμερον.

373. Ὁ Πασκὰλ ὡς μαθηματικὸς δὲν ἦτο ἄνθρωπος τῆς ἐποχῆς του· δὲν κατενόησε τὴν ραγδαίαν ἐξέλιξιν, ποὺ ἐπεφυλάσσετο εἰς τὴν ἄλγεβραν τοῦ Viète καὶ τὴν γεωμετρίαν τοῦ Descartes, καὶ δὲν κατεδέχθη ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὰ προβλήματα, ποὺ ἀπησχόλουν τότε ζωηρῶς τοὺς μαθηματικούς, μεγάλους καὶ μικρούς. Καὶ ἐπειδὴ δὲν υἱοθέτησε τὸ ἀξιέπαινον σύστημα ν' ἀναφέρῃ μὲ ἀκρίβειαν τὰς πηγάς του, εἶναι δύσκολον νὰ προσδιορίσωμεν ἀπὸ ποίους ἐνεπνεύσθη καὶ ἤντλησεν.

Πολεμιστὴς πρώτης τάξεως, ἔθεσε τὰς πνευματικάς του δυνάμεις εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς θρησκείας, καταπολεμῶν τοὺς Ἰησουΐτας διὰ κειμένων, τὰ ὁποῖα παρέμειναν μέχρι σήμερον περίφημα καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ γαλλικὴ γλῶσσα ἤγγισε τὰ ὅρια τῆς μεγίστης τελειότητός της. Δὲν εἶναι βέβαια καθῆκον μας νὰ περιγράψωμεν ἐδῶ τὴν πλευρὰν αὐτῆς τῆς δραστηριότητος τοῦ Pascal. Χρεωστοῦμεν ὅμως νὰ σημειώσωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν καταλειφθέντων χειρογράφων του εὑρέθησαν δύο ἀποσπάσματα τιτλοφορούμενα ἀντιστοίχως : De l' esprit géométrique (Περὶ τοῦ γεωμετρικοῦ πνεύματος) καὶ De l' art de persuader (Περὶ τῆς τέχνης τοῦ πείθειν), τὰ ὁποῖα ἀξίζουν νὰ ἐφελκύσουν τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν. Εἰδικῶς εἰς τὸ δεύτερον περιέχονται μερικοὶ κανόνες, τοὺς ὁποίους πρέπει, κατὰ τὸν Pascal, ν' ἀκολουθῇ ὁ γεωμέτρης καὶ οἱ ὁποῖοι μετὰ πάροδον τριῶν αἰώνων, τίποτε δὲν ἔχασαν ἐκ τῆς ἀξίας των. Ἀξίζει ἑπομένως τὸν κόπον νὰ τοὺς ἀναφέρωμεν :

---

* «Διότι», γράφει ἐκεῖ, «διὰ νὰ σᾶς ὁμιλήσω εἰλικρινῶς περὶ τῆς γεωμετρίας, τὴν θεωρῶ ὡς τὴν ὑψηλοτέραν ἄσκησιν τοῦ πνεύματος. Συγχρόνως ὅμως τὴν θεωρῶ τόσον ἀνωφελῆ, ὥστε μικρὰν εὑρίσκω διαφορὰν μεταξὺ ἑνὸς ἀνθρώπου ποὺ δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ γεωμέτρης καὶ ἑνὸς ἐπιδεξίου τεχνίτου. Τὴν θεωρῶ ἐπίσης τὸ ὡραιότερον ἐπάγγελμα τοῦ κόσμου, ἀλλὰ δὲν εἶναι πάντως παρὰ ἕνα ἐπάγγελμα».

Κανόνες διὰ τοὺς ὁρισμούς: Ι. Μὴ ἐπιχειρεῖτε νὰ ὁρίσετε πράγματα, τόσον γνωστὰ ἀφ' ἑαυτῶν, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχουν λέξεις ἁπλούστεραι πρὸς ὁρισμόν των, ΙΙ. Μὴ ἀφίνετε χωρὶς ὁρισμὸν κανένα ὅρον σκοτεινὸν ἢ ἀμφίσημον, ΙΙΙ. Μὴ χρησιμοποιεῖτε εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν παρὰ μόνον λέξεις ἐντελῶς γνωστὰς ἢ τῶν ὁποίων ἔχει ἤδη δοθῆ ἡ σημασία.

Κανόνες διὰ τὰ ἀξιώματα: Ι. Μὴ παραλείπετε καμμίαν ἐκ τῶν ἀναγκαίων ἀρχῶν, ὅσον καθαρὰ καὶ προφανὴς καὶ ἂν φαίνεται, χωρὶς νὰ ἐξετάσετε προηγουμένως, ἂν ἡ παράλειψις ἔχῃ συνεπείας, ΙΙ. Μὴ ἐπικαλεῖσθε ὡς ἀξιώματα παρὰ μόνον πράγματα ἀφ' ἑαυτῶν φανερά.

Κανόνες διὰ τὰς ἀποδείξεις: Ι. Μὴ ἔχετε τὴν ἀξίωσιν ν' ἀποδείξητε πράγματα ἀφ' ἑαυτῶν τόσον φανερά, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ τίποτε ἁπλούστερον, διὰ νὰ ληφθῇ ὡς ἀποδεικτικὸς λόγος, ΙΙ. Ἀποδεικνύετε ὅλας τὰς προτάσεις ποὺ δὲν εἶναι προφανεῖς, χρησιμοποιοῦντες εἰς τὰς ἀποδείξεις μόνον ἀξιώματα φανερὰ καὶ προτάσεις ἀποδεδειγμένας ἢ παραδεδεγμένας, ΙΙΙ. Ἀντικαθιστᾶτε πνευματικῶς πάντοτε τὰ πράγματα μὲ τοὺς ὁρισμούς των, ἀποφεύγοντες τὴν χρῆσιν ἀπατηλῶν ὅρων εἰς τοὺς ὁρισμούς.

Ὁ Pascal προσθέτει, δικαίως, ὅτι δὲν ἀποτελεῖ σοβαρὸν ἁμάρτημα ἡ μὴ τήρησις τῶν πρώτων κανόνων ἑκάστης ὁμάδος.

Ὁ Pascal καὶ ἡ θεωρία τῶν κωνικῶν τομῶν

374. Ὁ Pascal, ὅπως εἴδομεν, ἐσύχναζε μὲ τὸν πατέρα του εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς συνεδριάσεις, ποὺ ἐλάμβανον χώραν εἰς τὸ κελλίον τοῦ Mersenne, ὅπου τοῦ ἐδόθη ἡ εὐκαιρία νὰ γνωρίσῃ καὶ νὰ πλησιάσῃ τὸν Desargues καὶ ν' ἀκούσῃ τὰς πρωτοτύπους γεωμετρικάς του ἰδέας. Ἐξ αὐτῶν ἐνεπνεύσθη μερικὰ νέα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἐδημοσίευσε τὸ 1640 εἰς ἕνα φυλλάδιον τιτλοφορούμενον Essay pour les coniques (Δοκίμιον ἐπὶ τῶν Κωνικῶν) καὶ τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι γνωστὰ σήμερον παρὰ δύο ἀντίτυπα.

Ὁ Descartes, ὅταν ἔλαβεν ἐκ μέρους τοῦ Mersenne τὴν ἐργασίαν αὐτὴν τοῦ Pascal, ἔσπευσε νὰ δηλώσῃ (ἐπιστολὴ 1ης Ἀπριλίου 1640), ὅτι ἐπρόκειτο περὶ μιᾶς ἐφαρμογῆς τῶν μεθόδων ποὺ εἶχεν ἐπινοήσει ὁ πνευματώδης ἀρχιτέκτων τῆς Λυών. Ἐξ ἄλλου ὁ ἴδιος ὁ Pascal εἶχεν ἀναγνωρίσει τοῦτο, ὅταν, ἐν συνεχείᾳ τῆς ἐκφωνήσεως ἑνὸς θεωρήματος, ἔγραφεν ὅτι «ὁ πρῶτος ἐφευρέτης εἶναι ὁ ἐκ Λυὼν Desargues, ἕνα ἀπὸ τὰ μεγάλα πνεύματα τῆς ἐποχῆς καὶ ἀπὸ τὰ πλέον ἐγκρατῆ εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ μεταξὺ ἄλλων εἰς τὰς κωνικὰς τιμάς, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, ἂν καὶ ὀλίγα τὸν ἀριθμόν, παρέχουν ἀδιάψευστον περὶ αὐτοῦ τεκμήριον εἰς ὅσους θὰ ἐπιθυμήσουν νὰ ἐγκύψουν εἰς τὴν μελέτην των. Καὶ

Κανόνες διὰ τοὺς ὁρισμούς: Ι. Μὴ ἐπιχειρεῖτε νὰ ὁρίσετε πράγματα, τόσον γνωστὰ ἀφ' ἑαυτῶν, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχουν λέξεις ἁπλούστεραι πρὸς ὁρισμόν των, II. Μὴ ἀφίνετε χωρὶς ὁρισμὸν κανένα ὅρον σκοτεινὸν ἢ ἀμφίσημον, III. Μὴ χρησιμοποιεῖτε εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν παρὰ μόνον λέξεις ἐντελῶς γνωστὰς ἢ τῶν ὁποίων ἔχει ἤδη δοθῆ ἡ σημασία.

Κανόνες διὰ τὰ ἀξιώματα: Ι. Μὴ παραλείπετε καμμίαν ἐκ τῶν ἀναγκαίων ἀρχῶν, ὅσον καθαρὰ καὶ προφανὴς καὶ ἂν φαίνεται, χωρὶς νὰ ἐξετάσετε προηγουμένως, ἂν ἡ παράλειψις ἔχῃ συνεπείας, II. Μὴ ἐπικαλεῖσθε ὡς ἀξιώματα παρὰ μόνον πράγματα ἀφ' ἑαυτῶν φανερά.

Κανόνες διὰ τὰς ἀποδείξεις: Ι. Μὴ ἔχετε τὴν ἀξίωσιν ν' ἀποδείξητε πράγματα ἀφ' ἑαυτῶν τόσον φανερά, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ τίποτε ἁπλούστερον, διὰ νὰ ληφθῆ ὡς ἀποδεικτικὸς λόγος, II. Ἀποδεικνύετε ὅλας τὰς προτάσεις ποὺ δὲν εἶναι προφανεῖς, χρησιμοποιοῦντες εἰς τὰς ἀποδείξεις μόνον ἀξιώματα φανερὰ καὶ προτάσεις ἀποδεδειγμένας ἢ παραδεδεγμένας, III. Ἀντικαθιστᾶτε πνευματικῶς πάντοτε τὰ πράγματα μὲ τοὺς ὁρισμούς των, ἀποφεύγοντες τὴν χρῆσιν ἀπατηλῶν ὅρων εἰς τοὺς ὁρισμούς.

Ὁ Pascal προσθέτει, δικαίως, ὅτι δὲν ἀποτελεῖ σοβαρὸν ἁμάρτημα ἡ μὴ τήρησις τῶν πρώτων κανόνων ἑκάστης ὁμάδος.

Ὁ Pascal καὶ ἡ θεωρία τῶν κωνικῶν τομῶν

374. Ὁ Pascal, ὅπως εἴδομεν, ἐσύχναζε μὲ τὸν πατέρα του εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς συνεδριάσεις, ποὺ ἐλάμβανον χώραν εἰς τὸ κελλίον τοῦ Mersenne, ὅπου τοῦ ἐδόθη ἡ εὐκαιρία νὰ γνωρίσῃ καὶ νὰ πλησιάσῃ τὸν Desargues καὶ ν' ἀκούσῃ τὰς πρωτοτύπους γεωμετρικάς του ἰδέας. Ἐξ αὐτῶν ἐνεπνεύσθη μερικὰ νέα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἐδημοσίευσε τὸ 1640 εἰς ἕνα φυλλάδιον τιτλοφορούμενον Essay pour les coniques (Δοκίμιον ἐπὶ τῶν Κωνικῶν) καὶ τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι γνωστὰ σήμερον παρὰ δύο ἀντίτυπα.

Ὁ Descartes, ὅταν ἔλαβεν ἐκ μέρους τοῦ Mersenne τὴν ἐργασίαν αὐτὴν τοῦ Pascal, ἔσπευσε νὰ δηλώσῃ (ἐπιστολὴ 1ης Ἀπριλίου 1640), ὅτι ἐπρόκειτο περὶ μιᾶς ἐφαρμογῆς τῶν μεθόδων ποὺ εἶχεν ἐπινοήσει ὁ πνευματώδης ἀρχιτέκτων τῆς Λυών. Ἐξ ἄλλου ὁ ἴδιος ὁ Pascal εἶχεν ἀναγνωρίσει τοῦτο, ὅταν, ἐν συνεχείᾳ τῆς ἐκφωνήσεως ἑνὸς θεωρήματος, ἔγραφεν ὅτι «ὁ πρῶτος ἐφευρέτης εἶναι ὁ ἐκ Λυὼν Desargues, ἕνα ἀπὸ τὰ μεγάλα πνεύματα τῆς ἐποχῆς καὶ ἀπὸ τὰ πλέον ἐγκρατῆ εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ μεταξὺ ἄλλων εἰς τὰς κωνικὰς τιμάς, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, ἂν καὶ ὀλίγα τὸν ἀριθμόν, παρέχουν ἀδιάψευστον περὶ αὐτοῦ τεκμήριον εἰς ὅσους θὰ ἐπιθυμήσουν νὰ ἐγκύψουν εἰς τὴν μελέτην των. Καὶ

θὰ προσθέσω, ὅτι ὀφείλω αὐτὰ τὰ ὀλίγα εὑρήματα, ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, εἰς τὰ ἔργα του καὶ ὅτι προσεπάθησα νὰ μιμηθῶ ὅσον μοῦ ἦτο δυνατὸν τὴν μέθοδόν του».

Τὸ Essay ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 ὁρισμούς, 3 λήμματα καὶ 5 θεωρήματα, χωρὶς καμμίαν ἀπόδειξιν. Τὸ Λῆμμα I δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ περίφημον «μυστικὸν ἑξάγραμμον», ἐνῷ τὸ IV (ἐκεῖνο ἀκριβῶς ποὺ ἀκολουθεῖται ἀπὸ τὴν προαναφερθεῖσαν δήλωσιν) βεβαιώνει, ὅτι εὑρίσκονται ἐν ἐνελίξει τὰ ἓξ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τυχοῦσα διατέμνουσα τέμνει μίαν κωνικὴν καὶ τὰ ζεύγη ἀντικειμένων πλευρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου· εἶναι τὸ θεώρημα ποὺ φέρει τὸ ὄνομα τοῦ Desargues.

375. Τὰ ἐγκώμια, τὰ ὁποῖα ἐδέχθη ὁ νεαρὸς συγγραφεύς, ἐξ ἀφορμῆς τοῦ ἔργου τούτου, τὸν ἐνεθάρρυναν εἰς τὸ νὰ ἐπιχειρήσῃ νὰ τὸ συμπληρώσῃ, μεταβάλλων αὐτὸ εἰς μίαν πραγματείαν περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἔγραψε πράγματι μερικὰ μέρη τῆς πραγματείας αὐτῆς, ἀλλὰ δὲν τὴν ἔφερεν εἰς πέρας. Αἱ μοναδικαὶ πληροφορίαι, τὰς ὁποίας ἔχομεν σχετικῶς, ὀφείλονται εἰς τὸν Leibniz, ὁ ὁποῖος τὸ 1675, παρακινούμενος ἀπὸ τὸν Oldenburg, ἐπέτυχε νὰ ἔλθῃ εἰς σχέσεις μὲ τὸν Stefan Périer, ἀνεψιὸν τοῦ Pascal καὶ θεματοφύλακα ὅλων τῶν χειρογράφων του, καὶ νὰ λάβῃ δι' ἐπικοινωνίας ὅ,τι ἀνεφέρετο εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Ἐπιστρέφων τὰ χειρόγραφα ὁ Leibniz (30 Αὐγούστου 1676) ἐθεώρησε καλὸν νὰ τὰ συνοδεύσῃ μὲ μίαν πολύτιμον ἐπιστολήν, ὅπου ταξινομοῦνται λογικῶς τὰ ἐκτιθέμενα ἀποτελέσματα καὶ προστίθεται ἡ συμβουλὴ νὰ τὰ δημοσιεύσῃ ὑπὸ μορφὴν πραγματείας, διῃρημένης εἰς ἓξ βιβλία:

I. Γένεσις τῶν κωνικῶν τομῶν· χορδαὶ καὶ ἐφαπτόμεναι. II. Μυστικὸν ἑξάγραμμον (ὡς θεμέλιον τῶν ἀκολούθων). III. Περὶ τῶν τεσσάρων ἐφαπτομένων καὶ τῶν εὐθειῶν ποὺ ἑνώνουν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ὁπόθεν ἀπορρέουν αἱ ἰδιότητες τῶν ἁρμονικῶς διαιρουμένων εὐθειῶν. IV. Προτάσεις μεταξὺ τμημάτων ὁριζομένων ἐπὶ ἐφαπτομένων καὶ χορδῶν. V. Ἐπαφαὶ κωνικῶν. VI. Περὶ τοῦ στερεοῦ τόπου, τουτέστιν τοῦ προβλήματος τῶν τριῶν ἢ τεσσάρων εὐθειῶν.

Τὸ περιεχόμενον τῶν ἄλλων διεσπαρμένων φύλλων θὰ ἦτο δυνατὸν κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Leibniz, νὰ συγκεντρωθῇ εἰς ἕνα τόμον ὑπὸ τὸν τίτλον: «De restitutione coni», ἀφοῦ σκοπός των εἶναι ὁ προσδιορισμὸς μιᾶς κωνικῆς τομῆς ἐπὶ τῇ βάσει διαμέτρων ἢ παραμέτρων. Διότι, ὅπως ἐδήλωσεν, ἐὰν ἐβράδυνεν ἡ δημοσίευσις τοῦ ἔργου τοῦ Πασκάλ, τοῦτο θὰ ἔχανε τὴν ἀξίαν του, λόγῳ τῆς ἐμφανίσεως ἄλλων (ὑπονοῶν τὰ τοῦ Hire). Παρὰ ταῦτα ὁ Périer δὲν ἠκολούθησε τὴν προτροπὴν τοῦ Leibniz (ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἦτο τότε νέος καὶ δὲν διέθετε ἀνάλογον κῦρος), θεωρῶν ὅτι ἡ δημοσίευσις τοῦ ἔργου ἐκείνου δὲν ἐπρόκειτο νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν

αὔξησιν τῆς φήμης τοῦ διασήμου θείου του. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὅτι, ἐκ τῶν ἔργων τοῦ Pascal ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν, δὲν ἀπομένει πλέον σήμερον τίποτε ἄλλο παρὰ τὸ μικροσκοπικὸν ἐκεῖνο Essay.

Παρ' ὅλας τὰς μεταπτώσεις τῶν πνευματικῶν προσανατολισμῶν τοῦ Pascal, φαίνεται ὅτι οὐδέποτε ἀπεσπάσθη ἐντελῶς τῆς γεωμετρίας, διότι εἰς αὐτὴν ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν ἐπέστρεφε. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Fermat (29 Ἰουλίου 1654), ὅπου ἀπαντῶνται αἱ διατυπώσεις δύο ἀναλόγων προβλημάτων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸν χῶρον, τὰ ὁποῖα, λέγει, ἔλυσε «πλήρως», ἀλλὰ δὲν κατόρθωσε ν' ἀποδείξῃ τὸ ἀποτέλεσμα, χωρὶς νὰ καταφύγῃ εἰς τὴν χρῆσιν παραβολῶν καὶ ὑπερβολῶν *.

Ἀριθμητικὰ ἔργα τοῦ Pascal

376. Ἡ πραγματεία του ἐπὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ τριγώνου (Traité du triangle arithmétique) φέρεται εἰς τὰ κατάλοιπα τοῦ Pascal ὡς τυπωθεῖσα τὸ 1654, εἰς τὴν δημοσιότητα ὅμως ἐδόθη πράγματι τὸ 1665. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα μέρος θεωρητικὸν καὶ ἕνα μέρος ἐφαρμογῶν.

Εἰς τὸ πρῶτον ἐκτίθενται ἡ γένεσις καὶ αἱ ἰδιότητες ἑνὸς ἀριθμητικοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς κινέζικα ἔργα (Τόμος I, § 127) καὶ κατόπιν εἰς γερμανικὰ (Stiefel, Rudolff, Apianus) καὶ ἰταλικὰ (Tartaglia). Ἡ διάταξις ἡ δοθεῖσα εἰς αὐτὸ ὑπὸ τοῦ Pascal (σχ. 27: εἰς τὴν εἰκόνα ἀφῃρέθησαν τὰ ἑλληνικὰ γράμματα, ποὺ εἶχε τοποθετήσει πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ἀποδείξεων) διαφέρει ἐκείνης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται εἰς τοὺς ἄλλους συγγραφεῖς, διστάζομεν ὅμως νὰ τὴν χαρακτηρίσωμεν ὡς προτιμοτέραν τῆς διατάξεως ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ τελευταῖοι.

Ὁ Pascal, κατὰ τὴν συνήθειάν του, δὲν ἀναφέρει κανένα ἐκ τῶν προγενεστέρων, εἶναι ὅμως πιθανὸν ὅτι παρέλαβε τὸ σχῆμα τοῦτο ἀπὸ τὸν Hérigone. Ὅπως καὶ ἂν ἔχῃ τὸ ζήτημα, ἀσφαλῶς δὲν εἶναι ἐπιτυχὴς ὁ χαρακτηρισμὸς τοῦ σχήματος μὲ τὸ ὄνομα «τρίγωνον τοῦ Pascal», ποὺ δίδουν μερικοὶ εἰς αὐτό, ἢ μὲ τὸ ὄνομα «τρίγωνον τοῦ Tartaglia» ποὺ χρησιμοποιοῦν ἄλλοι. Προτιμότερον εἶναι νὰ χαρακτηρίζεται, ἔστω κάπως ἀορίστως, μὲ τὸ ὄνομα «ἀριθμητικὸν τρίγωνον», τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποίει καὶ ὁ Pascal.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου, χρησιμοποιεῖ ὁ Pascal ἀναδρομικὴν μέθοδον, δυνάμει τῆς σχέσεως:

$$C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1} \qquad (1)$$

* Ἡ ἐκφώνησις τοῦ στερεομετρικοῦ προβλήματος, ἔχει ὡς ἑξῆς: «Ἐκ 4 ἐπιπέδων, 4 σημείων καὶ 4 σφαιρῶν, δοθέντων τεσσάρων οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν δοθεισῶν σφαιρῶν, νὰ διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων σημείων ν' ἀφίνῃ δ' ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων σφαιρικὰ τμήματα δεχόμενα δοθείσας γωνίας».

αὔξησιν τῆς φήμης τοῦ διασήμου θείου του. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὅτι, ἐκ τῶν ἔργων τοῦ Pascal ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν, δὲν ἀπομένει πλέον σήμερον τίποτε ἄλλο παρὰ τὸ μικροσκοπικὸν ἐκεῖνο Essay.

Παρ' ὅλας τὰς μεταπτώσεις τῶν πνευματικῶν προσανατολισμῶν τοῦ Pascal, φαίνεται ὅτι οὐδέποτε ἀπεσπάσθη ἐντελῶς τῆς γεωμετρίας, διότι εἰς αὐτὴν ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν ἐπέστρεφε. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Fermat (29 Ἰουλίου 1654), ὅπου ἀπαντῶνται αἱ διατυπώσεις δύο ἀναλόγων προβλημάτων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸν χῶρον, τὰ ὁποῖα, λέγει, ἔλυσε «πλήρως», ἀλλὰ δὲν κατόρθωσε ν' ἀποδείξῃ τὸ ἀποτέλεσμα, χωρὶς νὰ καταφύγῃ εἰς τὴν χρῆσιν παραβολῶν καὶ ὑπερβολῶν *.

Ἀριθμητικὰ ἔργα τοῦ Pascal

376. Ἡ πραγματεία του ἐπὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ τριγώνου (Traité du triangle arithmétique) φέρεται εἰς τὰ κατάλοιπα τοῦ Pascal ὡς τυπωθεῖσα τὸ 1654, εἰς τὴν δημοσιότητα ὅμως ἐδόθη πράγματι τὸ 1665. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα μέρος θεωρητικὸν καὶ ἕνα μέρος ἐφαρμογῶν.

Εἰς τὸ πρῶτον ἐκτίθενται ἡ γένεσις καὶ αἱ ἰδιότητες ἑνὸς ἀριθμητικοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς κινέζικα ἔργα (Τόμος I, § 127) καὶ κατόπιν εἰς γερμανικὰ (Stiefel, Rudolff, Apianus) καὶ ἰταλικὰ (Tartaglia). Ἡ διάταξις ἡ δοθεῖσα εἰς αὐτὸ ὑπὸ τοῦ Pascal (σχ. 27: εἰς τὴν εἰκόνα ἀφῃρέθησαν τὰ ἑλληνικὰ γράμματα, ποὺ εἶχε τοποθετήσει πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ἀποδείξεων) διαφέρει ἐκείνης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται εἰς τοὺς ἄλλους συγγραφεῖς, διστάζομεν ὅμως νὰ τὴν χαρακτηρίσωμεν ὡς προτιμοτέραν τῆς διατάξεως ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ τελευταῖοι.

Ὁ Pascal, κατὰ τὴν συνήθειάν του, δὲν ἀναφέρει κανένα ἐκ τῶν προγενεστέρων, εἶναι ὅμως πιθανὸν ὅτι παρέλαβε τὸ σχῆμα τοῦτο ἀπὸ τὸν Hérigone. Ὅπως καὶ ἂν ἔχῃ τὸ ζήτημα, ἀσφαλῶς δὲν εἶναι ἐπιτυχὴς ὁ χαρακτηρισμὸς τοῦ σχήματος μὲ τὸ ὄνομα «τρίγωνον τοῦ Pascal», ποὺ δίδουν μερικοὶ εἰς αὐτό, ἢ μὲ τὸ ὄνομα «τρίγωνον τοῦ Tartaglia» ποὺ χρησιμοποιοῦν ἄλλοι. Προτιμότερον εἶναι νὰ χαρακτηρίζεται, ἔστω κάπως ἀορίστως, μὲ τὸ ὄνομα «ἀριθμητικὸν τρίγωνον», τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποίει καὶ ὁ Pascal.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου, χρησιμοποιεῖ ὁ Pascal ἀναδρομικὴν μέθοδον, δυνάμει τῆς σχέσεως :

$$C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1} \qquad (1)$$

* Ἡ ἐκφώνησις τοῦ στερεομετρικοῦ προβλήματος, ἔχει ὡς ἑξῆς : «Ἐκ 4 ἐπιπέδων, 4 σημείων καὶ 4 σφαιρῶν, δοθέντων τεσσάρων οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν δοθεισῶν σφαιρῶν, νὰ διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων σημείων ν' ἀφίνῃ δ' ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων σφαιρικὰ τμήματα δεχόμενα δοθείσας γωνίας».

Ὁ Pascal πρῶτος παρετήρησεν, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ σχέσις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τυχόντος ἀριθμοῦ. Μεταξὺ τῶν ἀποδεικνυομένων προτάσεων σημειοῦμεν τὴν ἐκφραζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{C_{m,\,n}}{C_{m,\,n-1}} = \frac{m-n+1}{n}, \qquad (2)$$

ἡ ὁποία ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Pascal διὰ πρώτην φοράν, δὲν ἦτο ὅμως ἄγνωστος εἰς τὸν Fermat.

Σχ. 27

Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ εἰς ἄλλας, ὁ Pascal χρησιμοποιεῖ, κατὰ χαρακτηριστικὴν προτίμησιν καὶ ἀδιαφιλονίκητον ἐπιτηδειότητα, τὴν «μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς», ἡ ὁποία διαφαίνεται μὲν εἰς μερικὰς σελίδας τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ πιθανώτερον εἶναι ὅτι τὴν ὕπαρξίν της ἐγνώρισεν εἰς μερικὰ ἔργα τοῦ Μαυρολύκου. Καὶ ἐδῶ ἡ ἔλλειψις ἀναφορῶν εἰς τὰς πηγὰς δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς πρωτοτυπίας τοῦ συγγραφέως. Τόσον εἰς αὐτό, ὅσον καὶ εἰς τὰ λοιπὰ ἔργα του, ὁ Pascal δὲν χρησιμοποιεῖ σύμβολα, οὔτε συντμήσεις, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παρέχῃ τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ἐποχήν, ποὺ ἡ ἄλγεβρα εἰσῆλθε πλέον ὁριστικῶς εἰς τὸ συμβολικὸν στάδιον τῆς ἐξελίξεώς της, οὔτε κἂν εἰς τὴν ἐποχήν, καθ' ἣν εἶχεν υἱοθετήσει τὴν συντετμημένην μορφὴν

ἐκφράσεως, ἀλλὰ εἰς τὴν πρώτην περίοδον τῆς ἐκκολάψεώς της μὲ τὸ «ρητορικὸν στύλ».

377. Τὸ ἀριθμητικὸν τρίγωνον ὁ Pascal ἐφαρμόζει κατ' ἐξοχὴν εἰς ζητήματα, ποὺ τοῦ προσφέρουν τὰ τυχηρὰ παιγνίδια. Τοῦ ἐδόθη δὲ ἀφορμὴ ν' ἀσχοληθῇ μὲ αὐτὰ τὴν ἐποχὴν ποὺ διῆγε ζωὴν κοσμικήν, κατόπιν προτροπῆς τοῦ ἱππότου de Méré, φανατικοῦ παίκτου, διαθέτοντος δὲ κάποιαν μικρὰν ἐνημερότητα εἰς τὰ μαθηματικά. Τὰ προβλήματα αὐτὰ χωρίζονται εἰς δύο τύπους : τὸ «πρόβλημα τῶν παρτίδων» καὶ «τὸ πρόβλημα τῶν κύβων». Τὸ πρῶτον, ὑπὸ τὴν γενικωτέραν του μορφήν, ἐκφωνεῖται ὡς ἑξῆς : ἕνας ἀριθμὸς προσώπων παίζουν μὲ τὸν σκοπὸν ν' ἀναδειχθῇ νικητὴς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος πρῶτος θὰ κερδίσῃ ὡρισμένον ἀριθμὸν παρτίδων, τῆς πιθανότητος νίκης οὔσης δι' ὅλους τοὺς παίκτας τῆς αὐτῆς. Κατά τινα στιγμὴν θέλουν νὰ διακόψουν τὸ παίγνιον καὶ διαπιστώνουν, ὅτι ἕκαστος ἔχει ἤδη ὑπὲρ αὐτοῦ ἕνα ἀριθμὸν κερδηθεισῶν παρτίδων. Ἐρωτᾶται : κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ τῶν παικτῶν τὸ κατατεθειμένον ποσὸν τῆς πόστας; Διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν δύο παικτῶν, ἐδοκίμασαν νὰ εὕρουν λύσιν, χωρὶς ἐπιτυχίαν, οἱ Pacioli, Cardano καὶ Tartaglia. Ἐπιτυχῶς ἔλυσαν τὸ πρόβλημα οἱ Fermat καὶ Pascal, ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, ἀλλὰ μὲ ἀποτελέσματα συμπίπτοντα.

Τὸ ἄλλο πρόβλημα, ἐπίσης ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν του μορφήν, συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς πιθανότητος νὰ ἐπιτύχωμεν, μὲ δύο κύβους, δύο ἑξάδας, μὲ τρεῖς κύβους, τρεῖς ἑξάδας κ.ο.κ. Πότε ἀκριβῶς ὁ Pascal ἤρχισε νὰ σκέπτεται ἐπὶ τοῦ θέματος δὲν εἶναι γνωστόν, διότι ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του μὲ τὸν Fermat μικρὸν μόνον μέρος γνωρίζομεν. Ἀρχίζει μὲ μίαν ἀπάντησιν τοῦ τελευταίου πρὸς τὸν Pascal (1654) καὶ τελειώνει μὲ μίαν ἐπιστολὴν τούτου πρὸς τὸν Fermat (27 Ὀκτωβρίου 1654). Ἡ ἀπότομος αὐτὴ διακοπὴ δὲν πρέπει νὰ προκαλέσῃ ἔκπληξιν, καθ' ὅσον συμπίπτει μὲ τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Pascal ἐγκατέλειψε προσωρινῶς τὰς ἐπιστημονικάς του ἀπασχολήσεις, διὰ ν' ἀναμιχθῇ εἰς τὰς θεολογικὰς ἔριδας.

Εἰς τὰς ἀναφερθείσας ἐπιστολὰς ὁ Pascal ἐμφανίζεται μᾶλλον ὡς ὑποβολεὺς προβλημάτων παρὰ ὡς λύτης προταθέντων προβλημάτων. Ὁ ἱστορικὸς ὅμως τῶν μαθηματικῶν εὑρίσκει ἐδῶ καὶ ἐκεῖ πράγματα ποὺ δύνανται νὰ τὸν ἐνδιαφέρουν· π.χ. ἐκ τῆς ἐπιστολῆς 29ης Ἰουλίου 1654 προκύπτει ὅτι ὁ Pascal ἐγνώριζε τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία σήμερον γράφεται:

$$2^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \cdot$$

Μίαν ἄλλην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ τριγώνου ἔκαμεν ὁ Pascal εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων ἑνὸς διωνύμου. Τὸ πρόβλημα

εἶχε λυθῆ προηγουμένως (ὑπὸ τοῦ Tartaglia, ἂν μὴ ὑπὸ ἄλλου) καὶ συνεπῶς αἱ ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου γραφεῖσαι σελίδες του δὲν τοῦ αὐξάνουν αἰσθητῶς τὴν δόξαν.

Συνεχίζοντες τὴν ἐξέτασιν τῶν ἔργων του ἐκείνων ὅπου παίζει κάποιον ρόλον τὸ ἀριθμητικὸν τρίγωνον, ἀπαντῶμεν μίαν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν διδάσκεται ἕνας τρόπος ἐξαγωγῆς τῆς ρίζης οἱασδήποτε τάξεως, ὁ ὁποῖος ὅμως λόγῳ τῆς μικρᾶς πρακτικῆς του ἀξίας δὲν κατέλαβε μόνιμον θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην. Σημαντικώτερον εἶναι ἕνα ὑπόμνημα ἀφιερωμένον εἰς ἐφαρμογὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ τριγώνου εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνδυασμῶν. Ἀφορμᾶται ἐκεῖ ἀπὸ τέσσαρα λήμματα, τὰ ὁποῖα, μὲ σημερινὰ σύμβολα, ἐκφράζονται διὰ τῶν τύπων:

$$C_{m,\,m+p} = 0, \quad C_{m,m} = 1 \quad C_{m,1} = m,$$
$$C_{m,p} = C_{m-1,p} + C_{m-1,\,p-1},$$

καὶ καταλήγει εἰς τὸν θεμελιώδη τύπον τῆς συνδυαστικῆς:

$$C_{m,p} = \frac{m(m-1)...(m-p+1)}{1.2...p}.$$

378. Μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν παρουσιάζει μία ἐργασία του, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Pascal θέτει πρῶτος τὸ πρόβλημα (μελετηθὲν κατόπιν καὶ ἀπὸ ἄλλους) τῆς γενικεύσεως τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου διαιρετότητος διὰ 9, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει μὲ τὰς λέξεις: «vulgata sane illa observatio» (περίφημος πράγματι ἡ παρατήρησις ἐκείνη). Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξῃ καὶ νὰ τὸ γενικεύσῃ θεωρεῖ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ ἄπειρα δυνατὰ μὲ ἄλλας βάσεις, διαφόρους τοῦ 10. Ἡ ἰδέα αὐτὴ εἶναι σήμερον κοινὸν κτῆμα, τὴν ἐποχὴν ὅμως ἐκείνην ἦτο κάτι τὸ ἐντελῶς νέον. Ἐξ αὐτῆς ὁ Pascal ἐξάγει ἐνδιαφέροντα συμπεράσματα. Π.χ. ὅτι ὁ χαρακτὴρ διαιρετότητος διὰ τοῦ 11 εἰς ἀριθμητικὸν σύστημα μὲ βάσιν 12 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν χαρακτῆρα διαιρετότητος διὰ τοῦ 9 εἰς ἀριθμητικὸν σύστημα μὲ βάσιν 10. Ὡς κριτήριον διαιρετότητος διὰ τοῦ 11 ἑνὸς ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς:

$$a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + ...$$

προτείνει ὁ Pascal τὴν συνθήκην νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 τὸ ἄθροισμα:

$$(a_0 + a_2 + ...) + 10(a_1 + a_3 + ...),$$

ἐνῶ σήμερον προτιμᾶται τὸ κριτήριον τὸ στηριζόμενον ἐπὶ τῆς θεωρήσεως τῆς διαφορᾶς:

$$(a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)$$

Ἕνα ἄλλο ὑπόμνημα τιτλοφορούμενον Potestatum numericarum summa (Ἀριθμητικῶν δυνάμεων ἄθροισμα) ἔχει ὡς ἄμεσον σκοπὸν τὴν ἔρευ-

ναν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἀλλ' ὁ στόχος αὐτοῦ προκύπτει καθαρώτερα ἀπὸ ὅσα γράφει ὁ ἴδιος ἐν κατακλεῖδι: «οἱ ἐνήμεροι μὲ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀδιαιρέτων δὲν θὰ δυσκολευθοῦν νὰ διακρίνουν τὸ ὄφελος τὸ ὁποῖον δύνανται ν' ἀποκομίσουν ἐκ τῶν ἐκτιθεμένων ἀποτελεσμάτων ἐπὶ τοῦ προσδιορισμοῦ ἐμβαδῶν καμπυλογράμμων χωρίων. Πράγματι τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ ἐπιτρέπουν τὸν ἄμεσον τετραγωνισμὸν παραβολῶν παντὸς εἴδους καὶ ἀπειρίας ἄλλων καμπύλων. Ἐάν, λοιπόν, ἐπεκτείνωμεν ἡμεῖς τ' ἀποτελέσματα αὐτά, ποὺ εὑρέθησαν δι' ἀριθμούς, εἰς συνεχῆ ποσά, θὰ δυνηθῶμεν νὰ διατυπώσωμεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα»: εἶναι ὁ κανών, τὸν ὁποῖον σήμερον ἐκφράζομεν διὰ τοῦ τύπου:

$$\int_0^a x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Ὁ ἀναγνώστης γνωρίζει ἄριστα, ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δὲν εἶναι νέον, διότι ὁ Cavalieri τὸ εἶχε διατυπώσει ἀπὸ τοῦ 1639 καὶ ἀποδείξει τὸ 1644 (§ 316). Ἔφθασεν ἄραγε ὁ Pascal μόνος του εἰς αὐτό; Διὰ ν' ἀπαντήσωμεν καταφατικῶς θὰ ἔπρεπε ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ἐνῷ ἐγνώριζε τὴν Γεωμετρίαν τῶν ἀδιαιρέτων, ἠγνόει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ἔργου Centuria di problemi καὶ τοῦ Exercitationes geometricae. Ἀλλὰ πρὸς θεμελίωσιν τοιαύτης ἀποδείξεως μᾶς λείπουν ἐντελῶς τὰ στοιχεῖα.

Θὰ κλείσωμεν τὴν βραχεῖαν αὐτὴν ἀνάλυσιν τῶν ἀριθμητικῶν ἔργων τοῦ Pascal μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι εἰς τὸ Traité sur les ordres numériques. (Πραγματεία ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν τάξεων) ὁ ἴδιος ἐκθέτει τὴν γένεσιν τῶν σχηματικῶν ἀριθμῶν:

$$\frac{n}{2}\cdot(n+1),\quad \frac{n}{3}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\frac{n}{4}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3},\ldots$$

Πρόκειται περὶ ἀνακαλύψεως, τὴν ὁποίαν ὁ Fermat εἶχεν ἴσως κάμει προηγουμένως (§ 359). Ἀλλ' ἀπὸ ἱπποτικὴν γενναιοφροσύνην πρὸς ἕνα νεώτερον συνάδελφον, δὲν ἔκαμε νύξιν εἰς τὸν Pascal περὶ τοῦ ὅτι εἶχεν ἤδη φθάσει ἐκεῖνος εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα ἀπὸ τοῦ 1636 καὶ τὸν ἄφησε νὰ διατελῇ μὲ τὴν ἰδέαν τοῦ συγχρονισμοῦ. Δὲν θὰ διαφύγῃ τῆς προσοχῆς τοῦ ἀναγνώστου, ὅτι ὁ γερουσιαστὴς τῆς Τουλούζης εἶχε προχωρήσει πολὺ μακρύτερα μὲ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ θαυμασίου θεωρήματος ἐπὶ τῆς δυνατότητος ἀναλύσεως παντὸς ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα ἑνὸς πλήθους πολυγωνικῶν ἀριθμῶν.

Αἱ μελέται τοῦ Pascal ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ ἡ ἐπακολουθήσασα μαχητικὴ πρόκλησις

379. Κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἐκ τῶν ἀγρυπνιῶν, ποὺ τοῦ προεκάλουν οἱ βασανιστικοὶ πόνοι, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὑπέφερε τόσον πολὺ εἰς τὴν ζωήν του, ὁ Pascal ἐμελέτησε πολὺ ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς κυκλοειδοῦς, θέματος πολὺ τοῦ συρμοῦ κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος, καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν θαυμασίων ἰδιοτήτων. Διατί ὅμως δὲν ἐσκέφθη ποτὲ νὰ καταστήσῃ γνωστὰ τὰ εὑρήματά του διὰ τῶν συνήθων τρόπων, διὰ τοῦ τύπου; Φαίνεται ὅτι ἐσχεδίαζε τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἕνα μέγα ἔργον περὶ ἀθεΐας καὶ ὅτι ὁ δοὺξ τοῦ Roanez, στενός του φίλος, τοῦ ἐνέβαλε τὴν ἰδέαν ὅτι ἦτο σκόπιμον ν' ἀποκτήσῃ προηγουμένως κῦρος μεγάλης αὐθεντίας ἔναντι τῶν ἐνδεχομένων ἀντιπάλων του, δεικνύων τὴν ὑπεροχήν του ἐφ' ὅλων τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του, μὲ τὸ ν' ἀποδείξῃ ὅτι δὲν ἦσαν εἰς θέσιν νὰ λύσουν προβλήματα, τῶν ὁποίων ἐκεῖνος ἦτο ἀπολύτως κάτοχος. Ἀκολουθῶν τὴν συμβουλὴν αὐτὴν ἐδημοσίευσε τὸν Ἰούνιον τοῦ 1658 ἀνώνυμον φύλλον γραμμένον εἰς λατινικήν, χωρὶς ἔνδειξιν τόπου καὶ ἐκδότου, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ὡς ἑξῆς:

«Ἀσχοληθεὶς πρὸ ὀλίγου μὲ διάφορα ζητήματα ἀφορῶντα τὴν κυκλοειδῆ καὶ τὸ κέντρον βάρους της, ἀντεμετώπισα ἀρκετὰ προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐφαίνετο ν' ἀπαιτῇ κάποιαν σοβαρὰν προσπάθειαν. Ζητοῦμεν λοιπὸν ἀπὸ τοὺς γεωμέτρας ὅλου τοῦ κόσμου νὰ δώσουν λύσεις εἰς αὐτὰ καὶ προσφέρομεν βραβεῖον εἰς τοὺς λύτας, ὄχι βεβαίως διὰ ν' ἀνταμείψωμεν τοὺς κόπους των (μακρὰν ἀφ' ἡμῶν τοιαύτη σκέψις!), ἀλλ' ὡς ἀπόδειξιν τοῦ ἐνδιαφέροντός μας καὶ τῆς ἐπιθυμίας μας ν' ἀποδοθῇ δημοσίως ἡ προσήκουσα τιμὴ εἰς ἀναγνώρισιν τῆς ἀξίας των».

Εἰς περίπτωσιν ἀποτυχίας, αἱ ἀπαντήσεις θὰ ἐδίδοντο ἀπὸ τὸν προτείνοντα· συγχρόνως ποσὸν 60 πιστολῶν (περίπου 600 ἰταλικῶν λιρῶν) ἐνεπιστεύθη εἰς χεῖρας τοῦ Carcavy, ὁ ὁποῖος ἐπωμίζετο συγχρόνως τὴν ὑποχρέωσιν νὰ δέχεται τὰς ἀπαντήσεις, νὰ δίδῃ αὐτάς, πρὸς ἐξέτασιν, εἰς ἁρμόδια πρόσωπα ἐφ' ὅσον αἱ ἀπαντήσεις των θὰ εἶχον ληφθῆ μέχρι τῆς 1ης Ὀκτωβρίου 1658 καὶ ν' ἀπονείμῃ τελικῶς δύο βραβεῖα, ἕνα 40 καὶ τὸ ἄλλο 20 πιστολῶν.

Τὰ προτεινόμενα προβλήματα ἦσαν τὰ ἑξῆς: I. Τετραγωνισμὸς κυκλοειδικοῦ χωρίου περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος, ἑνὸς τόξου τῆς καμπύλης καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, II Κέντρον βάρους τοῦ τμήματος τούτου, III. Ὄγκος παραγόμενος διὰ περιστροφῆς τούτου περὶ τὸν ἄξονα ἢ τὴν ρηθεῖσαν παράλληλον, IV. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τὸν ὄγκον ποὺ γεννᾶται διὰ περιστροφῆς τοῦ ὑπ' ὄψει τμήματος περὶ τὸν ἴδιον ἄξονα, V. Κέντρα βάρους τῶν ὡς ἄνω στερεῶν, VI. Τὰ αὐτὰ προβλήματα διὰ τὰ

στερεά, ποὺ γεννῶνται ἐκ τῶν ἀνωτέρω κατόπιν τομῆς των ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος.

Τὰ τέσσαρα πρῶτα εἶχον ἤδη λυθῆ ὑπὸ τοῦ Roberval, ὁ ὁποῖος ἐν τούτοις, πιστὸς εἰς τὰς συνηθείας του, εἶχε κρατήσει μυστικὰ τὰ ὑπ᾿ αὐτοῦ εὑρεθέντα ἀποτελέσματα. Ὅταν ἔλαβε γνῶσιν τοῦ γεγονότος αὐτοῦ ὁ Pascal, ἐνήργησεν ὡς ἐὰν εἶχον πληροφορηθῆ τοῦτο ὅλοι οἱ ὑποψήφιοι συναγωνισταὶ καὶ ὅτι κατὰ συνέπειαν ἡ πρόκλησις περιωρίζετο οὐσιαστικῶς μόνον εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο τελευταίων ζητημάτων.

Ὅτι ὁ Pascal δὲν ἐκινεῖτο ἀπὸ ἐπιστημονικὸν ἐνδιαφέρον καὶ ὅτι σκοπός του ἦτο νὰ φέρῃ εἰς σύγχυσιν τοὺς μαθηματικούς, προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Huygens, ὁ ὁποῖος εἶχε λάβει τὴν μαχητικὴν πρόκλησιν μέσῳ τοῦ ἀστρονόμου Ismael Bouilliand (1605-1694), οὐδέποτε κατώρθωσε νὰ λάβῃ, διὰ τοῦ αὐτοῦ μέσου, μερικὰς διευκρινίσεις ποὺ ἐθεώρει ἀναγκαίας, προκειμένου ν᾿ ἀποφασίσῃ, ἂν θὰ κατέλθῃ ἢ ὄχι εἰς τὸν ἀγῶνα.

380. Τὸ πρῶτον δημόσιον κείμενον, σχετικῶς μὲ τὴν μαχητικὴν πρόκλησιν περὶ τῆς ὁποίας ὁ λόγος, ἐδημοσιεύθη εἰς γαλλικὴν καὶ λατινικὴν γλῶσσαν τὴν 7ην Ὀκτωβρίου 1658 μὲ τὸν τίτλον Reflexions sur les conditions des prix attachés à la solution des problèmes concernant la cycloïde[22]. Εἶναι ἕνα σύντομον ὑπόμνημα πολεμικοῦ χαρακτῆρος ἐναντίον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκακολόγησαν ἢ περιεφρόνησαν τοὺς ὅρους τοῦ διαγωνισμοῦ, ὑπόμνημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀποκαλύπτεται μόνον ἡ διαβεβαίωσις, ὅτι αἱ λύσεις αἱ δοθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Pascal εἰς τὰ προβλήματα τῆς προκλήσεως εἶχον ἤδη περιέλθει εἰς γνῶσιν εἰς πολλοὺς μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ Carcavy, ὁ Roberval καὶ ἕνας συμβολαιογράφος.

Μετὰ τρεῖς ἡμέρας ἐδημοσιεύετο, ἐπίσης εἰς γαλλικὴν καὶ λατινικήν, ἕνα ἄλλο κείμενον ὑπὸ τὸν τίτλον: Histoire de la roullette, appellée autrement trochoïde ou cycloïde, où l'on rapporte par quels degrès on est arrivé à la connaissance de cette ligne[23], συνονθύλευμα ψευδῶν, τὰ ὁποῖα καθιστοῦν τὸ κείμενον αὐτὸ ἀνάξιον νὰ φέρῃ τὸ τιμητικὸν ὄνομα «ἱστορία», ὅπως θὰ δείξωμεν ἐν συνεχείᾳ μὲ πᾶσαν δυνατὴν ἀμεροληψίαν.

Ἀρχίζει λοιπὸν ὁ Pascal μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι, καίτοι ἡ γένεσις τῆς κυκλοειδοῦς ἐμφανίζεται αὐτομάτως εἰς τὸν παρακολουθοῦντα τὴν τροχιάν, τὴν ὁποίαν γράφει ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς στεφάνης ἑνὸς τροχοῦ, ἐν τούτοις κανένα ἴχνος περὶ τῆς καμπύλης αὐτῆς δὲν ἀπαντᾶται εἰς τοὺς ἀρχαίους. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὐτὴ τοῦ Pascal εἶναι ἀνακριβής, διότι ἀπὸ τῆς ἀρχαίας ἤδη ἐποχῆς ποταμοὶ μελάνης ἐχύθησαν πρὸς ἐξήγησιν τοῦ ἐκ πρώτης ὄψεως παραδόξου γεγονότος, γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα «τροχὸς τοῦ Ἀριστοτέλους», ἀκριβῶς πρὸς ὑπενθύμισιν τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ

μέγας Σταγειρίτης εἶχεν ἤδη ἐπισημάνει τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο ἀντικείμενον μελέτης *.

Ἡ αὐτοκαλουμένη Histoire συνεχίζει ἐπὶ λέξει ὡς ἑξῆς : «Ὁ μακαρίτης πατὴρ Mersenne, ὁ ἐπιλεγόμενος Minimus, ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος ποὺ ἠσχολήθη μὲ τὴν καμπύλην αὐτὴν κατὰ τὸ ἔτος 1615, ἐξετάζων τὴν κίνησιν τῶν τροχῶν· αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον τὴν ἐκάλεσε «roulette». Κατόπιν ἠθέλησε νὰ ἐξετάσῃ τὴν φύσιν καὶ τὰς ἰδιότητάς της, χωρὶς ὅμως ἐπιτυχίαν... Διὰ τοῦτο ἐπρότεινε τὴν ἔρευναν τῆς φύσεως τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς ὅλους ἐκείνους, τοὺς ὁποίους εἰς τὴν Εὐρώπην ἐθεώρει ἀξίους τῆς προσπαθείας, καὶ μεταξὺ ἄλλων εἰς τὸν Γαλιλαῖον· ἀλλ' οὔτε καὶ ἐκεῖνος ἐπέτυχεν εἰς αὐτό, ὅλοι δὲ ὁ ἕνας μετὰ τὸν ἄλλον ἀπηλπίζοντο εἰς τὰς προσπαθείας των. Ἐπέρασαν τοιουτοτρόπως πολλὰ ἔτη, ὅταν τὸ 1634 ὁ προαναφερθεὶς πατήρ, βλέπων ὅτι ὁ κύριος Roberval, καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν, ἔλυε πλῆθος δυσκόλων προβλημάτων, ἐσκέφθη νὰ ζητήσῃ ἀπὸ αὐτὸν τὰς λύσεις τῆς «roulette». Πράγματι ὁ κύριος Roberval κατέληξεν εἰς ἐπιτυχῆ συμπεράσματα, ἀποδεικνύων ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς «roulette» εἶναι τριπλασία τοῦ γεννήτορος κύκλου. Τότε μάλιστα, ἤρχισε νὰ τὴν ὀνομάζῃ μὲ τὸ ἑλληνικὸν ὄνομα «τροχοειδής», ἀντίστοιχον τοῦ γαλλικοῦ «roulette». Ἀνεκοίνωσε λοιπὸν εἰς τὸν πατέρα Mersenne, ὅτι τὸ ζήτημά του ἐλύθη καὶ τοῦ ἐνεπιστεύθη ἀκόμη τὴν σχέσιν τοῦ τριπλασίου, ἀπαιτήσας ὅμως νὰ τὴν κρατήσῃ μυστικὴν ἐπὶ ἕνα ἔτος, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ὁποίου οὗτος ἦτο κύριος τοῦ προβλήματος, δυνάμενος νὰ τὸ προτείνῃ ἐκ νέου εἰς ὅλους τοὺς γεωμέτρας. Ὁ πατήρ, περιχαρὴς διὰ τὴν ἐπιτυχίαν, ἔγραψεν εἰς ὅλους παρακινῶν αὐτοὺς ν' ἀπαντήσουν καὶ προσθέτων ὅτι ὁ κύριος Roberval εἶχεν ἤδη λύσει τὸ πρόβλημα, χωρὶς ὅμως ν' ἀναφέρῃ τὸν τρόπον. Ὅταν πλέον παρῆλθε διάστημα περισσότερον τοῦ ἔτους καὶ ἐφαίνετο ὅτι κανεὶς δὲν εἶχεν εὕρει τὴν λύσιν, ὁ πατὴρ ἔγραψεν εἰς τοὺς μαθηματικοὺς διὰ τρίτην φορὰν καὶ ἀπεκάλυψεν εἰς αὐτοὺς τὴν σχέσιν 3 : 1 μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς «roulette» καὶ τοῦ τροχοῦ. Τὸ 1635, ἐνεφανίσθησαν δύο, οἱ ὁποῖοι, ἐπωφελούμενοι τῆς βοηθείας, ἔδωσαν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ. Αἱ λύσεις των ἔφθασαν σχεδὸν συγχρόνως· μία τοῦ κυρίου Fermat, συμβούλου τοῦ Κοινοβουλίου τῆς Τουλούζης, καὶ ἄλλη τοῦ κυρίου Descartes, διάφοροι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν τοῦ κυρίου Roberval εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ἔχων αὐτὰς πρὸ ὀφθαλμῶν δὲν δυσκολεύεται ν' ἀναγνωρίσῃ ἐκείνην ποὺ ἀνήκει εἰς τὸν ἐξαπολύσαντα τὴν πρόκλησιν.

* Τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ Σταγειρίτης εἶναι τὸ ἀκόλουθον : Ζητεῖται ἡ ἐξήγησις τοῦ ἑξῆς γεγονότος : ὅταν δύο κύκλοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, ἡ διὰ κυλίσεως περιστροφὴ ἄγει, τόσον διὰ τὸν μεγάλον ὅσον καὶ διὰ τὸν μικρὸν κύκλον, εἰς εὐθείας μεταξὺ των ἴσας, ἐνῷ ἐὰν κυλισθοῦν κεχωρισμένως, αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀντίστοιχοι διάμετροι.

»Τὸ 1638 ὁ μακαρίτης Beaugrand, ἀφοῦ περισυνέλεξε τὰς ἀποδείξεις περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς «roulette», κατεῖχε δὲ ἱκανὸν ἀριθμὸν τούτων, ὡς καὶ μίαν θαυμασίαν μέθοδον, ἐπινοηθεῖσαν ὑπὸ τοῦ κυρίου Fermat, περὶ ἀναζητήσεως τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, τὰ ἀπέστειλεν ὅλα ὁμοῦ εἰς τὸν Γαλιλαῖον, χωρὶς ν' ἀναφέρῃ τὰ ὀνόματα τῶν συγγραφέων. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι δὲν ἀπεσαφήνισε τελείως, ὅτι δὲν ἐπρόκειτο περὶ ἰδικῶν του ἐργασιῶν, ἀλλ' ἐξεφράσθη κατὰ τρόπον μᾶλλον ἀπρόσεκτον οὕτως, ὥστε νὰ παρέχεται ἡ ἐντύπωσις, ὅτι μόνον ἐκ μετριοφροσύνης παρεσιώπησε τὸ ὄνομά του. Καὶ διὰ νὰ συσκοτίσῃ ὀλίγον τὰ πράγματα, μετέτρεψε τὰ ὀνόματα «roulette» καὶ «τροχοειδής», εἰς «κυκλοειδής».

»Ὁ Γαλιλαῖος ἀπέθανε μετ' ὀλίγον, καθὼς καὶ ὁ Beaugrand. Ὁ Torricelli διεδέχθη τὸν Γαλιλαῖον καὶ ὅταν περιῆλθον εἰς χεῖρας του ὅλα τὰ κατάλοιπα τῶν χειρογράφων τοῦ τελευταίου, εὗρε μεταξὺ ἄλλων τὰς ἐν λόγῳ λύσεις τῆς «roulette» ὑπὸ τὸ ὄνομα «κυκλοειδής», γεγραμμένας διὰ χειρὸς τοῦ Beaugrand, ποὺ ἐφαίνετο συγγραφεύς των, καὶ τοῦ ὁποίου ἀποθανόντος, ἐθεώρησεν ὅτι εἶχε παρέλθει ἀρκετὸς χρόνος, ὥστε νὰ ἐξαλειφθῇ ἡ μνήμη, καὶ δι' αὐτὸ ἐσκέφθη νὰ ἐπωφεληθῇ. Ἐτύπωσε λοιπὸν τὸ 1644 τὸ βιβλίον του, διὰ τοῦ ὁποίου ἀποδίδει εἰς τὸν Γαλιλαῖον ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸν Mersenne, ἤτοι τὴν σύλληψιν τοῦ προβλήματος τῆς «roulette» καὶ εἰς τὸν ἑαυτόν του ὅ,τι ἀποτελεῖ πνευματικὴν ἰδιοκτησίαν τοῦ κυρίου Roberval, ἤτοι τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως... Ὁ κύριος Roberval ἐξέφρασε τὴν λύπην του πρὸς τὸν Torricelli εἰς μίαν ἐπιστολήν, τὴν ὁποίαν τοῦ ἀπηύθηνε ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Τὸ ἴδιον ἔκαμεν, ἀλλ' ἀκόμη αὐστηρότερα ὁ πατὴρ Mersenne. Ὁ τελευταῖος προσεκόμισε τόσα ἀποδεικτικὰ στοιχεῖα, ἔντυπα καὶ ἄλλα παντὸς εἴδους, ὥστε τὸν ὑπεχρέωσε νὰ δηλώσῃ ἑαυτόν ἡττηθέντα καὶ νὰ παραχωρήσῃ τὴν ἐπινόησιν ἐκείνην εἰς τὸν κύριον Roberval, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἔκαμε δι' ἐπιστολῶν, αἱ ὁποῖαι γραφεῖσαι διὰ χειρός του τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, διατηροῦνται καὶ σήμερον... Μετὰ τὴν μικρὰν αὐτὴν ἀτυχίαν, ὁ Torricelli μὴ δυνάμενος πλέον νὰ θεωρῆται ἀπὸ τοὺς γνωρίζοντας τὴν ἀλήθειαν ὡς ἀνακαλύψας πρῶτος τὸ ἐμβαδὸν τῆς «roulette» καὶ τὸν ὄγκον τὸν προκύπτοντα ἐκ περιστροφῆς αὐτῆς περὶ τὴν βάσιν της, ἀφοῦ ὁ κύριος Roberval τοῦ εἶχεν ἤδη προηγουμένως ἀνακοινώσει τ' ἀποτελέσματα αὐτά, ἐζήτησε νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τοῦ ὄγκου τοῦ γεννωμένου ἐκ περιστροφῆς τῆς «roulette» περὶ τὸν ἄξονά της. Συνήντησεν ὅμως μεγάλην δυσκολίαν, διότι ἐπρόκειτο περὶ προβλήματος ἀπαιτοῦντος ἔρευναν ὑψηλῆς στάθμης, μακρὰν καὶ ἐπίπονον. Ἐν τῇ ἀδυναμίᾳ του νὰ φθάσῃ εἰς ἀποτέλεσμα, ἀπέστειλε μίαν κατὰ προσέγγισιν λύσιν, ἀντὶ τῆς ἀκριβοῦς, βεβαιῶν ὅτι τὸ ὑπ' ὄψει στερεὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν ἀντίστοιχον κύλινδρον ὃν λόγον ἔχει τὸ 11 πρὸς τὸ 18. Δὲν ὑπῆρξεν ὅμως τυχηρότερος εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, διότι ὁ κύριος Roberval, ὁ ὁποῖος κατεῖχε τὴν ἀληθῆ καὶ ἀκριβῆ λύσιν, τοῦ

ὑπέδειξε τὴν πλάνην καὶ τοῦ ἀπεκάλυψε τὴν ἀλήθειαν. Ὁ Torricelli ἀπέθανεν ὀλίγον ἔπειτα».

381. Γράφων τὰ σελίδας αὐτάς, ὁ Pascal ἠπατήθη νομίσας, ὅτι ἦτο καλὴ εὐκαιρία πρὸς ἐκμετάλλευσιν τὸ γεγονός, ὅτι ὅλοι οἱ πρωταγωνισταὶ τοῦ λυπηροῦ αὐτοῦ δράματος εἶχον ἤδη κατέλθει εἰς τὸν τάφον. Ἀλλὰ δὲν ἔλαβεν ὑπ᾽ ὄψιν του, ὅτι ὑφίσταντο αἱ ἰδιόχειροι ἐπιστολαί των, τὰς ὁποίας ἀφωσιωμένοι φίλοι διεφύλαττον ὡς κειμήλια καὶ τὰς ὁποίας ἦσαν πρόθυμοι νὰ παρουσιάσουν, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀμέσως, εἰς ὑπεράσπισιν τῆς ἀληθείας.

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ὁ Mersenne ὡδηγήθη πράγματι εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς κυκλοειδοῦς μελετῶν τὸν «τροχὸν τοῦ Ἀριστοτέλους», ἀλλ᾽ εὑρίσκετο τόσον μακρὰν ἀπὸ τοῦ νὰ θεωρήσῃ τὴν καμπύλην ἐκείνην ὡς ἀντικείμενον ἐρεύνης, ὥστε τὴν ἐξέλαβεν ἀρχικῶς ὡς ἡμι-ἔλλειψιν, κατόπιν δὲ ὡς σύνθετον καμπύλην ἀναλυομένην εἰς τόξα ἀρχιμηδείων ἑλίκων. Ἐφωτίσθη ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀπὸ μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Roberval (6 Ἰουλίου 1637), ἡ ὁποία ἀνεκαλύφθη προσφάτως καὶ ἐδημοσιεύθη.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὰς δῆθεν τρεῖς προκλήσεις τοῦ Mersenne πρὸς τοὺς μαθηματικοὺς τῆς Εὐρώπης αὗται δὲν ὑπῆρξαν παρὰ μόνον εἰς τὴν κακόβουλον φαντασίαν τοῦ συγγραφέως τῆς Histoire. Πράγματι ἡ μοναδικὴ προτροπὴ διὰ τὴν μελέτην τῆς κυκλοειδοῦς ἀπαντᾶται εἰς μίαν ἐπιστολὴν τὴν ὁποίαν ἔγραψεν ὁ περίφημος Minimus πρὸς τὸν Descartes τὸ 1638. Ἐξ ἄλλου ὁ Mersenne δὲν ἔγραψε πρὸς τὸν Γαλλιλαῖον παρὰ μόνον τρεῖς ἐπιστολὰς μικρᾶς σημασίας, εἰς τὰς ὁποίας οὐδεὶς γίνεται λόγος περὶ κυκλοειδοῦς. Ὁ δὲ Beaugrand εἶχε μὲ τὸν Γαλιλαῖον σχέσεις ἀκόμη περισσότερον ἐπιφανειακάς, ἂν κρίνωμεν ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι εἶναι γνωστὴ μία μόνον ἐπιστολή του πρὸς τὸν κορυφαῖον τῆς Φλωρεντίας, ἐπιστολὴ εἰς τὴν ὁποίαν οὐδὲ νύξις γίνεται περὶ κυκλοειδοῦς. Ὅτι ὁ Beaugrand ἔφθασε μόνος του εἰς τὴν ἔρευναν τῆς καμπύλης αὐτῆς ρητῶς δηλοῦται εἰς μίαν ἐπιστολήν, τὴν ὁποίαν ἔγραψε πρὸς τὸν Cavalieri τὴν 24ην Φεβρουαρίου 1640 μὲ τὰς ἀκολούθους λέξεις: «Ἔχουν ἤδη περάσει περισσότερα τῶν 50 ἐτῶν ἀπὸ τότε ποὺ ἦλθεν εἰς τὸν νοῦν μου ἡ ἰδέα νὰ σπουδάσω τὴν ἁψιδόμορφον αὐτὴν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἐθαύμασα τὴν χαριτωμένην καμπυλότητα, διὰ νὰ ἴδω πῶς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς σχῆμα ἄντυγος τῶν γεφυρῶν. Ἔπειτα ἀπὸ διαφόρους προσπαθείας πρὸς ἀναζήτησιν κάποιας χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος, μοῦ ἐφάνη κατ᾽ ἀρχήν, ὅτι τὸ ὑπ᾽ αὐτῆς καὶ τῆς χορδῆς της περιεχόμενον ἐμβαδὸν ἦτο τριπλάσιον τοῦ γεννῶντος τὴν καμπύλην κύκλου, ἀλλ᾽ αὐτὸ δὲν ἦτο ὀρθόν, μολονότι ἡ διαφορὰ δὲν φαίνεται νὰ εἶναι μεγάλη *».

---

* Περὶ ἄλλων διεκδικήσεων προτεραιότητος εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς κυκλοειδοῦς παραπέμπομεν εἰς μελέτην τοῦ G. Wallis: An extract of a Letter of May 4, 1697, con-

Ὅσον ἀφορᾶ τώρα τὴν ἐναντίον τοῦ Torricelli στρεφομένην κατηγορίαν, ἡ ὁποία σχεδὸν τὸν καταβιβάζει εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀνεντίμου ὑπηρέτου, ἐπιδιδομένου εἰς λεηλασίαν τῶν θηλακίων τοῦ μόλις ἀποθανόντος κυρίου του, νομίζομεν ὅτι θὰ ἦτο ἀνανδρία, ἂν παρελείπομεν ν' ἀποδείξωμεν τὸ ἀβάσιμον τοιούτων ἰσχυρισμῶν. Εἶναι ἄλλωστε τοῦτο εὐκολώτατον σήμερον, κατόπιν τῆς ἐργασίας ἑνὸς σοφοῦ συμπατριώτου ἐκείνου τοῦ μεγάλου, τοῦ Carlo Roberto Dati (γεννηθέντος εἰς Φλωρεντίαν τὴν 2αν Ὀκτωβρίου 1619, ἀποθανόντος ἐκεῖ τὴν 11ην Ἰανουαρίου 1676), ὁ ὁποῖος ὑπὸ τὸ κράτος δικαιολογημένης ἀγανακτήσεως ἔγραψεν, ὑπὸ τὸ ψευδώνυμον Timauro Antiate, (τιμωρὸς ἐκδικητής), ἕνα εὐγενὲς ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθενται[1] ὅλα τὰ αὐθεντικὰ κείμενα ποὺ ἀποδεικνύουν, ὅτι ὁ Torricelli ἐπέτυχε μόνος του νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα τῆς κυκλοειδοῦς συμπληρῶν μίαν ἔρευναν τοῦ Γαλιλαίου, τὴν ὁποίαν ὁ τελευταῖος εἶχεν ἀφήσει ἀτελῆ. Ὅταν ὁ ἔντιμος φλωρεντινὸς ἔλαβε γνῶσιν τῶν ἐρευνῶν, αἱ ὁποῖαι εἶχον πραγματοποιηθῆ εἰς τὴν Γαλλίαν, δὲν ἐδίστασε ν' ἀναγνωρίσῃ εἰς τὸν Roberval τὰ δικαιώματα προτεραιότητος, καὶ ἐζήτησε μόνον μίαν διευκρίνισιν ἐπὶ ἑνὸς θέματος δῆθεν γαλλικῆς ἐθνικότητος, ἐνῷ τὸ πεδίον τῆς ἐρεύνης ἦτο ἤδη ὥριμον πρὸς καλλιέργειαν τόσον εἰς τὴν Ἰταλίαν ὅσον καὶ πέραν τῶν Ἄλπεων. Ἡ ἐμπεριστατωμένη αὐτὴ καὶ πλουσιώτατα τεκμηριωμένη ὑπεράσπισις ἦτο ἑπόμενον ν' ἀπαλλάξῃ τὸν Torricelli πάσης κατηγορίας*.

Ἡ δῆθεν Histoire συνεχίζει μὲ μίαν αὐτο-απολογίαν περὶ τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἀνεκάλυψε καὶ ἐφήρμοσεν ὁ Pascal. Ἀκολουθοῦν πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τ' ἀφορῶντα τὴν κυκλοειδῆ, τὰ ὁποῖα ἀνεκοινώθησαν κατ' ἰδίαν εἰς τοὺς ἑξῆς: R. de Sluse (ὑπάρχει πράγματι ἐπιστολὴ του πρὸς τὸν Pascal ἀπὸ 2 Αὐγούστου 1658), Michelangelo Ricci, Huygens (εἰς ἐπιστολήν του τῆς 5 Φεβρουαρίου 1659 ὁ μέγας Ὀλλανδὸς ἀνεγνώρισε μερικὰ διαπραχθέντα σφάλματα), Wren καὶ La Louvère (τὸν γνωστόν μας ἤδη Ἰησουΐτην, § 363). Μέμφεται ἀδίκως τὸν τελευταῖον, διότι παρουσίασεν ὡς ἰδικά του ἀποτελέσματα εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Roberval, ἀλλ' οὐδέποτε δημοσιευθέντα ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τὸν τύπον, ἐνῷ ἀποδίδει δικαίως εἰς τὸν Wren τὴν εὕρεσιν τοῦ μήκους τῆς κυκλοειδοῦς. Καθιστᾷ ἐν τούτοις γνωστὸν ὅτι τὸ θεώρημα τὸ δίδον τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς κυκλοειδοῦς ἴσον πρὸς τὸ

---

cerning the cycloid, known to Cardinal Cusanus, about the year 1450, and to Carolus Bobillus about the year 1500 (Phil. Trans. R. Soc. London, 1697). Εἰς τὰ ὀνόματα αὐτὰ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ τοῦ A. Dürer, ἐξ ἀφορμῆς χωρίου γνωστοῦ μας ἔργου του (Τόμος I, § 189).

* Ἀποτελεῖ ἐν τούτοις λυπηρὰν διαπίστωσιν τὸ γεγονός, ὅτι ἕνας καὶ μοναδικὸς μεταξὺ τῶν συγχρόνων ἱστορικῶν, ὁ Duhem ἐτάχθη μὲ τὸ μέρος τοῦ Pascal, ὁμιλῶν περὶ τῆς «περιέργου ἐκείνης κλοπῆς, τῆς ὁποίας ὁ Roberval ὑπῆρξε θῦμα ἐκ μέρους τοῦ Torricelli» (Les origines de la statique, Paris, 1906, Τόμος II, σελ. 205).

4πλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ γεννῶντος κύκλου, ἀπεδείχθη ἀμέσως καὶ ὑπὸ τῶν Fermat καὶ Roberval, εὐθὺς μόλις ἔλαβον γνῶσιν αὐτοῦ.

'Εξαιρουμένου τοῦ La Louvère, ὅλοι ἐκεῖνοι ἔκαμαν ἀτομικὰς ἀνακοινώσεις χωρὶς νὰ διεκδικοῦν βραβεῖα (φαίνεται ὅτι ὁ Fermat, γνωρίζων τὰ ἐξω-επιστημονικὰ κίνητρα τοῦ διαγωνισμοῦ, δὲν ἔλαβε μέρος εἰς αὐτόν). Αἱ ἐργασίαι τῶν κυρίως εἰπεῖν διαγωνισθέντων δὲν εἶχον ἐξετασθῆ μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ἐγράφετο τὸ κείμενον ἐκεῖνο. 'Εν τῷ μεταξὺ ὁ Pascal ἀναγγέλλει ἄλλας παρομοίας προτάσεις, δηλῶν ὅτι παρατείνει τὴν προθεσμίαν τῆς προσκλήσεως μέχρι τέλους τοῦ 1658, ὁπότε ἐπρόκειτο νὰ καταστήσῃ γνωστὰς τὰς ἰδικάς του ἐργασίας. Μεταξὺ δὲ αὐτῶν, ἀναφέρει εὐλόγως, ὡς ἐχούσας ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον, τὴν εὐθειοποίησιν τῶν κυκλοειδῶν, τεταμένης ἢ συνεσταλμένης μορφῆς, μέσῳ ἐλλειπτικῶν τόξων.

382. Τὴν 25ην Νοεμβρίου 1658 ἐδημοσιεύθη ἡ ἀπόφασις ἐπὶ τῆς κρίσεως τῶν ὑποβληθεισῶν λύσεων: Recit de l' examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette, où l' on voit que ces prix n' ont point été gagnés, parce que personne n' a donné la veritable solution des problèmes[34]. 'Αφίνοντες τὸν ἀναγνώστην, τὸν ἔχοντα τὴν περιέργειαν, νὰ διαβάσῃ ὁλόκληρον τὴν ἀπόφασιν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἀναριθμήτους ἀναδημοσιεύσεις ποὺ ἐγένοντο, παρατηροῦμεν ὅτι τὴν κρίσιν ἐξέφερεν ὁ Carcavy ἐν ὁμοφωνίᾳ «μὲ πρόσωπα ἀπολύτου κύρους εἰς τὴν γεωμετρίαν». Ποῖοι ἦσαν αὐτοὶ οἱ διάσημοι ἄγνωστοι δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ μάθωμεν καὶ εἶναι βεβαίως λυπηρὸν τὸ γεγονὸς ὅτι, κρίνοντες μὲ τὸ προσωπεῖον εἰς τὸ πρόσωπον, ἐμείωσαν οἱ ἐν λόγῳ κριταὶ τὴν ἀξίαν τῆς ἐτυμηγορίας των.

'Εξαιρεθεισῶν τῶν ἀπαντήσεων, αἱ ὁποῖαι ἐστάλησαν καὶ κατόπιν ἀπεσύρθησαν, παρέμειναν εἰς τὸν διαγωνισμὸν τελικῶς ὁ πατὴρ la Louvère καὶ ὁ Wallis. Αἱ λύσεις των ἐξητάσθησαν κατὰ βάθος, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς μὴ ἄξιαι βραβεύσεως, τὸ δὲ κατατεθὲν χρηματικὸν ποσὸν τῶν 200 πιστολῶν νὰ ἐπιστραφῇ ἡσύχως εἰς τὰ θυλάκια τοῦ Pascal. Δύναται λοιπὸν νὰ λεχθῇ, ὅτι ὁ τελευταῖος ἐπέτυχε πλήρως τὸ σκοπούμενον ἀποτέλεσμα, ἀφοῦ οὐδεὶς εὑρέθη εἰς τὸ ἀνάστημα τοῦ προκηρύξαντος τὸν ἀγῶνα. 'Αλλ' ὅπως ἦτο φυσικόν, τὸ πρᾶγμα δὲν ἔληξεν ὁμαλῶς.

'Ο la Louvère, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Pascal εὑρίσκετο εἰς ἀλληλογραφίαν (αἱ δὲ ἐπιστολαὶ ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν πρόσφατον ἔκδοσιν τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν τ ο ῦ P a s c a l) καὶ ὁ ὁποῖος πιθανῶς ἔλαβε μέρος εἰς τὸν διαγωνισμὸν κατόπιν προτροπῆς τοῦ φίλου του Fermat (§ 363), δὲν ἠδύνατο νὰ ὑποφέρῃ τὴν κατηγορίαν περὶ λογοκλοπίας εἰς βάρος τοῦ Roberval, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ πάντα ἀπεδείκνυον τὴν ἀθωότητά του. 'Επὶ πλέον ἰσχυρίζετο ὅτι μερικὰ ἁπλᾶ, λογιστικὰ σφάλματα ποὺ διέπραξεν ὁ ἴδιος ἐν τῇ

σπουδῆ του ἦσαν τόσον ἀσήμαντα, ὥστε δὲν ἤξιζαν τὰς μομφὰς τοῦ ἀνωνύμου συγγραφέως εἰς ἕνα ἄλλο κείμενον ἐπιγραφόμενον: Suite de l' histoire de la roulette où l' on voit le procédé d' une personne qui aujourd' hui voulut s' attribuer l' invention des problèmes proposés sur ce sujet[35]*.

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ σελίδων, αἱ ὁποῖαι οὐδεμίαν οὐσιαστικὴν συμβολὴν προσφέρουν εἰς τὴν ἐπιστήμην, θὰ ἦτο μάταιον νὰ ἐνδιατρίψωμεν τοσούτῳ μᾶλλον καθ' ὅσον ὑφίσταται ἕνας τόμος δημοσιευθεὶς τὸ 1660, ὅπου εὑρίσκονται ὑπὸ ἀκεραίαν καὶ ὁριστικὴν μορφὴν αἱ συμβολαὶ αἱ δοθεῖσαι ὑπὸ τοῦ la Louvère εἰς τὴν μελέτην τῆς κυκλοειδοῦς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν Wallis, οὗτος εἶχε λάβει, ὅπως καὶ ὁ C. Wren**, τὸ πρόγραμμα τοῦ διαγωνισμοῦ μέσῳ τοῦ Digby, ὁ ὁποῖος τὸ εἶχεν ἀποστείλει εἰς αὐτοὺς ἐκ Παρισίων (7 Ἰουλίου 1658), ὅπου εὑρίσκετο τότε. Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἐλλείψεως ἐπαρκοῦς χρόνου, ὁ Wallis περιωρίσθη ἐκθέτων τὴν γενικὴν πορείαν τῆς λύσεως, δι' ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Carcavy ὑπὸ χρονολογίαν 19 Αὐγούστου 1658, πρωτοκολληθείσης ὑπὸ ἑνὸς συμβολαιογράφου τῆς Ὀξφόρδης. Ἡ ἐπιστολὴ ἔφθασεν εἰς Παρισίους τὴν 10ην Σεπτεμβρίου καὶ περιλαμβάνει 55 παραγράφους, εἰς τὰς ὁποίας ὁ συγγραφεὺς ἐπεφυλάσσετο νὰ ἐπιφέρῃ βελτιώσεις καὶ προσθήκας. Καὶ πράγματι ἀναφέρονται τοιαῦται εἰς μίαν ἄλλην ἐπιστολήν του ἀποσταλεῖσαν ὑπὸ χρονολογίαν 3 Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Ὅλα αὐτὰ δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ μελετήσῃ ἐν ἐκτάσει εἰς μίαν πραγματείαν Περὶ κυκλοειδοῦς, δημοσιευθεῖσαν διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1660, καταχωρηθεῖσαν δὲ κατόπιν εἰς τὴν συλλογὴν τῶν Ἁπάντων τοῦ ἐξέχοντος ἄγγλου μαθηματικοῦ. Προσηρτημένη εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εὑρίσκεται μία ἐπιστολή, ἀπευθυνομένη πρὸς τὸν Huygens, ὅπου στιγματίζεται ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ἐνήργησεν ὁ Pascal καὶ κατηγορεῖται ὁ τελευταῖος, ὅτι ἐξεμεταλλεύθη πράγματα περιλαμβανόμενα εἰς τὰ γραπτὰ τῶν διαγωνισθέντων, διὰ νὰ διαμορφώσῃ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ πράγματι, καθ' ἣν ἐποχὴν ἐξαπέλυσε τὴν πρόκλησιν. Ἡ ὑπεράσπισις τοῦ συγγραφέως τῶν Pensées, τὴν ὁποίαν ἐπεχείρησεν ὁ Carcavy εἰς μίαν ἐπιστολήν του ἀποσταλεῖσαν πρὸς τὸν Huygens τὴν 25ην Ἰουνίου 1660, δὲν εἶναι τόσον στερεά, ὥστε νὰ στηριχθῇ ἐπ' αὐτῆς μία ὁριστικὴ ἀθώωσις τοῦ κατηγορουμένου.

---

* Τὸ κείμενον αὐτὸ φέρει χρονολογίαν 12 Δεκεμβρίου 1658 καὶ ἕνα ὑστερόγραφον ὑπὸ χρονολογίαν 22 Ἰανουαρίου 1659. Ἀρχίζει δὲ μὲ τὰς πολὺ γνωστὰς σαρκαστικὰς φράσεις: «Τὰ θέματα τῆς γεωμετρίας εἶναι καθ' ἑαυτὰ τόσον σοβαρά, ὥστε εἶναι εὐπρόσδεκτος κάθε εὐκαιρία δυναμένη νὰ τὰ καταστήσῃ διασκεδαστικά».

** Ὁ Wren δὲν ἠθέλησε νὰ λάβῃ μέρος εἰς τὸν διαγωνισμόν, γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἠσχολήθη μὲ τὴν κυκλοειδῆ καὶ μάλιστα μὲ ἀξιόλογον ἐπιτυχίαν.

383. Μὲ τὴν ἀνατολὴν τοῦ 1659 εἰσήρχετο ἐν ἰσχύϊ ἡ ὑποχρέωσις, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀναλάβει ὁ Pascal, νὰ κοινοποιήσῃ τὰς λύσεις τῶν προταθέντων προβλημάτων. Ὑπὸ χρονολογίαν πράγματι 1ης Ἰανουαρίου, ἐγκαταλείψας τὸν μανδύαν τῆς ἀνωνυμίας ὑπὸ τὸν ὁποῖον ἕως τότε ἐκαλύπτετο, ἐδημοσίευσε μίαν ἐργασίαν ὑπὸ τὸν τίτλον Διάφοροι ἐφευρέσεις εἰς τὴν γεωμετρίαν (Diverses inventions en géométrie) καὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα Amos Dettonville, ποὺ ἀποτελεῖ ἀνάγραμμα τοῦ Louis de Montalte, ἑνὸς ψευδωνύμου, ὑπὸ τὸ ὁποῖον εἶχεν ἄλλοτε δημοσιεύσει τὸ ἔργον του Lettres provinciales. Ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω τίτλον λοιπὸν ἔχουν συγκεντρωθῆ ἀρκεταὶ σημαντικαὶ ἐργασίαι, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ μνημονεύσωμεν:

α) Ἐπιστολὴ τοῦ A. Dettonville πρὸς τὸν de Carcavy. Αὕτη περιλαμβάνει γενικὴν μέθοδον ἐρεύνης τῶν κέντρων βάρους, μίαν πραγματείαν περὶ τριγράμμων (trilinei), ἄλλην περὶ κυκλικῶν τόξων, ἄλλην περὶ κυκλικῶν στερεῶν (σχήματα γεννώμενα ὑπὸ κυκλικοῦ τόξου στρεφομένου περὶ μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του), καὶ τέλος ἡ τόσον ἀναμενομένη πραγματεία ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς μὲ τὰς λύσεις τῶν προταθέντων τὸ 1658 προβλημάτων.

β) Ἐπιστολὴ τοῦ A. Dettonville πρὸς τὸν de Sluse. Αὕτη περιέχει τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαστάσεων καὶ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου βάρους τῆς καμπύλης scala a chiocciola (κοχλιοειδής: σχῆμα μελετηθὲν ὑπὸ τοῦ Torricelli ἀπὸ τοῦ 1644), τὴν μελέτην τῶν κυλινδρικῶν τριγώνων καὶ ἑνὸς στερεοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ μιᾶς ἕλικος περὶ κῶνον (ἀτυχὴς ὀνομασία τῆς ἐπὶ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου καμπύλης τῆς προβαλλομένης ὀρθῶς ἐπὶ τὴν βάσιν κατὰ ἀρχιμήδειον ἕλικα).

γ) Ἐπιστολὴ τοῦ A. Dettonville πρὸς τὸν Huygens. Εἰς αὐτὴν περιέχεται ἡ εὐθειοποίησις ὅλων τῶν κυκλοειδῶν μέσῳ ἐλλειπτικῶν τόξων.

δ) Ἐπιστολὴ τοῦ A. Dettonville πρὸς A. D. D. S. (August D. de Sanglin ?), περιέχουσα τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος ἑνὸς τόξου ἀρχιμηδείου ἕλικος καὶ μιᾶς παραβολῆς.

Ὁ ἁπλοῦς αὐτὸς κατάλογος ἀποδεικνύει τὴν ποικιλίαν καὶ τὴν σπουδαιότητα τῶν ζητημάτων, ποὺ ἐπραγματεύθη ὁ Pascal, καὶ διὰ τοῦτο προκαλεῖ θλῖψιν τὸ γεγονός, ὅτι ἕνας λόγιος τῆς ἀξίας τοῦ Pascal κατεδέχθη νὰ χρησιμοποιήσῃ μέθοδον ἐκθέσεως, ἡ ὁποία φαίνεται ὡς ἐκλεγεῖσα ὄχι πρὸς διαφώτισιν, ἀλλ' ἐπισκότισιν, ὄχι διὰ νὰ καταπείσῃ ἀλλὰ διὰ νὰ τρέψῃ εἰς φυγὴν τοὺς ἀναγνώστας. Διότι (καὶ εἶναι τοῦτο παράπονον διατυπωθὲν πρῶτον ἀπὸ τὸν Huygens) ὁ Pascal περιωρίσθη πάντοτε νὰ ἐκθέτῃ μὲ γενικοὺς ὅρους τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀκολουθηθεῖσαν ὁδόν, χωρὶς νὰ φέρῃ εἰς πέρας τοὺς ὑπολογισμοὺς ποὺ ὁδηγοῦν εἰς τὰς προτάσεις ποὺ ἁπλῶς μόνον διατυπώνει. Οὕτω, σχετικῶς μὲ τὴν πρότασιν τοῦ κέντρου βάρους

τῆς συνήθους ἡμικυκλικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς εὐθειοποιήσεως ὅλων τῶν κυκλοειδῶν, εὑρίσκονται εἰς τὰ γραπτὰ τοῦ Pascal αἱ προκαταρκτικαὶ προτάσεις καὶ αἱ τελικαὶ ἐκφωνήσεις, ἐλλείπει ὅμως ὅ,τι εἶναι ἀπαραίτητον διὰ νὰ καταδειχθῇ πῶς αἱ τελευταῖαι ἀπορρέουν ἀπὸ τὰς πρώτας. Τοῦ ἐλαττώματος τούτου εἶναι ἀπηλλαγμένον μόνον τὸ σύντομον κείμενον, ποὺ ἀφορᾷ τὴν εὐθειοποίησιν τόξου τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος, δηλαδὴ ἕνα ζήτημα, τοῦ ὁποίου τὸ ἀποτέλεσμα δὲν παρουσιάζει καμμίαν πρωτοτυπίαν.

Ἐξετάζοντες κατὰ βάθος τοὺς συλλογισμοὺς τοῦ Pascal, ἀναγνωρίζομεν ὅτι οὗτος χρησιμοποιεῖ μὲ μεγάλην εὐχέρειαν τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων, ὅπως τὴν ἐδιδάχθη ὄχι ἀκριβῶς εἰς τὰς σκοτεινὰς σελίδας τοῦ ἰησουάτου τῆς Βολωνίας, ἀλλ' εἰς ἕνα ἔργον τοῦ A. Tacquet, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον. Μεταφραζόμενοι εἰς τὴν γλῶσσαν τῆς ἀλγέβρας, οἱ συλλογισμοί του συμπίπτουν κατὰ βάθος μὲ πολλὰς χαρακτηριστικὰς μεθόδους τοῦ σκέπτεσθαι εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν. Παρατηρεῖται γενικῶς, ὅτι ἡ ἱστορικὴ σημασία τῶν προαναφερθεισῶν ἐργασιῶν ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἐκ τῆς μελέτης αὐτῶν ἐνεπνεύσθη ὁ Leibniz (κατὰ ἰδικήν του ὁμολογίαν) τὴν ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν καὶ εἰδικώτερα τὸ «διαφορικὸν τρίγωνον» (ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἀπείρως γειτονικὰ σημεῖα καμπύλης καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐξ αὐτῶν ἀγομένων παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων), τοῦ ὁποίου ἔκαμε συστηματικὴν καὶ θαυμασίαν ἐκμετάλλευσιν.

Ἐκ τῶν ὅσων ἐλέχθησαν ἀνωτέρω, προκύπτει τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ περὶ τὴν κυκλοειδῆ ἀγών, ἂν καὶ ἔληξε χωρὶς ν' ἀναδείξῃ οὐσιαστικῶς νικητάς, δὲν ὑπῆρξεν ἄγονος διὰ τὴν ἐπιστήμην, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τόσον τὰς ἐργασίας τοῦ ὑποκινητοῦ τοῦ ἀγῶνος, ὅσον καὶ τὰς προσπαθείας ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔλαβον μέρος εἰς αὐτόν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν Pascal, γεγονὸς εἶναι ὅτι, ἂν καὶ ἐξ ἀφορμῆς τοῦ ἀγῶνος αὐτοῦ ἐκέρδισε δόξαν, ἡ φήμη του ὅμως ἐπεσκιάσθη. Ἡ κηλὶς μὲ τὴν ὁποίαν ἐστιγμάτισε τὸν ἑαυτόν του, συκοφαντῶν ἕνα ἄνδρα ἀνεπιλήπτου ἐντιμότητος καὶ μὴ εὑρισκόμενον πλέον ἐν ζωῇ διὰ ν' ἀμυνθῇ, θὰ παραμείνῃ εἰς βάρος του ἐφ' ὅσον θὰ ἔχῃ ἰσχὺν ὁ ἠθικὸς νόμος ὁ ἀπὸ αἰώνων κυβερνῶν τὴν ἀνθρωπότητα : ματαία εἶναι κάθε προσπάθεια ἀποκρύψεως τῆς ἀληθείας· αὕτη καταλήγει πάντοτε ν' ἀποκαλύπτεται ἀπαστράπτουσα μὲ ζωηρότερον φῶς πρὸς σύγχυσιν τοῦ ἀπερισκέπτου ἐκείνου, ποὺ ἐφαντάσθη ὅτι δύναται νὰ τὴν κακοποιήσῃ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVI

ΟΙ ΠΡΟΔΡΟΜΟΙ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

G. de S. Vincent καὶ A. Tacquet

384. Μέγιστον τίτλον τιμῆς διὰ τὴν γαλιλαϊκὴν σχολὴν ἀποτελεῖ τὸ γεγονός, ὅτι ὑπ' αὐτῆς ἐτέθησαν αἱ βάσεις καὶ ἐπραγματοποιήθησαν πλεῖσται ἐφαρμογαὶ τῆς μεθόδου τῶν ἀδιαιρέτων, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ στραφῇ ἡ προσοχὴ τῶν μαθηματικῶν πρὸς τὴν ἐπιτακτικὴν ἀνάγκην τῆς τελειοποιήσεως τῶν μεθόδων τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ νὰ δυνηθοῦν ν' ἀνταποκριθοῦν μετὰ μαθηματικῆς αὐστηρότητος εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου. Ἀποδείξεις τοῦ γενικοῦ τούτου προσανατολισμοῦ τῶν πνευμάτων ἀπαντῶνται εἰς τὰς προηγηθείσας σελίδας ἀρκεταί· καταφανὴς εἶναι, λόγου χάριν, εἰς τὸν Fermat, τὸν Descartes καὶ εἰδικώτερα εἰς τὸν Pascal ἡ ἐπίδρασις ἐκ μέρους τῆς Ἰταλίας, πρὸς τὴν ὁποίαν ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Γαλιλαίου εἶχον ἐστραμμένα τὰ βλέμματά των οἱ ἐργάται τῶν ἐπιστημῶν. Μεταγενέστεραι ἀποδείξεις, ὄχι ὀλιγώτερον σαφεῖς, προκύπτουν ἐκ τῆς μελέτης τῶν ἔργων ἄλλων ἐρευνητῶν τῆς ἰδίας ἐποχῆς, πρὸς τοὺς ὁποίους τώρα θὰ στραφῶμεν, ἀρχίζοντες, κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἀπὸ τὸν Gregor de S. Vincent.

Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Bruges τὴν 8ην Σεπτεμβρίου 1584. Ἀφοῦ συνεπλήρωσεν εἰς τὴν Γάνδην ἑξαετῆ κύκλον σπουδῶν, μετέβη εἰς τὴν Ρώμην, ὅπου τὴν 21ην Ὀκτωβρίου 1605 ἐγένετο μέλος τῆς Ἑταιρείας τοῦ Ἰησοῦ, παρέμεινε δὲ εἰς τὴν αἰωνίαν πόλιν μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ Clavio, τοῦ ὁποίου ἦτο ἕνας ἐκ τῶν προσφιλεστάτων. Κατόπιν ἐπέστρεψεν εἰς τὸ Βέλγιον, διὰ νὰ διδάξῃ διαφόρους κλάδους εἰς τὰ δημόσια σχολεῖα τῆς Louvain, τῆς Bois-le-Duc, τῆς Ἀμβέρσης· ἐκεῖ εἶχεν ὡς προϊστάμενον τὸν d'Aguillon (§ 308), ὁ ὁποῖος τὸν ἀπέτρεψεν ἀπὸ τοῦ σχεδίου του νὰ μεταβῇ εἰς τὴν Κίναν ὡς ἱεραπόστολος, καταπείσας αὐτὸν ν' ἀφοσιωθῇ εἰς τὰ μαθηματικά. Τὸ 1625 ἐνόμισεν ὅτι ἀνεκάλυψε τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου καὶ ἔγραψε περὶ αὐτοῦ εἰς τὸν πατέρα Vitelleschi, γενικὸν ἡγούμενον τότε τοῦ τάγματος τῶν Ἰησουϊτῶν, ὁ ὁποῖος τὸν προσεκάλεσεν εἰς τὴν Ρώμην διὰ

νὰ συζητήσῃ ἐπὶ τοῦ θέματος μὲ τὸν πατέρα Cristoforo Grienberg (γενν. εἰς Hall τοῦ Τιρόλου τὸ 1564, ἀποθ. 11 Μαρτίου 1636), γνωστὸν ὡς ἕνα ἐκ τῶν τεσσάρων Ἰησουϊτῶν, τοὺς ὁποίους συνεβουλεύθη ὁ καρδινάλιος Bellarmino τὴν 19ην Ἀπριλίου 1611 γύρω ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ Sidereus nuncius τοῦ Γαλιλαίου, καὶ συγγραφέα Στοιχείων Τριγωνομετρίας (Ρώμη, 1630), ὅπου ἀπαντᾶται μία τιμὴ τοῦ π μὲ 38 δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ πατὴρ Γρηγόριος ἀνεχώρησεν ἀπὸ τὴν Louvain διὰ τὴν Ἰταλίαν τὴν 27ην Σεπτεμβρίου 1625. Αἱ συζητήσεις ἐπὶ τῆς ὑποτιθεμένης ἀνακαλύψεώς του παρετάθησαν πέραν τῆς διετίας, χωρὶς ν' ἀπολήξουν εἰς ἀποτέλεσμα, μέχρις ὅτου, περὶ τὰ τέλη τοῦ 1627, ἐπέστρεψεν εἰς τὸ Βέλγιον. Μετ' ὀλίγον ὅμως προσεκλήθη εἰς τὴν Πράγαν (τῆς ὁποίας τὸ Πανεπιστήμιον εἶχον ἐμπιστευθῆ εἰς τὴν Ἑταιρείαν τοῦ Ἰησοῦ). Ἡ διαμονή του ἐκεῖ ὑπῆρξε δυσμενεστάτη· διότι ὁ μαθηματικὸς μας, ἀφοῦ πρῶτον ὑπέστη μίαν προσβολὴν ἀποπληξίας, ἔχασε μέγα μέρος τῶν χειρογράφων του κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς πολιορκίας, τὴν ὁποίαν ὑπέστη ἡ πόλις τὸ 1631 ἐκ μέρους τῶν ἐλβετικῶν στρατευμάτων. Κάποιος συνάδελφός του — Roderigo Arriga — ἐπέτυχε νὰ περισώσῃ ἕνα μέρος τῶν χειρογράφων καὶ νὰ τὰ φέρῃ μαζύ του εἰς τὴν Βιέννην. Ἐκεῖ μετεκόμισεν ἐπίσης καὶ ὁ πατὴρ Γρηγόριος, ὁ ὁποῖος τὸ ἑπόμενον ἔτος ἐκλήθη νὰ διδάξῃ εἰς τὸ Κολλέγιον τῆς Γάνδης. Μετὰ δεκαετῆ ἀναμονήν, κατώρθωσε νὰ ἐπανακτήσῃ ὅλα τὰ χειρόγραφά του καὶ νὰ τὰ δημοσιεύσῃ. Τὸ 1659 ὑπέστη μίαν δευτέραν προσβολὴν ἀποπληξίας καὶ ἀπέθανε τὴν 27ην Ἰανουαρίου 1667.

385. Τὸ ἔργον ποὺ τοῦ ἐξασφαλίζει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης εἶναι ἕνα κολοσσιαῖον σύγγραμμα, εἰς μέγα φύλλον, ἐκ περίπου 1250 σελίδων, ἐκτυπωθὲν ἐν μέσῳ ἀνεκδιηγήτων καὶ ἀναριθμήτων δυσκολιῶν. Τὸ ἔργον φέρει διπλοῦν τίτλον, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη ἀρχίζουν τὸ ἕνα μὲ τὰς λέξεις Opus geometricum, τὸ ἄλλο μὲ τὰς λέξεις problema austriacum· αἱ τελευταῖαι προέρχονται ἀπὸ τὸ ὄνομα, ποὺ ἔδωσεν ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, πρὸς τιμὴν τοῦ ἀρχιδουκὸς Λεοπόλδου Γουλιέλμου, Κυβερνήτου τῶν Κάτω Χωρῶν, εἰς τὸν ὁποῖον ἀφιεροῦτο τὸ ἔργον.

Ὁ ἀναγνώστης εὑρίσκει εἰς αὐτὸ μέγα πλῆθος πρωτοτύπων σκέψεων καὶ ἐρευνῶν ἀξιολόγων, ὅπως εἶναι π.χ. αἱ ἑξῆς : μία πρωτότυπος ἀναμόρφωσις τῆς ἀρχαίας θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν, ὁ ὁρισμὸς καὶ ἡ μελέτη μιᾶς νέας κατηγορίας καμπύλων τοῦ ἐπιπέδου τετάρτης τάξεως (αἱ οὕτω καλούμεναι δυναταὶ παραβολαί: parabole virtuali) καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τοὐλάχιστον τριῶν μεθόδων μετασχηματισμοῦ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, μία ἐκ τῶν ὁποίων (ducere planum in planum) ἐπέτρεψεν εἰς τὸν συγγραφέα νὰ φθάσῃ εἰς ἀποτελέσματα ὑπαγόμενα σήμερον εἰς τὴν ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν.

Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἡ ἀνακάλυψις τοῦ γεγονότος, ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς τῆς ὑπερβολῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν λογαρίθμων καί, ἂν ὄχι μία πρώτη ἀνακάλυψις, τοὐλάχιστον μιὰ νέα ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος δύο τόξων ἀνηκόντων ἀντιστοίχως εἰς μίαν παραβολὴν καὶ μίαν ἀρχιμήδειον ἕλικα (§ 316, § 380). Ἂς σημειωθῇ τέλος, ὅτι ἀπὸ τὴν λέξιν «exhaurire», ποὺ ἐχρησιμοποίει συχνά, προέκυψεν ὁ τεχνικὸς ὅρος «methode d' exhaustion» (μέθοδος τῆς ἐξαντλήσεως), ποὺ εὑρίσκεται εἰς κοινὴν χρῆσιν καὶ σήμερον. Εἶναι λοιπὸν πλήρως δικαιολογημένος ὁ θαυμασμὸς τοῦ Leibniz πρὸς τὸν πατέρα Γρηγόριον.

Ἀτυχῶς, ἐπίστευσεν ὅτι εἶχε λύσει τὸ διασημότερον πρόβλημα τῆς γεωμετρίας, συμπεριληφθεὶς οὕτω εἰς τὸν κατάλογον τῶν πολλῶν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐνόμισαν ὅτι εἶχον τετραγωνίσει τὸν κύκλον. Ἐκ τῶν τεσσάρων μεθόδων, ποὺ ὑπέδειξε πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τούτου*, οὐδεμία βεβαίως ἐκρίθη ἱκανοποιητικὴ (πρᾶγμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ λάβωμεν εὐκαιρίαν νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον). Αὐτὸ βεβαίως δὲν εἶναι ἐπαρκὲς διὰ νὰ τὸν καταβιβάσωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον τόσων ἄλλων, περὶ τῶν ὁποίων ἡ Ἱστορία ἐξέφερε βαρεῖαν καταδίκην.

Ἐν κατακλεῖδι παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πατὴρ Γρηγόριος ἐδοκίμασεν ἐπίσης νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου. Ἡ ἐργασία, τὴν ὁποίαν ἀφιέρωσεν εἰς αὐτὴν τὴν προσπάθειαν, εὑρεθεῖσα μεταξὺ τῶν καταλοίπων του, ἐδημοσιεύθη μετὰ τὸν θάνατόν του ὑπὸ ἑνὸς ἀφωσιωμένου φίλου, τοῦ πατρὸς Sarasa, πρὸς μεγαλυτέραν δόξαν αὐτοῦ καὶ τῆς Ἑταιρείας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκεν.

386. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος, τὸ Βέλγιον παρήγαγε καὶ ἡ Ἑταιρεία τοῦ Ἰησοῦ ἐδέχθη εἰς τοὺς κόλπους της πολλοὺς μαθηματικοὺς μεγάλης ἀξίας. Ἔχομεν ἤδη κάμει νύξιν περὶ τοῦ πατρὸς della Faille θ' ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸν André Tacquet. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς τὴν Ἀμβέρσαν τὴν 23ην Ἰουνίου 1612. Τὴν 31ην Ὀκτωβρίου 1629 ἐνετάχθη εἰς τὴν Ἑταιρείαν τοῦ Ἰησοῦ. Ἐδίδαξε πρῶτον εἰς τὴν Louvain, κατόπιν, ἀπὸ τοῦ 1655, εἰς τὴν πόλιν ὅπου ἐγεννήθη, καὶ ὅπου ἀπέθανε τὴν 22αν Δεκεμβρίου 1660. Τὸ ἔργον του Cylindricorum et Annularium Libri quatuor[26], δημοσιευθὲν εἰς Ἀμβέρσαν κατὰ τὰ ἔτη 1651 καὶ 1659, ἀποκαλύπτει ἕνα μαθητὴν τοῦ G. de Saint Vincent. Ἡ μέθοδος τῶν ἀδιαιρέτων ἐμφανίζεται εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ μὲ σημαντικὰς διασαφήσεις καὶ ἐφαρμογάς. Συμμορφούμενος πρὸς τοὺς κανονισμοὺς τοὺς διέποντας τὸ τάγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἀνῆκε,

* Οἱ ἐπιθυμοῦντες νὰ κατατοπισθοῦν ἐν συντομίᾳ περὶ τοῦ σφάλματος ποὺ διέπραξεν ὁ ἐλλογιμώτατος πατήρ, ἂς μελετήσουν τὰς σελίδας 277 - 280 τοῦ XI τόμου τῶν Ἁπάντων τοῦ Huygens, ὅπου θὰ μάθουν ἐπίσης εἰς τί συνίσταται ἡ μέθοδος «ducere planum in planum».

ἔσπευσε ν' ἀποστείλῃ ἕνα ἀντίτυπον τοῦ I Μέρους τοῦ ἔργου του εἰς τὸν γενικὸν ἡγούμενον τοῦ τάγματος, αὐτὸς δὲ ἀπήντησεν ἐγκωμιάζων τὴν προσφοράν του εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ προτρέπων αὐτὸν νὰ γράψῃ μίαν πλήρη σειρὰν μαθηματικῶν μαθημάτων (Cours) προωρισμένων νὰ ἐξυπηρετήσουν τοὺς φοιτοῦντας εἰς τὰ ὑπὸ τῶν Ἰησουϊτῶν κηδεμονευόμενα σχολεῖα. Τῆς προτροπῆς γενομένης μετὰ ζήλου δεκτῆς, ὁ Tacquet ἀπὸ τοῦ 1654 κατώρθωσε νὰ δημοσιεύσῃ τὸ ἔργον Elementa geometriae planae ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata[27], ἡ ἀξία καὶ ἡ ἐπιτυχία τοῦ ὁποίου τεκμαίρονται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἐκδόσεων καὶ μεταφράσεων ποὺ ἐπηκολούθησαν. Ὡς ἀξιέπαινον χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τοῦ βιβλίου ἂς σημειώσωμεν τὴν ἐμπεριστατωμένην ἱστορικοῦ περιεχομένου εἰσαγωγήν.

Μετὰ δύο ἔτη ἐδημοσίευσεν ἕνα ἄλλο μέρος τοῦ προβλεπομένου Cours ὑπὸ τὸν τίτλον Arithmeticae theoria et praxis acurate demonstrata[28], τοῦ ὁποίου εἰς βραχύτατον χρονικὸν διάστημα ἐγένοντο τέσσαρες ἐκδόσεις. Εἶναι τὸ πρῶτον ἔργον τοῦ εἴδους του, ὅπου κάθε πρότασις, καὶ κάθε κανὼν συνοδεύονται ἀπὸ μίαν ἀπόδειξιν, καιτονοτομία λογικὴ ὅσον καὶ σημαντική, τῆς ὁποίας ὁ συγγραφεύς, μὲ εὔλογον ὑπερηφάνειαν, διεξεδίκει ὑπὲρ ἑαυτοῦ τὴν πατρότητα.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον, ἐκτὸς μιᾶς ἱστορικῆς ἀναδρομῆς γύρω ἀπὸ τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκεται, διὰ πρώτην φορὰν εἰς τυπωμένον σύγγραμμα, ἡ ἔκφρασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον α καὶ λόγον $\omega < 1$· πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ μας τύπου:

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha\,\omega^{\nu} = \frac{\alpha}{1-\omega},$$

τὸν ὁποῖον ἐξάγει ὁ Tacquet μὲ διάβασιν εἰς τὸ ὅριον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα πεπερασμένων τὸ πλῆθος ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ὁ συγγραφεὺς προσθέτει: «Σὺ ὁ ὁποῖος μὲ διαβάζεις, θὰ ἴδῃς, πιστεύω, μὲ πόσην εὐκολίαν φθάνομεν εἰς ὅ,τι σοῦ ὑπεσχέθην προηγουμένως, δηλαδὴ τὸ πέρασμα ἀπὸ μίαν πρόοδον πεπερασμένην εἰς ἄλλην ἄπειρον. Καὶ προκαλεῖ εὐλόγως ἔκπληξιν τὸ γεγονός, ὅτι οἱ ἀριθμητικοὶ ποὺ ἐγνώριζον τὸ θεώρημα διὰ τὰς πεπερασμένας προόδους, ἠγνόουν αὐτὸ ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὰς ἀπεριορίστους, καίτοι ἐξάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ πρῶτον». Ὁ ἱστορικός, χωρὶς ν' ἀφαιρέσῃ τίποτε ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ Tacquet, θὰ παρατηρήσῃ ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εἶχε φθάσει καὶ ὁ Fermat (§ 363) καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ ἔτος τὸ ἐδημοσίευσεν ὁ John Wallis εἰς τὴν Arithmetica infinitorum, περὶ τῆς ὁποίας θὰ λάβωμεν ἀφορμὴν νὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον (§ 389). Ἀδιαφιλονίκητον δεῖγμα τῆς ὑψηλῆς ἐκτιμήσεως, ἡ ὁποία περιέβαλλε τὸν Tac-

quet, εἶναι ἡ δημοσίευσις τῆς συλλογῆς ὅλων τῶν ἔργων του, κατὰ τὸ ἔτος 1669 ἀρχικῶς, καὶ ἡ ἐπανέκδοσις αὐτῶν τὸ 1707.

Gilles Personnes de Roberval

387. Τὸν ἄνθρωπον αὐτόν, τοῦ ὁποίου ἀφηγήθημεν ἤδη τὴν ζωὴν (§ 342), συνηντήσαμεν ἀναμεμιγμένον εἰς μερικὰς φιλονικίας μεταξὺ μαθηματικῶν, φιλονικίας αἱ ὁποῖαι ἐσημειώθησαν περὶ τὸ ἔτος 1650 καὶ εἰς τὴν ἔξαψιν τῶν ὁποίων συνέβαλε διὰ τῆς προβολῆς δικαιωμάτων προτεραιότητος ἐπὶ ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐκράτει ζηλοτύπως μυστικὰς πρὸς ἐξασφάλισιν ὑπεροχῆς ἔναντι ἐνδεχομένων ἀνταγωνιστῶν του εἰς τὴν κατάληψιν τῆς «ἕδρας τοῦ Ramus», ἡ ὁποία ἀπετέλει καὶ τὴν κορυφαίαν του φιλοδοξίαν. Μεταξὺ τῶν ἀνακαλύψεών του εἶναι ὁ τετραγωνισμὸς τῶν παραβολῶν ἀνωτέρου βαθμοῦ καὶ τῆς κυκλοειδοῦς, τὸν ὁποῖον ἰσχυρίζετο ὅτι ἐπέτυχε προηγηθεὶς τοῦ Torricelli. Ἐπὶ πλέον ἐπέτυχε τὴν εὐθειοποίησιν τῆς κυκλοειδοῦς, προηγηθείς, λέγει, τοῦ Wren καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, προηγηθείς, ὡς λέγει, τοῦ B. Cavalieri καὶ τοῦ A. Girard.

Ἡ συστηματικὴ αὐτὴ δυσπιστία τὸν ἔβλαψε, διότι τὸν ἠμπόδισε — μοναδικὸν ὄντα καθηγητὴν μεταξὺ τῶν συμμετεχόντων εἰς τὰς ἔριδας τῆς ἐποχῆς του — νὰ τεθῇ ἐπὶ κεφαλῆς μιᾶς σχολῆς, καὶ ὅταν τὸ 1693 ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων ἀπεδέχθη τὴν πρότασιν τοῦ Ἀββᾶ Gallois νὰ δημοσιεύσῃ εἰς τὰ χρονικά της τὸ σύνολον τῶν ἔργων του, ταῦτα ἐφάνησαν πλέον ὡς παλαιωθέντα καὶ χρήσιμα μόνον διὰ τοὺς ἱστορικούς, εἰς τοὺς ὁποίους ἐδημιούργησαν προβλήματα συχνὰ ἄλυτα, καθ' ὅσον ὅλα τὰ ἔργα του εἶναι ἄνευ χρονολογικῆς ἐνδείξεως.

Μεταξὺ τούτων ἀπαντᾶται πρὸ πάντων ἕνα ὑπόμνημα μὲ τὸν τίτλον Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes de lignes courbes[29], εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται καὶ ἐφαρμόζεται ἡ γνωστὴ μέθοδος κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδου καμπύλης, ποὺ ὀνομάζεται συνήθως «μέθοδος τοῦ Roberval».

Ὡς ἱστορικὸν τεκμήριον, τὸ ἐν λόγῳ ὑπόμνημα μηδαμινὴν ἔχει ἀξίαν, διότι συνεγράφη εἰς ἐποχὴν ἀκαθόριστον ἀπὸ ἕνα μαθητὴν τοῦ Roberval (François de Verdus), ἀνεθεωρήθη δὲ κατόπιν ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, μὲ τὴν προσθήκην κριτικῶν παρατηρήσεων τοῦ ἰδίου εἰς ὡρισμένα σημεῖα, τὸ 1668, πρὶν ἀναγνωσθῇ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων. Παρὰ ταῦτα, τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου γίνεται μνεία καὶ ἐφαρμογὴ εἰς ἕνα κείμενον δημοσιευθὲν ὑπὸ τοῦ Mersenne τὸ 1644, δηλαδὴ τὸ ἔτος ποὺ ἐτίθετο εἰς κυκλοφορίαν ὑπὸ τοῦ Torricelli τὸ γνωστόν μας βιβλίον του. Ἐξ ἐπιστολῶν ὅμως αὐθεντικῶν τῶν δύο διισταμένων προκύπτει, ὅτι ἀμφότεροι εἶχον φθάσει ἐκεῖ

quet, εἶναι ἡ δημοσίευσις τῆς συλλογῆς ὅλων τῶν ἔργων του, κατὰ τὸ ἔτος 1669 ἀρχικῶς, καὶ ἡ ἐπανέκδοσις αὐτῶν τὸ 1707.

Gilles Personnes de Roberval

387. Τὸν ἄνθρωπον αὐτόν, τοῦ ὁποίου ἀφηγήθημεν ἤδη τὴν ζωὴν (§ 342), συνηντήσαμεν ἀναμεμιγμένον εἰς μερικὰς φιλονικίας μεταξὺ μαθηματικῶν, φιλονικίας αἱ ὁποῖαι ἐσημειώθησαν περὶ τὸ ἔτος 1650 καὶ εἰς τὴν ἔξαψιν τῶν ὁποίων συνέβαλε διὰ τῆς προβολῆς δικαιωμάτων προτεραιότητος ἐπὶ ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐκράτει ζηλοτύπως μυστικὰς πρὸς ἐξασφάλισιν ὑπεροχῆς ἔναντι ἐνδεχομένων ἀνταγωνιστῶν του εἰς τὴν κατάληψιν τῆς «ἕδρας τοῦ Ramus», ἡ ὁποία ἀπετέλει καὶ τὴν κορυφαίαν του φιλοδοξίαν. Μεταξὺ τῶν ἀνακαλύψεών του εἶναι ὁ τετραγωνισμὸς τῶν παραβολῶν ἀνωτέρου βαθμοῦ καὶ τῆς κυκλοειδοῦς, τὸν ὁποῖον ἰσχυρίζετο ὅτι ἐπέτυχε προηγηθεὶς τοῦ Torricelli. Ἐπὶ πλέον ἐπέτυχε τὴν εὐθειοποίησιν τῆς κυκλοειδοῦς, προηγηθείς, λέγει, τοῦ Wren καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, προηγηθείς, ὡς λέγει, τοῦ B. Cavalieri καὶ τοῦ A. Girard.

Ἡ συστηματικὴ αὐτὴ δυσπιστία τὸν ἔβλαψε, διότι τὸν ἠμπόδισε — μοναδικὸν ὄντα καθηγητὴν μεταξὺ τῶν συμμετεχόντων εἰς τὰς ἔριδας τῆς ἐποχῆς του — νὰ τεθῇ ἐπὶ κεφαλῆς μιᾶς σχολῆς, καὶ ὅταν τὸ 1693 ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων ἀπεδέχθη τὴν πρότασιν τοῦ Ἀββᾶ Gallois νὰ δημοσιεύσῃ εἰς τὰ χρονικά της τὸ σύνολον τῶν ἔργων του, ταῦτα ἐφάνησαν πλέον ὡς παλαιωθέντα καὶ χρήσιμα μόνον διὰ τοὺς ἱστορικούς, εἰς τοὺς ὁποίους ἐδημιούργησαν προβλήματα συχνὰ ἄλυτα, καθ' ὅσον ὅλα τὰ ἔργα του εἶναι ἄνευ χρονολογικῆς ἐνδείξεως.

Μεταξὺ τούτων ἀπαντᾶται πρὸ πάντων ἕνα ὑπόμνημα μὲ τὸν τίτλον Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes de lignes courbes[29], εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται καὶ ἐφαρμόζεται ἡ γνωστὴ μέθοδος κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδου καμπύλης, ποὺ ὀνομάζεται συνήθως «μέθοδος τοῦ Roberval».

Ὡς ἱστορικὸν τεκμήριον, τὸ ἐν λόγῳ ὑπόμνημα μηδαμινὴν ἔχει ἀξίαν, διότι συνεγράφη εἰς ἐποχὴν ἀκαθόριστον ἀπὸ ἕνα μαθητὴν τοῦ Roberval (François de Verdus), ἀνεθεωρήθη δὲ κατόπιν ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, μὲ τὴν προσθήκην κριτικῶν παρατηρήσεων τοῦ ἰδίου εἰς ὡρισμένα σημεῖα, τὸ 1668, πρὶν ἀναγνωσθῇ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων. Παρὰ ταῦτα, τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου γίνεται μνεία καὶ ἐφαρμογὴ εἰς ἕνα κείμενον δημοσιευθὲν ὑπὸ τοῦ Mersenne τὸ 1644, δηλαδὴ τὸ ἔτος ποὺ ἐτίθετο εἰς κυκλοφορίαν ὑπὸ τοῦ Torricelli τὸ γνωστόν μας βιβλίον του. Ἐξ ἐπιστολῶν ὅμως αὐθεντικῶν τῶν δύο διισταμένων προκύπτει, ὅτι ἀμφότεροι εἶχον φθάσει ἐκεῖ

πολλὰ ἔτη προηγουμένως, ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων. Θὰ ἦτο λοιπὸν δικαιοσύνης τεκμήριον νὰ ὀνομάσωμεν τὴν μέθοδον μὲ τὸ διπλοῦν ὄνομα «Roberval - Torricelli», χωρὶς νὰ ὑπερβάλλωμεν τὴν ἀξίαν της, ὅπως ἔκαμεν ὁ Pascal εἰς τὴν Histoire de la roulette (§ 380), ἰσχυρισθεὶς ὅτι ἡ μέθοδος εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς πᾶν εἶδος ἐπιπέδου καμπύλης.

Εἶναι ἄξιον σημειώσεως, πρὸς τιμὴν τοῦ Roberval, ὅτι ἐνῷ ὁ Torricelli περιωρίσθη εἰς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου μόνον ἐπὶ κατασκευῆς ἐφαπτομένων τῆς παραβολῆς, ὁ Roberval ἔκαμε χρῆσιν τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος χαράξεως ἐφαπτομένων εἰς ὅλας τὰς καμπύλας ποὺ ἦσαν γνωσταὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς του, ἤτοι : παραβολῆς, ὑπερβολῆς, ἐλλείψεως, κογχοειδοῦς τοῦ Νικομήδους (τῆς ὁποίας οἱ δύο κλάδοι θεωροῦνται κεχωρισμένως), κογχοειδοῦς τοῦ κύκλου καὶ εἰδικώτερον τοῦ λείμακος τοῦ Pascal*, ἀρχιμηδείου ἕλικος, τετραγωνιζούσης (εἰς αὐτὴν πρῶτος ὁ Roberval ἠρεύνησε καὶ τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ τετραγώνου ἐξ οὗ παράγεται ἡ καμπύλη), κυκλοειδοῦς (ἡ ὁποία ἀποκαλεῖται «roulette ἢ τροχοειδὴς τοῦ Roberval» καὶ εἰκονίζεται μὲ τὸ αὐτὸ σχῆμα ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν πρὸς Mersenne ἐπιστολήν, § 381), ἡμιτονοειδοῦς καὶ καρτεσιανῆς παραβολῆς. Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω κατασκευαὶ προκύπτουν ὡς ἐφαρμογαὶ θεωριῶν τῆς κινητικῆς, μὲ τὰς ὁποίας καὶ ἀρχίζει τὸ ἀνωτέρω ὑπόμνημα καὶ αἱ ὁποῖαι κορυφοῦνται εἰς τὴν σύνθεσιν δύο ταχυτήτων μέσῳ τοῦ παραλληλογράμμου.

388. Εἰς τὸ κείμενον αὐτὸ τοῦ Roberval, ποὺ ἀνήκει εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν, ἀνταποκρίνεται ἄλλο ἀνῆκον εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, τὸ Traité des indivisibles (Πραγματεία περὶ τῶν ἀδιαιρέτων). Ἂν καὶ ματαίως θ' ἀναζητήσῃ ὁ ἀναγνώστης τὸ ὄνομα τοῦ Cavalieri, ἐν τούτοις ὁ τίτλος ἰσοδυναμεῖ πρὸς μίαν ὁμολογίαν τῆς πηγῆς, ἐκ τῆς ὁποίας ἤντλησεν ὁ συγγραφεύς. Εἰς ἐπιβεβαίωσιν τῆς τοιαύτης προελεύσεως ἔρχεται τὸ γεγονός, ὅτι εἰς μίαν ἐπιστολήν, ποὺ ἔγραψεν ὁ Roberval τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1643 εἰς ἀπάντησιν ἄλλης τοῦ Torricelli, γίνεται μεθ' ὑπερηφανείας μνεία τῶν τελειοποιήσεων, τὰς ὁποίας ἐπέφερεν εἰς τὴν μέθοδον τοῦ ἐκ Βολωνίας καθηγητοῦ.

Πότε ἐγράφη τὸ ἀναφερθὲν Traité δὲν δύναται κανεὶς νὰ βεβαιώσῃ. Ἐπειδὴ ὅμως εὑρίσκεται εἰς αὐτὸ ἡ γένεσις τῆς κυκλοειδοῦς, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἶναι ἀσφαλῶς μεταγενέστερον τῆς κατ' ἐπανάληψιν μνημονευθείσης ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν Mersenne, τὸ 1637. Εἰς τὸ ἔργον

* Εἶναι ἡ κογχοειδὴς τοῦ κύκλου εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὸ δὲ σταθερὸν μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Ἡ καμπύλη εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας. Γενικὴ εἶναι ἡ γνώμη, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη ἐξητάσθη τὸ πρῶτον ὄχι ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Blaise, ἀλλὰ τοῦ πατρός του Étienne.

αὐτὸ ἡ μέθοδος τοῦ Cavalieri ἐφαρμόζεται εἰς τὴν λύσιν πολλῶν προβλημάτων, διαδεχομένων ἄλληλα κατὰ μίαν σειράν, ἡ ὁποία ἐπιδέχεται κριτικήν. Ὁ συγγραφεὺς ἀρχίζει μὲ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, διὰ νὰ περάσῃ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς κυκλικῆς κογχοειδοῦς. Στρεφόμενος κατόπιν εἰς τὴν στερεομετρίαν, προσδιορίζει τοὺς λόγους τῶν ὄγκων μεταξὺ μιᾶς σφαίρας ἢ ἑνὸς σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἢ κώνου ἐγγεγραμμένου, ἐπανευρίσκων προτάσεις ἤδη γνωστάς.

Περισσότερον πρωτότυπον εἶναι τὸ πρόβλημα νὰ χαραχθῇ ἐπὶ ὀρθοῦ κυλίνδρου, μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα διαβήτου, σχῆμα γνωστοῦ ἐμβαδοῦ. Ἡ προκύπτουσα καμπύλη καλεῖται διὰ προφανεῖς λόγους «κυκλο - κυλινδρική». Ἐπιστρέφων ἔπειτα εἰς τὴν στερεομετρίαν ὑπὸ περιωρισμένην ἔννοιαν, προβαίνει εἰς τὴν λύσιν σημαντικῶν προβλημάτων, ὅπως τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ὄγκων ποὺ παράγει ἡ κυκλοειδὴς στρεφομένη περὶ τὴν βάσιν ἢ τὴν κορυφαίαν ἐφαπτομένην. Τὸ ἔργον κλείει μὲ μερικὰς θεωρίας περὶ κέντρων βάρους καὶ ἐφαρμογὰς εἰς τὸ παραβολικὸν κωνοειδὲς (ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές).

Μερικὰ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα ποὺ ἀνεφέρθησαν ἐπανευρίσκονται καὶ εἰς ἕνα ὑπόμνημα ὑπὸ τὸν τίτλον De trochoide ejusque spatio (Περὶ τροχοειδοῦς καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ της). Ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὰ ἄλλα κείμενα τοῦ Roberval, δὲν ὑπάρχει καὶ εἰς αὐτὸ χρονολογία, ἀλλ' ἐπειδὴ ἀναφέρεται ἐπίσης ἡ εὐθειοποίησις τῆς συνήθους κυκλοειδοῦς, εἶναι πιθανὸν ὅτι δὲν ἐγράφη πρὸ τοῦ 1658. Ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενον, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸ ἡμῶν μίαν μονογραφίαν, τῆς ὁποίας σκοπὸς εἶναι νὰ συνοψίσῃ ὅσα μέχρι τότε ἦσαν γνωστὰ περὶ τῆς ἐνδόξου καμπύλης.

Χωρὶς νὰ σταματήσωμεν εἰς ἄλλα μικρότερα γραπτά, ἀποτελοῦντα μέρος τῆς πολεμικῆς τοῦ Roberval ἐναντίον τοῦ Torricelli, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ὅλα τὰ ἔργα του ὁ ἐν λόγῳ γεωμέτρης οὐδέποτε καταφεύγει εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν. Ὅτι ὅμως δὲν ἔμεινεν ἀδιάφορος πρὸς τὴν μαθηματικὴν κίνησιν, ἡ ὁποία εἶχεν ὡς ἀφετηρίαν τὰ ἔργα τοῦ Viète, ἀποδεικνύεται ἀπὸ μερικὰ γραπτά του φέροντα τὸν τίτλον De recognitione aequationum e De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione[39]. Αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς σχόλια εἰς συγγενῆ ἔργα τοῦ μεγάλου ἐκείνου μαθηματικοῦ, τοὺς συμβολισμοὺς τοῦ ὁποίου ὁ Roberval πιστῶς διετήρησεν. Διὰ τὴν ἀλήθειαν, ἀπαντᾶται τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος ποὺ εἰσήγαγεν ὁ Descartes, ἀλλὰ ποῖος ἐγγυᾶται ὅτι δὲν πρόκειται περὶ μετατροπῆς γενομένης ὑπὸ τοῦ ἐκδότου κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν;

John Wallis

389. Θὰ περάσωμεν ἀκόμη μίαν φορὰν τὴν Μάγχην, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὰ σπουδαιότερα ἔργα ἑνὸς ἐπιστήμονος, τὸν ὁποῖον συνηντήσαμεν δύο φορὰς ὡς λαβόντα μέρος εἰς προκλήσεις μαθηματικῶν ἀνταγωνισμῶν καὶ τοῦ ὁποίου ἐδώσαμεν ἤδη τὴν βιογραφίαν (§ 360). Τὸ 1655, ἓξ ἔτη μετὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ κατάληψιν τῆς καθηγητικῆς ἕδρας, τὴν ὁποίαν ἐπὶ μακρὸν ἐλάμπρυνεν, ὁ John Wallis ἐδημοσίευσε (μὲ ἀφιέρωσιν εἰς τὸν Oughtred) τὴν Arithmetica infinitorum (Ἀριθμητικὴ τῶν ἀπείρων), ἔργον τὸ ὁποῖον ἐπέπρωτο νὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ τὴν ἀθανασίαν. Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εἶναι καταφανῆ τὰ ἴχνη τῆς ἐπιδράσεως τοῦ συγγραφέως τῆς Γεωμετρίας τῶν ἀδιαιρέτων, ὄχι ἀμέσως, ἀλλ' ἐμμέσως διὰ τοῦ Torricelli, τοῦ ὁποίου τὸ 1650 ἐγνώρισεν ὁ Wallis τὸ ἔργον Opera geometrica. Ἡ ἐπιθυμία του νὰ μελετήσῃ ἀπ' εὐθείας τὰ κείμενα τοῦ Cavalieri δὲν κατέστη δυνατὸν ποτὲ νὰ ἐκπληρωθῇ. Ἀναγνωρίζοντες τοιαύτην ἐπίδρασιν δὲν σημαίνει βεβαίως, ὅτι ἀρνούμεθα τὴν πρωτοτυπίαν τοῦ Wallis, ὁ ὁποῖος ἔχει ὑπὲρ αὐτοῦ τὴν μεγίστην τιμήν, ὅτι ἐξεμεταλλεύθη ἐπ' ὠφελείᾳ τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν τὰς ἐννοίας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι εἰς τὴν σχολὴν τοῦ Γαλιλαίου ἐφηρμόσθησαν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων. Εἴδομεν ὅτι οἱ ἰταλοὶ γεωμέτραι (Cavalieri καὶ Torricelli) ἁμιλλώμενοι πρὸς τοὺς γάλλους (Fermat, Descartes, Roberval) εἶχον ἐπιτύχει, μὲ μεθόδους μᾶλλον ἢ ἧττον ἀκριβεῖς, νὰ τετραγωνίσουν ὅλας τὰς καμπύλας $y = px^n$, τοῦ n ὄντος ἀριθμοῦ θετικοῦ. Ἡ πρώτη ὅμως γενικὴ ἀπόδειξις τοῦ σχετικοῦ ἀποτελέσματος ὀφείλεται εἰς τὸν Wallis, ὁ ὁποῖος μελετῶν τὴν καμπύλην:

$$a^{n-1}\, y = x^n \qquad (1)$$

ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς ἕνα τόξον αὐτῆς, ἐφαπτόμενον εἰς τὴν ἀρχήν, τὴν ἀκραίαν τεταγμένην καὶ τὸν ἄξονα τῶν x ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς παραστάσεως:

$$E = \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad (2)$$

Ὁ συλλογισμός, ποὺ ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἶναι ἐπίπονος, ἀλλ' ὁ μὴ ἔχων ὑπερβολικὰς ἀπαιτήσεις αὐστηρότητος θὰ τὸν εὕρῃ ἱκανοποιητικόν. Καὶ εἶναι τοῦτο ἀξιοσημείωτον, διότι εἰς τὴν συνέχειαν τῆς Arithmetica infinitorum δὲν ἀπαντῶνται σχεδὸν παρὰ βεβαιώσεις στηριζόμεναι εἰς ἕνα ἁπλοῦν «patet», ἰσοδύναμον πρὸς τὸ «εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν», ποὺ ἀποτελεῖ ἀληθὲς βάσανον εἰς τοὺς μελετῶντας τὴν Οὐράνιον Μηχανικὴν τοῦ Laplace. Εἶναι βεβαίως πρὸς δόξαν τοῦ Wallis, ὅτι ὅλαι αὐταὶ αἱ βεβαιώσεις ἀνεγνωρίσθησαν κατόπιν ὡς πλήρως σύμφωνοι μὲ τὴν ἀλήθειαν. Ἀναφέρονται δὲ εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων, τῶν

ὁποίων αἱ ἐξισώσεις γεννῶνται ἐκ τῆς (1) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὁ ἀριθμὸς n εἶναι κλασματικός, ἀρνητικὸς ἢ καὶ ἀσύμμετρος. Ἐν τῇ ρύμῃ τῶν προσπαθειῶν του πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ σκοποῦ, ὁ Wallis ἐνεπλάκη εἰς φαινόμενα, τὰ ὁποῖα τὸν ἔφεραν εἰς σοβαρὰν ἀμηχανίαν καὶ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται, ὅταν ὁ παρονομαστὴς $n+1$ τῆς ἐκφράσεως (2) προκύπτῃ μηδενικὸς ἢ ἀρνητικός. Ἂν καὶ ὁ ἴδιος δὲν ἠδυνήθη νὰ δώσῃ ἐξήγησιν εἰς τὰ παράδοξα ἀποτελέσματα, ἔχει πάντως τὴν τιμὴν ὅτι πρῶτος ἐξεδήλωσε τὴν πρόθεσιν νὰ παραδεχθῇ εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς τύπους ἀπεριόριστον κῦρος. Ὅσον καὶ ἂν εἶναι ἀξιόλογοι αἱ σελίδες αὗται τῆς Arithmetica infinitorum (ἂν μή τι ἄλλο, διότι μαρτυροῦν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ συγγραφέως περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ «ὁρίου»), δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν εἰς ὡραιότητα τὸν λαμπρότατον ἀδάμαντα ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ Wallis, δηλαδὴ τὸν ἀκόλουθον τύπον εὐθειοποιήσεως τῆς περιφερείας :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.\ldots}{2.4.4.6.6.\ldots} \tag{3}$$

Ὁ τύπος αὐτός, ὅπως καὶ ἐκεῖνος τοῦ Viète (§ 280), ἀνήκει εἰς τὰς εὐθειοποιήσεις, ποὺ ὀνομάζομεν ἀναλυτικὰς καὶ ἐπεβεβαίωσε τὴν χρησιμότητα τῆς μεθοδικῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἀνάλυσιν γινομένων μὲ ἀπείρους τὸ πλῆθος παράγοντας.

Δὲν ὑστερεῖ εἰς σπουδαιότητα καὶ ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Wallis ἔφθασεν εἰς αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα· ὁ τρόπος αὐτὸς βασίζεται εἰς τὴν θεώρησιν τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος καμπύλων :

$$y=(1-x^2)^0, \quad y=(1-x^2)^1$$
$$y=(1-x^2)^2, \quad y=(1-x^2)^3, \ldots$$

καὶ εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ κύκλος :

$$y=(1-x^2)^{1/2}$$

ἐμφανίζεται ὡς στοιχεῖον ἐνδιάμεσον μεταξὺ πρώτης καὶ δευτέρας, ἑπομένως εἰς τὸ ἐμβαδόν του εἶναι δυνατὸν νὰ φθάσωμεν, καὶ πράγματι ὁ Wallis ἔφθασε, διὰ παρεμβολῆς.

Ὁ Brouncker, προσκληθεὶς ἀπὸ τὸν Wallis νὰ ζητήσῃ νὰ εὕρῃ κάποιαν ἄλλην ἀπειρομερῆ ἔκφρασιν τοῦ π, ἐπέτυχε τὴν ἀκόλουθον ἀκόμη ἀξιολογωτέραν :

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cdots}}}} \tag{4}$$

Λέγομεν ἀξιολογωτέραν, καθ' ὅσον δι' αὐτῆς ἀπεδείχθη ὅτι τὰ συνεχῆ κλάσματα ἦσαν προωρισμένα νὰ διαδραματίσουν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ρόλον πολὺ σημαντικώτερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον εἶχεν ὑπ' ὄψιν του ὁ Cataldi, ὁ πρῶτος ἐπινοήσας κλάσματα τοιαύτης μορφῆς (§ 297). Ὁ τύπος (4) δὲν εἶναι μόνον καθ' ἑαυτὸν ἀξιολογώτατος, ἀλλ' ἔχει καὶ τοῦτο τὸ ἰδιάζον, ὅτι περιβάλλεται μὲ βαθύτατον μυστήριον, ἀφοῦ παραμένει ἀκόμη ἄγνωστος ἡ ὁδός, ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς αὐτόν!

390. Ὅσα εἴπομεν ἀνωτέρω γύρω ἀπὸ τὴν Arithmetica Infinitorum εἶναι ἐπαρκῆ διὰ νὰ καταδείξουν τὴν μοναδικὴν εὐχέρειαν, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Wallis ἐχειρίζετο τὰς μεθόδους τῆς ἐποχῆς του εἰς ζητήματα προσδιορισμοῦ ἐμβαδῶν ἐπιπέδων σχημάτων. Ἦτο λοιπὸν πολὺ φυσικόν, ὅταν τὴν 17ην Ἰουνίου 1658 ἔλαβεν ἐκ μέρους τοῦ Digby τὴν πρόσκλησιν εἰς τὸν μαθηματικὸν ἀγῶνα, τὸν ὁποῖον ἐξαπέλυσεν ὁ Pascal, νὰ μὴ διστάσῃ νὰ δεχθῇ τὴν ἐκ Παρισίων πρόκλησιν. Δὲν θὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὰ ἐπεισόδια τῆς ἐλάχιστα εὐπρεποῦς ἐκείνης ὑποθέσεως. Ὑπογραμμίζομεν μόνον τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ἐπιθυμῶν, προτοῦ ἐκφέρῃ κρίσιν, νὰ συμμορφωθῇ πρὸς τὸ σοφὸν γνωμικὸν «audiatur altera pars» (ἂς ἀκουσθῇ καὶ ἡ ἄλλη μερίς) δὲν ἔχει παρὰ ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὸν πρόλογον τοῦ μικροῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον ὁ διαπρεπὴς καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ὀξφόρδης ἐδημοσίευσε τὸ 1659, διὰ νὰ καταστήσῃ γνωστὰ τ' ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν του ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ ἄλλων καμπύλων. Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εὑρίσκονται, ἐκτὸς ἐκείνων ποὺ ἀπέστειλεν εἰς Παρισίους ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ διαγωνιζομένου, καὶ ὑπὸ τελειοτέραν μορφήν, ἄλλαι σελίδες σχετικαὶ μὲ τὴν εὐθειοποίησιν καὶ τὴν κατασκευὴν ἐφαπτομένων τῆς κυκλοειδοῦς. Αἱ σελίδες αὗται ἐν τούτοις δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν Wallis, ἀλλ' ἀπὸ ἕνα φίλον του, περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἤδη παροδικὴ μνεία, τὸν Χριστόφορον Wren. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Tisbury τὴν 20ὴν Ὀκτωβρίου 1632. Εἰς τὰς σχολὰς τοῦ Westminster ἀνεδείχθη πνεῦμα ζωηρότατον. Ἐγγραφεὶς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford, ἔλαβε τοὺς τίτλους B.A. (1650) καὶ M.A. (1653), ἀμέσως δὲ κατόπιν ἦλθεν ὑφηγητὴς εἰς τὸ All Soul College τῆς ἰδίας πόλεως. Τὸ 1657 ἐκλήθη νὰ διδάξῃ εἰς τὸ Gresham College τοῦ Λονδίνου. Ἀπὸ ⁵ης Φεβρουαρίου 1660 μέχρι 9ης Μαρτίου 1673 κατέλαβε τὴν σεβιλιανὴν ἕδραν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Oxford. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης ἀφωσιώθη τελείως εἰς τὸ ἐπάγγελμα τοῦ μηχανικοῦ. Εἰς τὸ λειτούργημα τοῦτο ἐκλήθη ὑπὸ τῆς ἀγγλικῆς κυβερνήσεως ἀπὸ τοῦ 1661, ἀλλ' ἡ δρᾶσις του ἐξεδηλώθη ἐν ὅλῃ τῇ μεγαλοπρεπείᾳ της, ὅταν τοῦ ἀνετέθη τὸ ἔργον τῆς ἐπανορθώσεως τῶν ζημιῶν, ποὺ προεκάλεσεν εἰς τεραστίαν περιοχὴν τοῦ Λονδίνου ἡ φοβερὰ πυρκαϊὰ τοῦ 1666, ἀπὸ τῆς 2ας ἕως 8ης Σεπτεμβρίου. Εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Wren ἐπλούτισε

τὴν πατρίδα του μὲ τὸν ἔνδοξον καθεδρικὸν ναὸν τοῦ Ἁγίου Παύλου, καὶ ἄλλα ἔργα. Ὁ Wren, ὁ ὁποῖος ἀπελάμβανε μεγάλης εὐνοίας ἐκ μέρους τῶν Stuart, ἔχασε πᾶσαν εὔνοιαν μὲ τὴν ἄνοδον τοῦ οἴκου τοῦ Hannover. Ἀπέθανε τὴν 25ην Φεβρουαρίου 1723, ἀφίνων περὶ ἑαυτοῦ ἀνάμνησιν προσωπικότητος, ἡ ὁποία διήνοιξε διαφόρους δρόμους καὶ ἐδείχθη ἱκανὴ νὰ τοὺς διατρέξῃ ὅλους μὲ θαυμαστὴν ἐπιτυχίαν καὶ δόξαν.

391. Ἐπιστρέφομεν εἰς τὸν Wallis διὰ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἰς τὸ δημοσίευμα τὸ περιέχον τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς, ὡς καὶ ἐκείνας τοῦ Wren, προσήρτησε καὶ τὴν ἀπάντησίν του πρὸς τὸν Huygens, ὁ ὁποῖος τοῦ εἶχε προτείνει νὰ ἐφαρμόσῃ τὰς μεθόδους τῆς Arithmetica infinitorum εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῆς κισσοειδοῦς. Διὰ τῆς ἀπαντήσεώς του προσέθεσεν ὅτι εἶχεν ἀποδείξει τὸ πεπερασμένον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς κογχοειδοῦς καὶ τῆς βάσεώς της, καὶ ὅτι πεπερασμένος προκύπτει καὶ ὁ ὄγκος ὁ γεννώμενος διὰ περιστροφῆς αὐτῆς περὶ τὴν βάσιν της. Κατέστησεν ἐπίσης γνωστόν, ὅτι ἕνας νεαρὸς δεκαεννέα ἐτῶν εἶχεν ἐπιτύχει, χωρὶς νὰ γνωρίζῃ τὰς μελέτας τοῦ Fermat (§ 363) — αὐτὴ ἡ παρατήρησις εἶναι ἰδική μας —, τὴν εὐθειοποίησιν τῆς ἡμικυβικῆς παραβολῆς. Πρόκειται περὶ τοῦ Γουλιέλμου Neil (ἢ Neile) γεννηθέντος εἰς York τὸ 1637 ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν καὶ ἀποθανόντος εἰς τὸ ἄνθος τῆς ἡλικίας του (24 Αὐγούστου 1670), ὅταν εἶχεν ἤδη ἐκλεγῆ μέλος τόσον τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας ὅσον καὶ τοῦ προσωπικοῦ Συμβουλίου τοῦ Καρόλου II. Ἡ ἀξιόλογος ἐκείνη ἰδιότης τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης δὲν ἀναφέρεται μόνον ἁπλῶς, ἀλλὰ καταχωρεῖται ἀκόμη καὶ ἡ ἀπόδειξίς της εἰς τὸ ἀναφερθὲν κείμενον τοῦ Wallis.

Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ἕνα μέρος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ἔργον De cycloide ejusque spatio εὑρίσκεται, ὑπὸ μορφὴν ἐλαφρῶς διάφορον, καὶ εἰς τὸ Μέρος II τοῦ συγγράμματος Μ η χ α ν ι κ ὴ ποὺ ἐδημοσίευσεν ὁ Wallis τὸ 1670, πρᾶγμα διόλου παράδοξον, ἀφοῦ εἰς τὴν μηχανικὴν ὑπάγεται καὶ ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους. Ἐκεῖ ἀπαντᾶται ἀκόμη ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως τεμ x καὶ μία πληροφορία περὶ μιᾶς ἄλλης σπουδαίας ἀνακαλύψεως τοῦ Wren· τουτέστιν τοῦ θεωρήματος, δυνάμει τοῦ ὁποίου τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον διὰ περιστροφῆς μιᾶς ἐκ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν περὶ τὴν ἄλλην δὲν διαφέρει ἀπὸ τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς μιᾶς ὑπερβολῆς περὶ τὸν φανταστικὸν ἄξονα (πρόκειται περὶ τοῦ μονοχώνου ἐκ περιστροφῆς ὑπερβολοειδοῦς, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρῶτος ὁ Wren ἐσημείωσε τὴν παρουσίαν ∞^1 εὐθειῶν).

René de Sluse

392. Εἰς τὰς ἀναριθμήτους ἐπιστολάς, ποὺ ἀντήλασσον μεταξύ των αἱ ἐξοχώτεραι προσωπικότητες τοῦ XVII αἰῶνος, ἀρκετὰ συχνὰ ἀπαντᾶται, εἰς τὴν ἐπικεφαλίδα, τὴν διεύθυνσιν καὶ τὸ κείμενον, τὸ ὄνομα τοῦ βέλγου μαθηματικοῦ René de Sluse ἢ Sluze καὶ Slusius. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Visé sur Meuse τὴν 2αν Ἰουλίου 1622 ἀπὸ οἰκογένειαν ὄχι εὐγενῆ, ἀλλὰ διακεκριμένην, ὑπὸ τῆς ὁποίας προωρίζετο διὰ τὸ ἐκκλησιαστικὸν στάδιον. Κατὰ τὰ ἔτη 1638 - 1642 ἐσπούδασεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Louvain, μετέβη κατόπιν εἰς τὴν Ρώμην, ὅπου τὴν 8ην Ὀκτωβρίου 1643 ἔλαβε τὸν τίτλον τοῦ διδάκτορος τῆς νομικῆς. Ἐξηκολούθησε νὰ παραμένῃ εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ ἐπειδὴ μετεπήδησεν ἀπὸ τὰς ἐπιστημονικὰς μελέτας εἰς τὴν μελέτην τῶν γλωσσῶν δὲν ἐβράδυνε ν' ἀποκτήσῃ μεγάλην φήμην ὡς σοφὸς ἀνατολιστής. Ἕνα παπικὸν διάταγμα τῆς 8ης Ὀκτωβρίου 1650 τὸν ἐπαναφέρει εἰς τὴν πατρίδα μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ πρωθιερέως μιᾶς ἐκκλησίας τῆς Λιέγης. Ἐκ τῆς μακρᾶς του ὅμως παραμονῆς εἰς τὴν Ἰταλίαν διεφύλαξεν εὐγνώμονα ἀνάμνησιν καὶ διετήρησε φιλικὰς σχέσεις μὲ ἰταλοὺς λογίους τῆς ἐποχῆς του, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμεν τὸν Michelangelo Ricci.

Τὰ διάφορα καθήκοντα, ποὺ τοῦ ἀνετίθεντο ἀπὸ τοὺς γνωρίζοντας τὴν ἀξίαν του, δὲν τοῦ ἄφηναν χρόνον ν' ἀσχοληθῇ ἀποκλειστικῶς μὲ τὴν ἐπιστήμην, εἰς τὴν γεωμετρίαν ὅμως ἐπέστρεφεν ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν μέχρι τέλους τοῦ βίου του (19 Μαρτίου 1685). Μετριόφρων καὶ ἐχθρὸς τῶν δημοσιευμάτων, δὲν ἄφησεν ἔργα ἐπιτρέποντα νὰ μάθωμεν ἀρκετὰ ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν μελετῶν του. Δυνάμεθα ὅμως νὰ μάθωμεν πολλὰ ἐκ τῶν εὑρημάτων του, ἀνατρέχοντες εἰς τὰς ἐπιστολάς του. Ἀτυχῶς τὸ πλαίσιον τῆς ἐρεύνης εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀτελές, διότι δὲν ἐξηρευνήθησαν ἀκόμη, οὔτε ἐδόθησαν εἰς τὸν τύπον τὰ πολυάριθμα χειρόγραφά του, ποὺ φυλάσσονται εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων.

393. Τὸ μοναδικὸν ἔργον, ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸν τύπον, ἔχει τὸν τίτλον Μ ε σ ο λ ά β ι ο ν (Mesolabium), ὡς λαμβάνον ἀφετηρίαν τὸ πρόβλημα τῆς Δήλου, τὸ ὁποῖον ὁ Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος (Τόμος I, § 51) ἔλυσε μηχανικῶς μὲ ἕνα ὄργανον φέρον αὐτὸ τὸ ὄνομα. Ὁ de Sluse ἔλυσε τὸ πρόβλημα μέσῳ μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς κωνικῆς τομῆς. Κατόπιν ἐπεξέτεινε τὴν ἔρευναν εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας καὶ γενικῶς εἰς τὰ στερεὰ προβλήματα. Ἡ εὔνοια μὲ τὴν ὁποίαν ἐγένετο δεκτὸν τὸ ἔργον τοῦτο, τὸν ἐνεθάρρυνε νὰ προβῇ εἰς μίαν δευτέραν ἔκδοσιν. Εἰς αὐτὴν παρενέβαλε τ' ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν του, κατὰ τὴν περίοδον 1659 - 1668, τὰ ὁποῖα συγκλίνουν (ἐκτὸς μερικῶν ἀναφερομένων εἰς προβλήματα τοῦ Διοφάντου) εἰς κατασκευὰς ἐφαπτομένων καὶ ὑπολογισμοὺς ἐμβαδῶν.

Τοιαύτης φύσεως ἔρευναι τὸν κατέστησαν ἱκανὸν νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Pascal, ἀλλ' ὅπως γνωρίζομεν (§ 381), περιωρίσθη ν' ἀνακοινώσῃ πρὸς αὐτὸν κατ' ἰδίαν τὰς παρατηρήσεις του.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν μέθοδον κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων, φαίνεται ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν ὁ de Sluse κατέφευγεν εἰς κινητικὰς μεθόδους ὁμοίας πρὸς ἐκείνας ποὺ ἐφήρμοζεν ὁ Torricelli, παρὰ τοῦ ὁποίου καὶ τὰς ἐδιδάχθη κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐν Ἰταλίᾳ παραμονῆς του. Ἐν συνεχείᾳ, συγκεντρώνων τὴν προσοχήν του ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων, μετέβαλε ριζικῶς τακτικήν, καὶ ἔφθασεν εἰς συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα, κατόπιν παρακλήσεως, ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Oldenburg, δι' ἐπιστολῆς του πρὸς αὐτόν. Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιστολὴ ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ Philosophical Transactions τοῦ 1672 καὶ ἀσφαλῶς δὲν εἶναι ἄσχετος πρὸς τὴν ἐκλογήν του (16 Ἀπριλίου 1674) ὡς μέλους τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου.

Τὸ σπουδαιότερον ἐκ τῶν ἀναφερομένων ἐκεῖ ἀποτελεσμάτων εἶναι μία μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς καμπύλας, δυναμένη νὰ θεωρηθῇ ὡς συμπλήρωμα τῆς μεθόδου τοῦ Barrow, περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω (§ 399), διότι, ὅπως καὶ ἐκείνη, στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως τῆς ὑφαπτομένης. Ἐὰν ἡ ἐξεταζομένη καμπύλη παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς:

$$f(x, y) = \Sigma\, a_{ik}\, x^i\, y^k = 0, \tag{1}$$

ἡ ὑφαπτομένη δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως:

$$y \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ἢ} \quad y f'_y : f'_x \tag{2}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν ὅλη ἡ δυσκολία ἐντοπίζεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμφανιζομένων δύο μερικῶν παραγώγων. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ὁ de Sluse ἀποκαθιστᾷ ὡς λῆμμα τὴν σχέσιν:

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}\, x + \ldots + x_1\, x^{m-2} + x^{m-1}, \tag{3}$$

τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος περιλαμβάνει m ὅρους καὶ τείνει εἰς $m\, x^{m-1}$ ὅταν x_1 πλησιάζῃ ἀπεριορίστως τὸ x, παρατηρεῖ δὲ ὅτι ἡ διαφορὰ $f(x_1, y_1) - f(x, y)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ὅρων ἀναλυομένων εἰς γινόμενα παραγόντων τῆς μορφῆς $x_1^i - x^i$, $y_1^k - y^k$. Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο τούτων παρατηρήσεων ἀπορρέει ἡ μέθοδος τοῦ Sluse διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν μερικῶν παραγώγων f'_x, f'_y.

394. Ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ διευρύνῃ τὸν κύκλον τῶν διαφόρων καμπύλων, αἱ ὁποῖαι προσφέρονται εἰς ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω μεθόδου, ὁ de Sluse εἰσήγαγεν εἰς τὴν ἐπιστήμην μίαν νέαν κατηγορίαν καμπύλων,

αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γενικεύσεις τῶν κωνικῶν τομῶν, ἔχουσαι γενικὴν ἐξίσωσιν:

$$y^p = k\,(x - a)^m\,x^n \tag{4}$$

καὶ εἰδικωτέραν ($m = 1$, $n = p$):

$$y^p = (x - a)\cdot\frac{x^p}{a^p}. \tag{5}$$

Εἰς τὰς καμπύλας αὐτὰς (πέρλαι τοῦ Sluse) ἀφιερώνονται πλεῖσται σελίδες τῆς ἀλληλογραφίας τοῦ σοφοῦ ἱερωμένου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄξιαι προσεκτικῆς μελέτης ἐκ μέρους τοῦ ἱστορικοῦ, ἄν μή τι ἄλλο, διότι ἐπιτρέπουν ν' ἀναμετρήσωμεν τὰς δυσκολίας ποὺ εἶχον τότε οἱ μαθηματικοὶ ν' ἀντιμετωπίσουν κατὰ τὴν ἀκριβῆ εἰς ἄξονας ἀναπαράστασιν μιᾶς καμπύλης ἐκ τῆς ἐξισώσεώς της, πρὶν τεθοῦν εἰς ἐφαρμογὴν αὐστηραὶ συμφωνίαι ὡς πρὸς τὸ πρόσημον τῶν συντεταγμένων.

Θὰ κλείσωμεν τὰς σημειώσεις αὐτὰς μὲ τὴν μνείαν μιᾶς ἄλλης καμπύλης, ἡ ὁποία φέρει σήμερον τὸ ὄνομα τοῦ de Sluse· πρόκειται περὶ μιᾶς κογχοειδοῦς, τόπου τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὡς ἀκολούθως: Μιᾶς εὐθείας r καὶ σημείου O, ἐκτὸς αὐτῆς, δοθέντων, ἔστω M τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας r μὲ τυχοῦσαν ἐκ τοῦ O διατέμνουσαν. Ἐπ' αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ μέρος ποὺ ἀντίκειται εἰς τὸ O λαμβάνεται τμῆμα MP, τοιοῦτον ὥστε:

$$OM.MP = k^2.$$

Ἡ λαμβανομένη τοιουτοτρόπως καμπύλη ἔχει σημεῖον μεμονωμένον τὸ O, ἀποτελεῖ δὲ διὰ τοῦτο μαζὺ μὲ τὸ φύλλον τοῦ Καρτεσίου (κυβικὴ μὲ κόμβον) καὶ τὴν κισσοειδῆ τοῦ Διοκλέους (κυβικὴ μὲ ἀσπίδα) τὴν τριάδα τῶν τύπων τῶν ρητολύτων κυβικῶν καμπύλων.

S. degli Angeli καὶ P. Mengoli

395. Ὁ Stefano degli Angeli ἐγεννήθη εἰς τὴν Βενετίαν τὴν 23ην Σεπτεμβρίου 1623. Εἰσελθὼν εἰς τὸ τάγμα τῶν Ἰησουατῶν διεκρίθη τόσον, ὥστε εἰς ἡλικίαν 21 μόλις ἐτῶν ἐξελέγη καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Κολλέγιον, ποὺ διετήρει τὸ τάγμα εἰς Φερράραν. Μετ' ὀλίγον ὅμως μετεκόμισεν εἰς Βολωνίαν, διὰ ν' ἀποφύγῃ τὰ μιάσματα τῆς Φερράρας καὶ ν' ἀφοσιωθῇ εἰς τὴν μελέτην τῶν μαθηματικῶν ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ B. Cavalieri, ἐσημείωσε δὲ τοιαύτην ἐπιτυχίαν εἰς τὰς μαθηματικὰς του σπουδάς, ὥστε ἀποθανόντος τοῦ διδασκάλου του, ἐπροτάθη εἰς αὐτὸν νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν του. Ἐκ μετριοφροσύνης δὲν ἀπεδέχθη τὴν τιμητικὴν αὐτὴν πρότασιν καὶ μετῴκησεν εἰς Ρώμην, συνεχίζων τὰς σπουδάς του, ὅπως διαπιστοῦται ἀπὸ τὰ δεδομένα τῶν πρώτων του δημοσιευμάτων. Εἰς τὴν

αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γενικεύσεις τῶν κωνικῶν τομῶν, ἔχουσαι γενικὴν ἐξίσωσιν:

$$y^p = k\,(x - a)^m\, x^n \tag{4}$$

καὶ εἰδικωτέραν ($m = 1$, $n = p$):

$$y^p = (x - a) \cdot \frac{x^p}{a^p}. \tag{5}$$

Εἰς τὰς καμπύλας αὐτὰς (πέρλαι τοῦ Sluse) ἀφιερώνονται πλεῖσται σελίδες τῆς ἀλληλογραφίας τοῦ σοφοῦ ἱερωμένου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄξιαι προσεκτικῆς μελέτης ἐκ μέρους τοῦ ἱστορικοῦ, ἂν μή τι ἄλλο, διότι ἐπιτρέπουν ν' ἀναμετρήσωμεν τὰς δυσκολίας ποὺ εἶχον τότε οἱ μαθηματικοὶ ν' ἀντιμετωπίσουν κατὰ τὴν ἀκριβῆ εἰς ἄξονας ἀναπαράστασιν μιᾶς καμπύλης ἐκ τῆς ἐξισώσεώς της, πρὶν τεθοῦν εἰς ἐφαρμογὴν αὐστηραὶ συμφωνίαι ὡς πρὸς τὸ πρόσημον τῶν συντεταγμένων.

Θὰ κλείσωμεν τὰς σημειώσεις αὐτὰς μὲ τὴν μνείαν μιᾶς ἄλλης καμπύλης, ἡ ὁποία φέρει σήμερον τὸ ὄνομα τοῦ de Sluse· πρόκειται περὶ μιᾶς κογχοειδοῦς, τόπου τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὡς ἀκολούθως: Μιᾶς εὐθείας r καὶ σημείου O, ἐκτὸς αὐτῆς, δοθέντων, ἔστω M τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας r μὲ τυχοῦσαν ἐκ τοῦ O διατέμνουσαν. Ἐπ' αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ μέρος ποὺ ἀντίκειται εἰς τὸ O λαμβάνεται τμῆμα MP, τοιοῦτον ὥστε:

$$OM.MP = k^2.$$

Ἡ λαμβανομένη τοιουτοτρόπως καμπύλη ἔχει σημεῖον μεμονωμένον τὸ O, ἀποτελεῖ δὲ διὰ τοῦτο μαζὺ μὲ τὸ φύλλον τοῦ Καρτεσίου (κυβικὴ μὲ κόμβον) καὶ τὴν κισσοειδῆ τοῦ Διοκλέους (κυβικὴ μὲ ἀσπίδα) τὴν τριάδα τῶν τύπων τῶν ρητολύτων κυβικῶν καμπύλων.

S. degli Angeli καὶ P. Mengoli

395. Ὁ Stefano degli Angeli ἐγεννήθη εἰς τὴν Βενετίαν τὴν 23ην Σεπτεμβρίου 1623. Εἰσελθὼν εἰς τὸ τάγμα τῶν Ἰησουατῶν διεκρίθη τόσον, ὥστε εἰς ἡλικίαν 21 μόλις ἐτῶν ἐξελέγη καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Κολλέγιον, ποὺ διετήρει τὸ τάγμα εἰς Φερράραν. Μετ' ὀλίγον ὅμως μετεκόμισεν εἰς Βολωνίαν, διὰ ν' ἀποφύγῃ τὰ μιάσματα τῆς Φερράρας καὶ ν' ἀφοσιωθῇ εἰς τὴν μελέτην τῶν μαθηματικῶν ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ B. Cavalieri, ἐσημείωσε δὲ τοιαύτην ἐπιτυχίαν εἰς τὰς μαθηματικὰς του σπουδάς, ὥστε ἀποθανόντος τοῦ διδασκάλου του, ἐπροτάθη εἰς αὐτὸν νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν του. Ἐκ μετριοφροσύνης δὲν ἀπεδέχθη τὴν τιμητικὴν αὐτὴν πρότασιν καὶ μετῴκησεν εἰς Ρώμην, συνεχίζων τὰς σπουδάς του, ὅπως διαπιστοῦται ἀπὸ τὰ δεδομένα τῶν πρώτων του δημοσιευμάτων. Εἰς τὴν

Βενετίαν ἐπέστρεψε περιβεβλημένος σημαντικά ἐκκλησιαστικά καθήκοντα. Τὸ 1662 τοῦ προσεφέρθη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova ἡ μαθηματική ἕδρα, τὴν ὁποίαν καὶ διετήρησε μέχρι τοῦ θανάτου του (11 Ὀκτωβρίου 1697).

Ἀπὸ τὰ πολυάριθμα δημοσιεύματά του φαίνεται ὅτι εἶχε σκοπὸν νὰ συμπληρώσῃ τὰς ἐρεύνας, ποὺ ἔμειναν κολοβαὶ μὲ τὸν θάνατον τοῦ Cavalieri καὶ τοῦ Torricelli. Εἰδικώτερον, μὲ τὰ δημοσιεύματά του τὰ σχετικὰ μὲ τὰς παραβολάς, τὰς ὑπερβολάς, τὰς ἕλικας κλπ., προητοίμαζε τὸ πρόγραμμα τοῦ ἔργου De lineis novis, τὸ ὁποῖον ὁ κορυφαῖος τῆς Φαγεντίας ἐσχεδίαζε κατὰ τὴν τελευταίαν περίοδον τῆς ζωῆς του (§ 318). Παρ' ὅλην τὴν ἀξίαν των, τὰ ἔργα αὐτὰ δὲν ἤσκησαν ἀξιόλογον ἐπίδρασιν, διότι ὅταν ἐδημοσιεύθησαν ἐθεωροῦντο πλέον ὡς παλαιωθέντα τὰ περιεχόμενά των. Οἱ γεωμέτραι κατείχοντο ἀπὸ τὸν πόθον τῆς κατακτήσεως γενικῶν μεθόδων, καὶ φυσικὸν ἦτο νὰ εὕρουν ἄνευ ἐνδιαφέροντος τὰς ἐφαρμογὰς μεθόδων τῶν ὁποίων εἶχον ἀρχίσει νὰ ἐπισημαίνουν τὰς ἐλλείψεις, ἐπὶ προβλημάτων ἀναμοχλευομένων ἐπὶ ἥμισυ περίπου αἰῶνα. Παρὰ ταῦτα ὁ ἱστορικὸς ἀναγνωρίζει εἰς τὸν δραστήριον ἐρευνητὴν τὴν τιμὴν ὅτι, μετὰ τοῦ Michelangelo Ricci, ἐσυνέχισεν ἐπαξίως τὰς παραδόσεις τῶν μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου.

396. Ἐξοχωτέραν πρωτοτυπίαν ἐξεδήλωσεν ἕνας ἄλλος μαθητὴς τοῦ Cavalieri, ὁ Pietro Mengoli, τὸν ὁποῖον κακὴ μοῖρα ἠμπόδισε νὰ κερδίσῃ τὴν γενικὴν ὑπόληψιν, τῆς ὁποίας ἐδικαιοῦτο ἐκ τῶν ἐργασιῶν του. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Βολωνίαν, ἔλαβε πρῶτα δίπλωμα φιλοσοφίας (1650) καὶ ἔπειτα νομικῆς (1653), ἀλλ' ὑποστὰς τὴν ἐπίδρασιν τὴν ὁποίαν ἤσκει ὁ Cavalieri ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὸν τάφον, ἀφιερώθη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὰ μαθηματικά, περιβληθεὶς μάλιστα καὶ τὸ ράσον τοῦ ἱερέως.

Ἡ Σύγκλητος τῆς Βολωνίας τοῦ παρεχώρησε μίαν ἕδραν εἰς τὸ πάτριον Πανεπιστήμιον, τὴν ὁποίαν κατεῖχεν ἐπαξίως μέχρι τοῦ ἑξηκοστοῦ ἔτους τῆς ἡλικίας του, ὅτε ἀπέθανε (7 Ἰουνίου 1686). Πολυάριθμα εἶναι τὰ δημοσιεύματά του. Ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἰδιαιτέρως μᾶς ἐνδιαφέρουν περιέχουν ἀποτελέσματα νέα καὶ σημαντικά, ἀλλ' ἐπειδὴ εἶχον γραφῆ κατὰ τρόπον σκοτεινὸν καὶ διὰ συμβολισμῶν ἀσυνήθων, φυσικὸν ἦτο νὰ εὕρουν ἐλάχιστον ἀριθμὸν ἀναγνωστῶν καὶ νὰ περιέλθουν συντόμως εἰς κατάστασιν τελείας λήθης. Περιορισμοὶ τοῦ χώρου μᾶς ὑποχρεώνουν νὰ σημειώσωμεν μερικὰ μόνον ἀπὸ τὰ πολύτιμα εὑρήματα ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὰ κείμενα αὐτά.

Τὸ κυριώτερον ἀπὸ τὰ ἔργα του φέρει τὸν τίτλον Novae quadraturae arithmeticae (Νέοι ἀριθμητικοὶ τετραγωνισμοί). Ἀπαντῶνται ἐκεῖ νέαι καὶ ἐνδιαφέρουσαι παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν σειρῶν, ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀναφέρωμεν τὰς σημαντικωτέρας.

Ὁ Mengoli ἐπισημαίνει τὴν σημασίαν ποὺ ἔχουν αἱ σειραὶ τῶν ὁποίων ὁ γενικὸς ὅρος τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ὅτι δὲν εἶναι ὅλαι συγκλίνουσαι ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὴν ἁρμονικὴν σειρὰν

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα ἀποδεικνύεται ἄπειρον.

Ὑπὸ τὰς ἰδίας συνθήκας εὑρίσκεται φυσικὰ ἡ σειρὰ ἡ προκύπτουσα ἐξ αὐτῆς δι᾽ ἀφαιρέσεως μερικῶν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων της. Ἐκ τούτου δύναται νὰ ἐξαχθῇ τὸ συμπέρασμα ὅτι ἀποκλίνουσα εἶναι ἀκόμη καὶ ἡ σειρὰ τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι ἀντίστροφοι τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον $\omega > 1$. Πράγματι εἶναι :

$$\frac{1}{a+n\omega} : \frac{1}{a+n} = \frac{a+n}{a+n\omega} = \frac{\frac{a}{n}+1}{\frac{a}{n}+\omega} > \frac{1}{\omega}$$

ἤτοι :

$$\frac{1}{a+n\omega} > \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{a+\omega},$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀποκλίνουσα ἡ σειρὰ ἡ ἔχουσα γενικὸν ὅρον $1/(a+n)$, ὡς προκύπτουσα ἐκ τῆς ἁρμονικῆς διαγραφομένων ἐξ αὐτῆς μερικῶν ὅρων, συνάγεται εὐθὺς τὸ ἀποδεικτέον.

Ὁ Mengoli ὑπολογίζει ὀρθῶς τὸ ἄθροισμα (= 1) τῶν ἀντιστρόφων τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν καὶ προσπαθεῖ νὰ κάμῃ τὸ αὐτὸ διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετραγώνων, ἀλλ᾽ ἀφίνει εἰς τὸν Euler τὴν δόξαν νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἐπιτυγχάνει ὅμως ν᾽ ἀθροίσῃ τὰς σειρὰς ποὺ ἔχουν γενικὸν ὅρον :

$$\frac{1}{n^2+kn}$$

397. Ἕνα ἄλλο δημοσίευμα τοῦ Mengoli ὑπὸ τὸν τίτλον Circolo ἔγινεν ἀφορμὴ νὰ συγκαταριθμηθῇ ἀδίκως μεταξὺ τῶν ἐπιδόξων τετραγωνιστῶν τοῦ κύκλου, ἐνῷ εἰς αὐτὸν ἀνήκει ἡ δόξα, ὅτι ἀνεκάλυψε, ἔστω καὶ πέντε ἔτη μετὰ τὸν Wallis, ἀλλ᾽ ἀνεξαρτήτως ἀπὸ αὐτόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς π ἐκφράζεται ὡς γινόμενον ἀπείρων τὸ πλῆθος παραγόντων (§ 389).

Ἀδιαφιλονίκητον πρωτοτυπίαν παρουσιάζει ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων, ὅπως τὴν διεμόρφωσεν εἰς τὸ ἔργον του Geometria speciosa. Ἐκεῖ λαμβάνει ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἐξέτασιν τῶν ἑπομένων δύο ἀκολουθιῶν :

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n-1}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n},\ \cdots$$

καὶ καλεῖ τὰ στοιχεῖα των ἀντιστοίχως ὑ π ε ρ λ ο γ α ρ ί θ μ ο υ ς καὶ ὑ π ο λ ο γ α ρ ί θ μ ο υ ς τοῦ n, ἐνῷ δίδει τὸ ὄνομα τοῦ λ ο γ α ρ ί θ μ ο υ εἰς τὴν μοναδικὴν ποσότητα, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν δευτέρων καὶ μικροτέρα ὅλων τῶν πρώτων. Ἐξάγει ἐντεῦθεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα:

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n}\cdot$$

Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ εἶναι πολὺ σημαντικώτερον εἶναι ὅτι πρῶτος εὑρίσκει τὸ ἀνάπτυγμα εἰς σειρὰν τῶν λογαρίθμων διὰ τοῦ τύπου:

$$ln\frac{m}{n}=\sum_{r=0}^{r=\infty}\left|\sum_{s=1}^{s=m}\frac{1}{rm+s}-\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{rn+s}\right|,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ μερικώτερος τύπος:

$$ln\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἔφθασαν κατόπιν, ὅπως θὰ ἴδωμεν (§ 400), καὶ ὁ Mercator καὶ ὁ Brouncker. Τὸ αὐτὸ ἔργον ἀποδεικνύει ἐπίσης, ὅτι ὁ Mengoli εἶχε μίαν καθαρὰν ἰδέαν τῆς ἐννοίας τοῦ «ὁρίου», ἐκ τῆς ὁποίας ἠδυνήθη νὰ ἐξαγάγῃ συμπεράσματα, ὅπως ἔλεγε δικαίως, ἀνήκουστα.

Δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον ἐπὶ ἄλλων μικροτέρας σημασίας ἐργασιῶν του. Νομίζομεν ὅμως, ὅτι τὰ ὅσα ἐλέχθησαν ἕως ἐδῶ ἀρκοῦν διὰ νὰ ἑδραιώσουν τὴν πεποίθησιν, ὅτι εἰς τὸν Mengoli ἁρμόζει ἐξέχουσα θέσις μεταξὺ τῶν προδρόμων τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz. Μερικοὶ μάλιστα θεωροῦν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τελευταίου ἤσκησε κάποιαν ἐπίδρασιν ὁ Mengoli· πάντως ἐκεῖνο ποὺ εἶναι βέβαιον εἶναι ὅτι μερικαὶ ἐργασίαι του ἦσαν γνωσταὶ εἰς τὸν διάσημον γερμανὸν μαθηματικόν.

Isaac Barrow

398. Ἐπιστρέφομεν ἀκόμη μίαν φορὰν εἰς τὴν Ἀγγλίαν, διὰ νὰ σημειώσωμεν ἄλλα ἴχνη ἰταλικῆς ἐπιδράσεως. Ἐνώπιόν μας προβάλλεται προπάντων ὁ Isaac Barrow. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Λονδῖνον τὸ 1630. Εἰς ἡλικίαν 13 ἐτῶν ἐνεγράφη εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ Ἁγίου Πέτρου τοῦ Cambridge, ὅπου τὸ 1652 ἔλαβε τὸν τίτλον τοῦ M.A. (Master of Arts). Αἱ ρεαλιστικαὶ πεποιθήσεις του τοῦ κατέστησαν ἐχθρικὴν τὴν εἰς τὴν πατρίδα παραμονήν, διὰ τοῦτο κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐτῶν 1655 - 59 περιηγήθη ὅλην τὴν Εὐ-

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n},\ \cdots$$

καὶ καλεῖ τὰ στοιχεῖα των ἀντιστοίχως ὑπερλογαρίθμους καὶ ὑπολογαρίθμους τοῦ n, ἐνῷ δίδει τὸ ὄνομα τοῦ λογαρίθμου εἰς τὴν μοναδικὴν ποσότητα, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν δευτέρων καὶ μικροτέρα ὅλων τῶν πρώτων. Ἐξάγει ἐντεῦθεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα :

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n}\cdot$$

Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ εἶναι πολὺ σημαντικώτερον εἶναι ὅτι πρῶτος εὑρίσκει τὸ ἀνάπτυγμα εἰς σειρὰν τῶν λογαρίθμων διὰ τοῦ τύπου :

$$ln\frac{m}{n}=\sum_{r=0}^{r=\infty}\left|\sum_{s=1}^{s=m}\frac{1}{rm+s}-\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{rn+s}\right|,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ μερικώτερος τύπος :

$$ln\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἔφθασαν κατόπιν, ὅπως θὰ ἴδωμεν (§ 400), καὶ ὁ Mercator καὶ ὁ Brouncker. Τὸ αὐτὸ ἔργον ἀποδεικνύει ἐπίσης, ὅτι ὁ Mengoli εἶχε μίαν καθαρὰν ἰδέαν τῆς ἐννοίας τοῦ «ὁρίου», ἐκ τῆς ὁποίας ἠδυνήθη νὰ ἐξαγάγῃ συμπεράσματα, ὅπως ἔλεγε δικαίως, ἀνήκουστα.

Δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον ἐπὶ ἄλλων μικροτέρας σημασίας ἐργασιῶν του. Νομίζομεν ὅμως, ὅτι τὰ ὅσα ἐλέχθησαν ἕως ἐδῶ ἀρκοῦν διὰ νὰ ἑδραιώσουν τὴν πεποίθησιν, ὅτι εἰς τὸν Mengoli ἁρμόζει ἐξέχουσα θέσις μεταξὺ τῶν προδρόμων τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz. Μερικοὶ μάλιστα θεωροῦν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τελευταίου ἤσκησε κάποιαν ἐπίδρασιν ὁ Mengoli· πάντως ἐκεῖνο ποὺ εἶναι βέβαιον εἶναι ὅτι μερικαὶ ἐργασίαι του ἦσαν γνωσταὶ εἰς τὸν διάσημον γερμανὸν μαθηματικόν.

Isaac Barrow

398. Ἐπιστρέφομεν ἀκόμη μίαν φορὰν εἰς τὴν Ἀγγλίαν, διὰ νὰ σημειώσωμεν ἄλλα ἴχνη ἰταλικῆς ἐπιδράσεως. Ἐνώπιόν μας προβάλλεται προπάντων ὁ Isaac Barrow. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Λονδῖνον τὸ 1630. Εἰς ἡλικίαν 13 ἐτῶν ἐνεγράφη εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ Ἁγίου Πέτρου τοῦ Cambridge, ὅπου τὸ 1652 ἔλαβε τὸν τίτλον τοῦ M.A. (Master of Arts). Αἱ ρεαλιστικαὶ πεποιθήσεις του τοῦ κατέστησαν ἐχθρικὴν τὴν εἰς τὴν πατρίδα παραμονήν, διὰ τοῦτο κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐτῶν 1655 - 59 περιηγήθη ὅλην τὴν Εὐ-

ρώπην, ἐπεσκέφθη τὴν Ἰταλίαν, ἐλθὼν τοιουτοτρόπως εἰς ἐπαφὴν μὲ τοὺς τελευταίους μαθητὰς τοῦ Γαλιλαίου, καὶ ἐσυνέχισε τὴν περιήγησίν του μέχρι Κωνσταντινουπόλεως. Ὅταν ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πατρίδα, εἰσῆλθεν εἰς τὸ ἱερατεῖον καί, μετὰ τὴν παλινόρθωσιν, ἐπέτυχεν ἀξιώματα καὶ τιμάς.

Καθ' ὅλην του τὴν ζωὴν ἐκυμαίνετο μεταξὺ τῶν φυσικο - μαθηματικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς θεολογίας, ἐν τῇ πεποιθήσει ὅτι «διὰ νὰ γίνῃ κανεὶς καλὸς θεολόγος, πρέπει νὰ γνωρίζῃ καλῶς τὴν χρονολογίαν, ἀλλὰ αὐτὴ προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς ἀστρονομίας, ἡ ὁποία μὲ τὴν σειράν της στηρίζεται εἰς τὰ μαθηματικά». Εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge ἐδίδαξε τὰ ἑλληνικά, εἰς δὲ τὸ Κολλέγιον Gresham τοῦ Λονδίνου τὰ μαθηματικά. Τὸ 1663 ἐκλήθη νὰ καταλάβῃ πρῶτος τὴν λουκασιανὴν ἕδραν[31] τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον ἐκεῖνο. Ταύτην παρέδωσεν ἔπειτα εἰς ἕνα διαπρεπῆ μαθητήν του (§ 428), διὰ ν' ἀφοσιωθῇ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν θεολογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπέκτησε κῦρος ἀνώτερον τοῦ κατεχομένου εἰς τὰ μαθηματικά. Ὑπῆρξε παρεκκλησιάρχης τοῦ Καρόλου II καὶ ἀπέθανε τὴν 4ην Μαΐου 1677.

Τὴν ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνεχώρει διὰ τὸ μακρὸν ἀνὰ τὴν Εὐρώπην ταξείδιόν του, ὁ Barrow παρέδωσεν εἰς τὸν τυπογράφον μίαν ἔκδοσιν τοῦ Εὐκλείδου, πληρεστέραν ἐκείνης τοῦ Tacquet κατὰ τοῦτο, ὅτι περιελάμβανε καὶ τὰ ἀριθμητικὰ Βιβλία (VII — X). Λαμβάνων δὲ ὡς ἀφορμὴν ἐμπνεύσεως τὰ ἔργα τοῦ Hérigone (§ 397) πρὸς τὸν σκοπὸν ἐπιδιώξεως συντομίας μεγαλυτέρας, ἐσκέφθη νὰ ἐκθέσῃ ὁλόκληρον τὴν ὕλην διὰ καταλλήλων συμβόλων, ἀλλ' ἀντὶ νὰ εἰσαγάγῃ τὰ σύμβολα τοῦ γάλλου μαθηματικοῦ, υἱοθέτησεν ἐκεῖνα τοῦ Oughtred, τὰ ὁποῖα ἦσαν οἰκειότερα εἰς τοὺς συμπατριώτας του. Προχωρῶν κατόπιν εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τῆς προσφιλοῦς του ἀποστολῆς νὰ διαδώσῃ εἰς τὴν χώραν του τ' ἀριστουργήματα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, ἐπεμελήθη ἀργότερα τῆς δημοσιεύσεως θαυμασίων ἐκδόσεων τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ Θεοδοσίου.

399. Ὡς πρωτότυπος μαθηματικὸς ὁ Barrow εἶναι γνωστὸς ἀπὸ τρεῖς σειρὰς μαθημάτων, τὰ ὁποῖα ἐδίδαξεν ὡς καθηγητὴς εἰς τὸ Cambridge, μίαν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς ὀπτικῆς (ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν θὰ περιορισθῶμεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι πρὸ τῆς ἐκτυπώσεώς της ἀνεθεωρήθη ἀπὸ τὸν Newton) καὶ τὰς ἄλλας ἐπὶ θεμάτων καθαρᾶς γεωμετρίας.

Ἡ φέρουσα τὴν παλαιοτέραν χρονολογίαν ἀρχίζει μὲ ἕνα ἐγκώμιον τοῦ Henry Lucas, τοῦ εὐγενικοῦ κυρίου, ὁ ὁποῖος ἀποθνήσκων, προώρισε τὰ ἀγαθά του εἰς τὴν σύστασιν τῆς ὁμωνύμου καθηγητικῆς ἕδρας τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge. Τ' ἀκολουθοῦντα μαθήματα θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι εἶχον σχεδιασθῇ (καὶ ἴσως τοῦτο νὰ εἶναι ἀληθὲς) μὲ ὑπόδειγμα τὸ Σχόλιον τοῦ Πρόκλου εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (Τόμος I.

§ 62), ἀφοῦ εἰς τὰ μαθήματα αὐτὰ ὁ Barrow μακρηγορεῖ διερευνῶν τὴν σημασίαν τῆς λέξεως μαθηματικά, ἐξετάζων τὸν σκοπὸν τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς, τῆς ὁποίας περιγράφει τὰ μέρη, τὰς ἀρχὰς καὶ τὴν ἱστορικὴν ἐξέλιξιν. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ φιλοσοφικοῦ χαρακτῆρος τῶν μαθημάτων, ἐξηγεῖται τὸ γεγονὸς ὅτι πολλαὶ σελίδες ἀφιερώνονται εἰς τὴν εὐκλείδειον θεωρίαν τῶν λόγων καὶ τῶν ἀναλογιῶν. Πρέπει νὰ τονισθῇ, πρὸς ἔπαινον τοῦ Barrow, ὅτι διὰ τῆς ἀναλύσεώς του παρουσιάζεται ὡς γνωρίζων καλῶς ὄχι μόνον τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικούς, ἀλλ' ἀκόμη καὶ τοὺς νεωτέρους, οἱ ὁποῖοι ἐνεφανίσθησαν ὡς ἐκδόται ἢ σχολιασταί, καὶ διαφιλονικεῖ μὲ ὀξυδέρκειαν τὰς γνώμας των. Ὡς κατακλεὶς ἀπαντᾶται μία προσπάθεια ἀναπαραγωγῆς διὰ τῆς μαντικῆς φαντασίας τῆς ὁδοῦ, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὰ συμπεράσματα ποὺ ἐκτίθενται εἰς τὰ ἔργα του Κύκλου μέτρησις καὶ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Ὑψηλότερον εἶναι τὸ θέμα τῆς δευτέρας σειρᾶς μαθημάτων, ἀφοῦ πρόκειται περὶ μελέτης τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, καὶ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἐκεῖ ἐκτιθεμένη μέθοδος κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων, ἡ ὁποία τοῦ δίδει μίαν θέσιν εἰς τὴν προϊστορίαν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος, εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς ὁποίας δὲν εἶναι ἀμέτοχοι αἱ κινητικαὶ θεωρίαι τοῦ Torricelli, ἔχει ὡς βάσιν τὸ «χαρακτηριστικὸν τρίγωνον» (ἀποτελούμενον ἀπὸ ἕνα ἀπειροστὸν τόξον καμπύλης καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τόξου) καὶ τὴν ὑφαπτομένην (δηλαδὴ τὸ μέγεθος ἐκεῖνο πού, χωρὶς πρόσημον, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $y\ dx/dy$). Διὰ τὸν ὑπολογισμόν της εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη δίδεται ὑπὸ μορφὴν πεπλεγμένης ἐξισώσεως $f(x, y) = 0$, ὁ Barrow ἀναπτύσσει κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν h καὶ k τὴν διαφορὰν $f(x+h, y+k)-f(x, y)$ καὶ διαγράφει ὅλους τοὺς ὅρους τοὺς περιέχοντας τὰ γινόμενα καὶ τὰς δυνάμεις τῶν h καὶ k. Ἐξισώνων τὸ ἀποτέλεσμα πρὸς τὸ μηδὲν λαμβάνει τὸν λόγον h/k καὶ τοιουτοτρόπως φθάνει εἰς τὴν ζητουμένην συνάρτησιν τῶν x καὶ y. Τὴν μέθοδον αὐτὴν ἐφαρμόζει πρῶτον εἰς τὴν καμπύλην :

$$x^4 + x^2y^2 = r^2y^2 \qquad (1)$$

(ἢ «Kappa» τῶν νεωτέρων) καὶ κατόπιν εἰς τὰς ἀκολούθους :

$$x^3 + y^3 = r^3 \qquad (2)$$

$$x^3 + y^3 = rxy \quad (\text{ἢ galande}) \qquad (3)$$

$$y = r \cdot \varepsilon\varphi\ \frac{\pi x}{2r}\,. \qquad (4)$$

δὲν ἀπουσιάζουν δὲ νύξεις περὶ τῆς κυκλοειδοῦς, ἡ ὁποία τότε ἦτο ἡ καμπύλη τοῦ συρμοῦ. Ὁ Barrow, ἂν καὶ δεικνύει συμπάθειαν πρὸς τὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων, δὲν ἀγνοεῖ τὴν γεωμετριαν τοῦ Descartes, τοῦ ὁποίου ἐν τού-

τοις δὲν υἱοθετεῖ τὸ συμβολικὸν σύστημα. Κανένα ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον δὲν ἔχει διὰ τὸ σχῆμα τῶν γραμμῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογίζεται, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸ σχῆμα ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ παρουσιάζῃ ἡ καμπύλη (1), σχῆμα τὸ ὁποῖον προδίδει, ὅτι δὲν εἶχεν ὁ Barrow οὐδὲ τὴν πλέον μακρινὴν ἰδέαν περὶ τῆς ἀνωμαλίας, τὴν ὁποίαν αὕτη παρουσιάζει εἰς τὴν ἀρχήν.

Nicolò Mercator (Nicolaus Kaufmann)

400. Μεγάλη καὶ εὐεργετικὴ ὑπῆρξεν ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ ἀλλαχοῦ ἡ Arithmetica infinitorum τοῦ Wallis, ὅπως ἀποδεικνύεται ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Nicolò Mercator (ποὺ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν Gherard Mercator ἢ Kremer, τὸν διάσημον χαρτογράφον), τοῦ ὁποίου ἀρχικὸν ὄνομα ἦτο Kaufmann. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Holstein περὶ τὸ 1620, ἐσπούδασεν εἰς Κοπεγχάγην καὶ κατόπιν μετέβη εἰς τὸ Λονδῖνον. Τότε ἀνέπτυξε τὴν λαμπροτέραν περίοδον τῆς ἐπιστημονικῆς του σταδιοδρομίας, διότι ἀκριβῶς τότε ἔφερεν εἰς τὴν δημοσιότητα τὸ κύριον ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Λογαριθμοτεχνία (Logarithmotechnia, ἡ ὁποία τοῦ ἤνοιξε τὰς θύρας τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου. Κατόπιν ἐτέθη εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς γαλλικῆς Κυβερνήσεως καὶ ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὸν μῆνα Φεβρουάριον τοῦ 1687.

Ἀποτελεῖ ἰδικόν του τίτλον τιμῆς τὸ ὅτι ἐπρότεινε μίαν νέαν μέθοδον πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν σειρῶν καὶ περὶ τῆς ὁποίας εἶναι καθῆκον μας νὰ κάμωμεν σύντομον μνείαν. Ὁ G. de S. Vincent εἶχεν ὀλίγον προηγουμένως ἀποδείξει, ὅτι ἐκ τῶν λογαρίθμων ἐξηρτᾶτο ὁ τετραγωνισμὸς τῆς ὑπερβολῆς. Ἐξ ἄλλου ὁ τετραγωνισμὸς τῶν παραβολῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ θεώρημα ποὺ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Τούτου τεθέντος, ἐὰν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσοπλεύρου ὑπερβολῆς ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$y = \frac{1}{1+x},$$

(καὶ εἶναι τοῦτο μία ἰδέα τοῦ Mercator τόσον ἁπλῆ ὅσον καὶ εὐφυής), τὸ ἐμβαδόν της θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

τοις δὲν υἱοθετεῖ τὸ συμβολικὸν σύστημα. Κανένα ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον δὲν ἔχει διὰ τὸ σχῆμα τῶν γραμμῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογίζεται, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸ σχῆμα ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ παρουσιάζῃ ἡ καμπύλη (1), σχῆμα τὸ ὁποῖον προδίδει, ὅτι δὲν εἶχεν ὁ Barrow οὐδὲ τὴν πλέον μακρινὴν ἰδέαν περὶ τῆς ἀνωμαλίας, τὴν ὁποίαν αὕτη παρουσιάζει εἰς τὴν ἀρχήν.

Nicolò Mercator (Nicolaus Kaufmann)

400. Μεγάλη καὶ εὐεργετικὴ ὑπῆρξεν ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ ἀλλαχοῦ ἡ Arithmetica infinitorum τοῦ Wallis, ὅπως ἀποδεικνύεται ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Nicolò Mercator (ποὺ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν Gherard Mercator ἢ Kremer, τὸν διάσημον χαρτογράφον), τοῦ ὁποίου ἀρχικὸν ὄνομα ἦτο Kaufmann. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Holstein περὶ τὸ 1620, ἐσπούδασεν εἰς Κοπεγχάγην καὶ κατόπιν μετέβη εἰς τὸ Λονδῖνον. Τότε ἀνέπτυξε τὴν λαμπροτέραν περίοδον τῆς ἐπιστημονικῆς του σταδιοδρομίας, διότι ἀκριβῶς τότε ἔφερεν εἰς τὴν δημοσιότητα τὸ κύριον ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον Λογαριθμοτεχνία (Logarithmotechnia, ἡ ὁποία τοῦ ἤνοιξε τὰς θύρας τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου. Κατόπιν ἐτέθη εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς γαλλικῆς Κυβερνήσεως καὶ ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὸν μῆνα Φεβρουάριον τοῦ 1687.

Ἀποτελεῖ ἰδικόν του τίτλον τιμῆς τὸ ὅτι ἐπρότεινε μίαν νέαν μέθοδον πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν σειρῶν καὶ περὶ τῆς ὁποίας εἶναι καθῆκον μας νὰ κάμωμεν σύντομον μνείαν. Ὁ G. de S. Vincent εἶχεν ὀλίγον προηγουμένως ἀποδείξει, ὅτι ἐκ τῶν λογαρίθμων ἐξηρτᾶτο ὁ τετραγωνισμὸς τῆς ὑπερβολῆς. Ἐξ ἄλλου ὁ τετραγωνισμὸς τῶν παραβολῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ θεώρημα ποὺ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Τούτου τεθέντος, ἐὰν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσοπλεύρου ὑπερβολῆς ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$y = \frac{1}{1+x},$$

(καὶ εἶναι τοῦτο μία ἰδέα τοῦ Mercator τόσον ἁπλῆ ὅσον καὶ εὐφυής), τὸ ἐμβαδόν της θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

Ἀλλ' εἴδομεν ὅτι εἶχεν ἤδη ὑπολογισθῆ τὸ ἄθροισμα ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἦτο γνωστὴ ἡ ἰσότης :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Ἐντεῦθεν λοιπὸν συνάγεται :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)dx,$$

τουτέστι :

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (1)$$

Καίτοι ἡ ἔκφρασις (1) δὲν ἀπαντᾶται ρητῶς εἰς τὸν Mercator, ἐν τούτοις αἱ ὑπ' αὐτοῦ γενόμεναι ἐφαρμογαὶ ἀποδεικνύουν, ὅτι ἦτο ἤδη κάτοχος αὐτῆς, ὥστε νὰ εἶναι δικαιολογημένον τὸ ὄνομα σειρὰ τοῦ Mercator, ποὺ δίδεται συνήθως εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $ln(1+x)$.

Ἐὰν τώρα εἰς τὴν (1) εἰδικεύσωμεν διὰ $x = 1$, εὑρίσκομεν (§ 397) :

$$ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \qquad (2)$$

καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὰς διαφορὰς $1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ κλπ.

εὑρίσκομεν :

$$ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots \qquad (3)$$

ἀξιόλογον ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ λόρδος Brouncker ἔφθασεν ἀνεξαρτήτως τοῦ Mercator καὶ τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσε τὸ αὐτὸ ἔτος ποὺ ἐδημοσιεύθη ἡ Logarithmotechnia. Ἡ θεωρία τῶν σειρῶν ἔβαινε λοιπὸν ἀπὸ ἡμέρας εἰς ἡμέραν ἐξελισσομένη μὲ διαρκῶς αὐξανόμενον ἐνδιαφέρον· ἀλλὰ πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν ἀμέσως καὶ νέα δείγματα!

James καὶ David Gregory

401. Ὁ James Gregory ἐγεννήθη εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Aberdeen τὸν Νοέμβριον τοῦ 1638. Ἐγένετο εὐνοϊκῶς γνωστὸς εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον ἀπὸ μίαν ἐφεύρεσίν του εἰς ἡλικίαν 23 ἐτῶν. Ἐπρόκειτο περὶ μιᾶς διόπτρας ἀνακλάσεως, τῆς ὁποίας τὴν περιγραφὴν ἔδωσεν εἰς ἕνα τόμον : De optica moderna (Λονδῖνον, 1663). Μετέβη κατόπιν εἰς τὴν Padova,

Ἀλλ' εἴδομεν ὅτι εἶχεν ἤδη ὑπολογισθῆ τὸ ἄθροισμα ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἦτο γνωστὴ ἡ ἰσότης :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Ἐντεῦθεν λοιπὸν συνάγεται :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)dx,$$

τουτέστι :

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (1)$$

Καίτοι ἡ ἔκφρασις (1) δὲν ἀπαντᾶται ρητῶς εἰς τὸν Mercator, ἐν τούτοις αἱ ὑπ' αὐτοῦ γενόμεναι ἐφαρμογαὶ ἀποδεικνύουν, ὅτι ἦτο ἤδη κάτοχος αὐτῆς, ὥστε νὰ εἶναι δικαιολογημένον τὸ ὄνομα σειρὰ τοῦ Mercator, ποὺ δίδεται συνήθως εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $ln(1+x)$.

Ἐὰν τώρα εἰς τὴν (1) εἰδικεύσωμεν διὰ $x = 1$, εὑρίσκομεν (§ 397) :

$$ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (2)$$

καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὰς διαφορὰς $1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ κλπ. εὑρίσκομεν :

$$ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \quad (3)$$

ἀξιόλογον ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ λόρδος Brouncker ἔφθασεν ἀνεξαρτήτως τοῦ Mercator καὶ τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσε τὸ αὐτὸ ἔτος ποὺ ἐδημοσιεύθη ἡ Logarithmotechnia. Ἡ θεωρία τῶν σειρῶν ἔβαινε λοιπὸν ἀπὸ ἡμέρας εἰς ἡμέραν ἐξελισσομένη μὲ διαρκῶς αὐξανόμενον ἐνδιαφέρον· ἀλλὰ πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν ἀμέσως καὶ νέα δείγματα!

James καὶ David Gregory

401. Ὁ James Gregory ἐγεννήθη εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Aberdeen τὸν Νοέμβριον τοῦ 1638. Ἐγένετο εὐνοϊκῶς γνωστὸς εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον ἀπὸ μίαν ἐφεύρεσίν του εἰς ἡλικίαν 23 ἐτῶν. Ἐπρόκειτο περὶ μιᾶς διόπτρας ἀνακλάσεως, τῆς ὁποίας τὴν περιγραφὴν ἔδωσεν εἰς ἕνα τόμον : De optica moderna (Λονδῖνον, 1663). Μετέβη κατόπιν εἰς τὴν Padova,

ὅπου ἐδίδασκε τότε ὁ S. degli Angeli, καὶ τοιουτοτρόπως ἦλθεν εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μὲ τὰ ἔργα τῶν ἐπιγόνων τοῦ Γαλιλαίου (περὶ τοῦ M. A. Ricci ὁμιλεῖ μὲ ἄκραν ἐκτίμησιν εἰς τὴν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Collins ὑπὸ χρονολογίαν 26ης Μαρτίου 1668). Ἐκεῖ παρέμεινε κατὰ τὴν περίοδον 1664 - 1667, εἰς τὴν Padova δὲ καὶ τὴν Βενετίαν ἐξετύπωσε τὰς δύο ἐκδόσεις (μὲ διαφόρους τίτλους) τοῦ σημαντικωτέρου γεωμετρικοῦ του ἔργου. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν πατρίδα, ἐξελέγη μέλος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας (11 Ἰουνίου 1668), ἐδημοσίευσεν ἕνα ἄλλο σημαντικὸν ἔργον καὶ ἐκλήθη νὰ διδάξῃ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Ἁγίου Ἀνδρέου. Τὴν 3ην Ἰουλίου 1687 τοῦ ἐδόθη ἡ καθηγητικὴ ἕδρα τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ἐδιμβούργου. Ἀπέθανε τὸν ἑπόμενον Ὀκτώβριον ὀλίγας ἡμέρας μετὰ τὴν ἀπώλειαν τῆς ὁράσεώς του κατὰ τὴν διάρκειαν ἀστρονομικῆς παρατηρήσεως. Σημαντικὴ ὑπῆρξεν ἡ μετὰ τοῦ Collins ἀλληλογραφία του (ἐκτυπωθεῖσα ἤδη σήμερον), τῆς ὁποίας ἐλάμβανε γνῶσιν ὁ Leibniz (βλ. ἐπιστολὴν 26ης Ἰουνίου 1676). Ὁ τελευταῖος εἶχεν ἐκδηλώσει εἰς τὸν Oldenburg τὴν ἐπιθυμίαν νὰ γνωρίζῃ ὅ,τι ἀξιόλογον περιελάμβανεν ἡ ἐν λόγῳ ἀλληλογραφία ἀπὸ ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως.

Τὸ ἔργον ποὺ ἐδημοσίευσεν εἰς τὴν Ἰταλίαν ὁ Gregory ἔχει ὡς πρώτιστον σκοπὸν τὴν μέτρησιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου. Πρὸς τοῦτο ἔλαβεν ὡς ἀφετηρίαν τὰς δύο σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν

$$S_n,\ \Sigma_n,\ S_{2n},\ \Sigma_{2n}$$

τεσσάρων κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος r καὶ ἀντιστοίχως n καὶ 2n πλευρῶν. Θέτοντες διὰ τὴν συντομίαν $\omega = \pi/2n$, θὰ λάβωμεν:

$$S_n = n\,r^2\,\text{ημ}\,\omega\,\text{συν}\,\omega, \quad S_{2n} = n\,r^2\,\text{ημ}\,\omega$$

$$\Sigma_n = n \cdot r^2\,\text{εφ}\,\omega, \qquad \Sigma_{2n} = 2\,n r^2\,\text{εφ}\,\frac{\omega}{2}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἀπορρέουν αἱ ἀναφερθεῖσαι δύο σχέσεις:

$$S_{2n} = \sqrt{S_n\,\Sigma_n} \qquad \frac{2}{\Sigma_{2n}} = \frac{1}{\Sigma_n} + \frac{1}{S_{2n}}$$

Κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς πολυαρίθμους προγενεστέρους καὶ μεταγενεστέρους ἐπιδόξους τετραγωνιστὰς τοῦ κύκλου, ὁ Gregory, ἀντὶ ν' ἀναλίσκεται εἰς προσπαθείας νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα σκοπὸν ἀπρόσιτον, ἐπεχείρησε ν' ἀποδείξῃ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ρητὴ συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος. Ὁ συλλογισμός του εἶναι σκοτεινὸς καὶ ὄχι ἐντελῶς πειστικός· τὸ ἐσημείωσεν ὁ Huygens εἰς τὴν Journal de Sçavants καὶ ὁ Gregory ἀπήντησεν ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὰ Philosophical Transactions. Ὁ ἀναγνώστης ὁ ἐπιθυμῶν νὰ γνωρίσῃ τὰς λεπτομερείας τῆς ἐν λόγῳ δια-

μάχης, ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ ἐνδιατρίψωμεν, δύναται νὰ τὰς ἀνεύρῃ εἰς τὸν τόμον VII τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν τοῦ Huygens. Κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτῆς ὁ Gregory ἀπέδειξε (ἐπιστολὴ τοῦ Collins 7 Μαρτίου 1670) τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος r :

$$\frac{4r^3}{2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{7484400d^4} - \cdots},$$

ὅπου d τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου καὶ e ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἰδίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος r. Ὁ Oldenburg ἐπέσυρεν ἐπὶ τῆς ἐκφράσεως ταύτης τὴν προσοχὴν τοῦ Leibniz (ἐπιστολὴ 15ης Ἀπριλίου 1675). Ὅπως καὶ ἂν ἐπιθυμῇ κανεὶς νὰ κρίνῃ τὴν διαμάχην αὐτήν, τὸ βέβαιον εἶναι, ὅτι ἀποτελεῖ τίτλον τιμῆς ἀδιαφιλονίκητον διὰ τὸν ἐξέχοντα ἄγγλον μαθηματικόν, τὸ γεγονὸς ὅτι ἔρριψε μίαν ἀκτῖνα φωτὸς εἰς ἕνα πεδίον, ὅπου ἡ ὁλότης τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του ἐφέρετο συνεχῶς ταλαντευομένη.

Ὁ Gregory ἐχειρίζετο τὰ θέματα τῶν σειρῶν μὲ θαυμαστὴν δεξιότητα καὶ εἶναι ὁ πρῶτος διερευνήσας τὴν ἔννοιαν καὶ δημιουργήσας τὸν ὅρον τῆς σ υ γ κ λ ί σ ε ω ς αὐτῶν. Ἀνεκάλυψε τὰ ἀναπτύγματα εἰς σειρὰν τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ὡς καὶ τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων τούτων. Εἰδικώτερα δίδεται τὸ ὄνομά του, δικαίως, εἰς τὴν σειράν :

$$x = \varepsilon\varphi x - \frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x + \frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5 x - \cdots$$

Περὶ μιᾶς μεθόδου του πρὸς ὁλοκλήρωσιν ὅλων τῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς :

$$y = bx^r (x^n + a)^m ,$$

γίνεται λόγος εἰς μίαν ἐπιστολὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τοῦ Huygens πρὸς τὸν μαρκήσιον de l' Hôpital, καὶ διὰ τῆς ὁποίας βεβαιοῦται ὅτι ὁ Gregory θὰ εἶχε βοηθήσει τὴν ἀνάλυσιν νὰ κάμῃ ἀξιολογωτάτας προόδους, ἐὰν ὁ θάνατος δὲν ἔθετε τέρμα εἰς τὴν δρᾶσιν του, πρὶν ἀκόμη φθάσῃ εἰς ἡλικίαν τεσσαράκοντα ἐτῶν.

402. Τὰ πολυάριθμα χειρόγραφά του περιῆλθον εἰς χεῖρας τοῦ ἀνεψιοῦ του David (γενν. εἰς Aberdeen τὴν 24ην Ἰουνίου 1661), ὁ ὁποῖος καὶ τὸν διεδέχθη εἰς τὴν καθηγεσίαν. Ἡ μελέτη τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν ἐνέπνευσεν εἰς τὸν David Gregory νέας ἐφαρμογὰς τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν συναρτήσεων εἰς σειράς, τὰς ὁποίας τελικῶς ἐξέθεσεν εἰς τὸ ἔργον του Exercitatio geometrica de dimensione figurarum. Ἐνθουσιώδης ζηλωτὴς τοῦ Newton, ἐξέλεξε πρῶτος τὰ Principia ὡς ὕλην τῶν πανεπιστημιακῶν του μαθημάτων.

Ἐλθὼν εἰς Λονδῖνον τὸ 1691, συνῆψε φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν Μέγαν ἐκεῖνον, χάρις εἰς τὴν ὑποστήριξιν τοῦ ὁποίου κατέλαβε σεβιλιανὴν ἕδραν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford[17].

Ἐκτὸς μερικῶν ἄρθρων (ἐν μέρει γνωσθέντων μετὰ θάνατον), ποὺ ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὰ Philosophical Transactions, καὶ περιέχουν ἐφαρμογὰς τῶν νέων λογισμῶν εἰς προβλήματα ἐπικαιρότητος (ἁλυσοειδής, φλωρεντινὸν αἴνιγμα, πλανητικαὶ τροχιαὶ κλπ.), ὀφείλεται ἀκόμη εἰς τὸν David Gregory μία μνημειώδης ἔκδοσις τοῦ Εὐκλείδου (1703), ἀναφερομένη πάντοτε μετ' ἐγκωμίων. Ἐπρόκειτο ν' ἀκολουθήσῃ μία ἀνάλογος ἔκδοσις τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀλλ' ὁ θάνατος, ὁ ὁποῖος τὸν ἥρπασεν ὄχι ἀκόμη πεντηκονταετῆ (10 Ὀκτωβρίου 1708), τὸν ἠνάγκασε ν' ἀφίσῃ εἰς τὸν Halley τὴν δόξαν νὰ φέρῃ ἐκεῖνος εἰς πέρας τὴν μεγάλην αὐτὴν ἐπιχείρησιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVII

ΜΕΣΟΧΡΟΝΙΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Πρῶται πρόοδοι τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας

403. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι προβλήματα, ὅπως «ἡ κατασκευὴ ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας» καὶ «ὁ ὑπολογισμὸς μήκους τόξων, ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων»· τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς πρωταρχικὰς μορφὰς τῶν δύο θεμελιωδῶν προβλημάτων τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ἤσκησαν διαρκοῦντος τοῦ XVII αἰῶνος τὴν μεγαλυτέραν ἕλξιν εἰς τὰ πνεύματα τῶν καλλιεργούντων τὰς θετικὰς ἐπιστήμας. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι οἱ ἄλλοι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν παρημελήθησαν· τοῦτο ἔγινεν ἤδη φανερὸν εἰς πολλὰς προηγηθείσας σελίδας, ἀλλὰ θὰ ἐπιβεβαιωθῇ ἐπίσης ἐξ ὅσων πρόκειται ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐκθέσωμεν.

Ἡ μεγάλη σπουδαιότης τῶν συντεταγμένων διέφυγε τῆς ἀντιλήψεως μεγάλου μέρους τῶν συγχρόνων τοῦ Descartes καὶ τοῦ Fermat. Ἐπέμειναν νὰ τὰς ἀγνοοῦν ἐξέχουσαι προσωπικότητες, ὅπως ὁ Pascal, οὔτε ἠσχολήθησαν μὲ αὐτὰς ἄλλοι δευτέρας σειρᾶς, οἱ ὁποῖοι θὰ ἠδύναντο διὰ τῆς συμβολῆς των εἰς τὴν καλλιέργειαν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας νὰ κερδίσουν τιμὰς καὶ ἐνδεχομένως δόξαν. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐργάτας τοῦ νέου τούτου κλάδου τῆς ἐπιστήμης πρέπει ν' ἀφήσωμεν τὴν χώραν ποὺ ἐγέννησε τὸν συγγραφέα τοῦ ἔργου «La géométrie» καὶ νὰ μεταφερθῶμεν ἰδεατῶς εἰς τὴν χώραν ἐκείνην, ἡ ὁποία ἐπὶ πολλὰ ἔτη τοῦ προσέφερεν ἄνετον φιλοξενίαν. Θὰ συναντήσωμεν τοιουτοτρόπως πάλιν ἕνα μέτριον πρόσωπον, ποὺ ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 361), τὸν François van Schooten.

Ἀπὸ τῶν ἐτῶν 1635 - 36 διετήρει ὁ Schooten φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν Descartes, ὁ ὁποῖος τὸν ἐφωδίασε μεταβαίνοντα εἰς Γαλλίαν μὲ συστατικὰς ἐπιστολάς. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὴν πατρίδα, ἐπεσκέφθη ἐκ νέου τὸν διάσημον φιλόσοφον, ὁ ὁποῖος ἐν τῷ μεταξὺ εἶχε δώσει πρὸς ἐκτύπωσιν τὸ μέγα μαθηματικόν του ἔργον, καὶ τὸ 1649 ἐδημοσίευσε μίαν λατινικὴν μετάφρασιν αὐτοῦ, συνοδευομένην ἀπὸ διάφορα σχόλια, ἡ ὁποία καὶ συνετέλεσε τὰ μέγιστα εἰς τὴν ἀνὰ τὸν κόσμον διάδοσιν τῶν ἰδεῶν τοῦ Descartes.

Τὰ σχόλια αὐτά (πολλὰ τῶν ὁποίων ἀφοροῦν τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος τῆς Géométrie) εἶναι ἐν γένει πολὺ λεπτομερῆ διὰ ν᾽ ἀναφερθοῦν ἐδῶ. Θὰ σημειώσωμεν μόνον ὅτι ὁ Schooter, ἀναπτύσσων μίαν ἔννοιαν μόλις σκιαγραφηθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Descarten, ἐπέτυχε νὰ εὕρῃ τοὺς τύπους, οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν εἰς τὴν ἀλλαγὴν τῶν συντεταγμένων. Ἀπέδειξεν ἐπίσης τὴν κατασκευὴν τῆς καθέτου εἰς μίαν κογχοειδῆ (§ 345), τὴν ὁποίαν ἁπλῶς εἶχε διατυπώσει ὁ Descartes, προσθέτων μάλιστα καὶ ἰδικήν του καλυτέραν. Τὸ ἀνάλογον ἐπέτυχε καὶ διὰ τὴν κυκλοειδῆ, περὶ τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἐκεῖνος εἶχεν ἁπλῶς κάμει ἔνδειξιν εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne ὑπὸ χρονολογίαν 20 Φεβρουαρίου 1639.

Οἱ τόμοι διὰ τῶν ὁποίων ὁ Schooten ἐπεχείρησε νὰ διαδώσῃ τὰς ἀνακαλύψεις τοῦ Descartes (βλ. τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ παρόντος Κεφαλαίου) περιέχουν καὶ ἄλλας ἐργασίας ἀποσκοπούσας εἰς συμπλήρωσιν ἢ ἀνάλυσιν τοῦ περιεχομένου τῆς Géométrie. Μερικαὶ ὀφείλονται εἰς τὸν ἴδιον, ἄλλαι εἰς τὸν ἀδελφόν του Peter (γενν. 22 Ὀκτωβρίου 1634, ἀποθ. 30 Νοεμβρίου 1679), ὁ ὁποῖος καὶ τὸν διεδέχθη εἰς τὴν καθηγεσίαν.

Ἐφελκύομεν τὴν προσοχὴν τῶν ἀναγνωστῶν ἐπὶ τοῦ Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis (Περὶ καταστρώσεως τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων), ἔργου προωρισμένου ν᾽ ἀποδείξῃ πῶς ἡ ἀρχαία γεωμετρικὴ μέθοδος ὑπεισέρχεται σιωπηρῶς εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν ἀνάλυσιν, ἀφοῦ μέσῳ τῆς τελευταίας δύνανται νὰ ληφθοῦν λύσεις κατασκευαστικοῦ χαρακτῆρος. Ἐπὶ πλέον ἀπαντῶνται μερικοὶ τύποι χρήσιμοι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

404. Ἄλλαι ἐκ τῶν προαναφερθεισῶν ἐργασιῶν ὀφείλονται εἰς ἕνα γάλλον δικαστικόν, περὶ τῶν σχολίων τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος εἰς μίαν ἐπιστολὴν ἀπευθυνθεῖσαν εἰς αὐτὸν ὑπὸ τοῦ Descartes τὴν 20ὴν Φεβρουαρίου 1639. Ἐννοοῦμεν τὸν Florimond de Beaune (γενν. εἰς Blois τὸ 1601, ἀποθ. ἐκεῖ τὸ 1652), τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα εἴδομεν ἤδη (§ 347), ὅτι συνδέεται μὲ μερικὰς καμπύλας, αἱ ὁποῖαι λύουν τὸ πρῶτον πρόβλημα ποὺ ἐπροτάθη ἐπὶ τῆς ἀντιστρόφου μεθόδου τῶν ἐφαπτομένων.

Ἐκείνην τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ εἰδίκευσις ἦτο ἀκόμη ἄγνωστος, ἀπαντῶμεν μεταξὺ τῶν πρώτων μελετητῶν τοῦ Descartes ἕνα ἄλλον δημόσιον ἄνδρα, τὸν John Hudde (γενν. εἰς Amsterdam τὸ 1633 ἢ τὸ 1640, ἀποθ. ἐκεῖ τὴν 16ην Ἀπριλίου 1704, κατέχοντα ἐπὶ 19 ἔτη τὴν ἕδραν τοῦ Δημάρχου τῆς γενεθλίου του πόλεως). Τὸ ὄνομά του, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει (§ 361), ἀπαντᾶται συνήθως εἰς τὰ βιβλία ἀλγέβρας, ὅπου φέρεται ὡς ἐφευρέτης τῆς λύσεως τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων διὰ τοῦ τεχνάσματος τῆς διασπάσεως τοῦ ἀγνώστου εἰς δύο μέρη. Τοῦτο θὰ ἦτο βεβαίως νόμιμον, ἐὰν ὁ Hudde ἦτο ὁ πρῶτος εἰσαγαγὼν αὐτὴν τὴν μέθοδον, ἀλλ᾽

ἐξ ὅσων ὁ ἀναγνώστης γνωρίζει ἤδη περὶ Tartaglia (§ 216) ἄγεται εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ τέχνασμα ὑπῆρξεν ἀκριβῶς ἐκεῖνο, ποὺ ὡδήγησε τὸν ἰταλὸν μαθηματικὸν εἰς τὴν ἀξιομνημόνευτον ἐκείνην ἀνακάλυψιν*.

Μαθηματικὸς ἐκ περιστάσεως ὑπῆρξεν ἐπίσης ὁ δανὸς Ἔρασμος Bartolino, (γενν. εἰς Roskild τὴν 13ην Αὐγούστου 1625, ἀποθ. τὴν 4ην Νοεμβρίου 1698 εἰς Κοπεγχάγην, εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς ὁποίας ἐδίδασκεν Ἰατρικήν). Ἐταξίδευσεν ἐπὶ μακρὸν εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ τὴν Ἀγγλίαν καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν παραμονῆς του εἰς τὰς Κάτω Χώρας συνέταξε μερικὰ μαθήματα σχολίων εἰς τὸν Descartes, τὰ ὁποῖα ἤκουσεν ὁ Schooten. Πρὸς τὴν ἀντίθετον κατεύθυνσιν, ἐπροχώρησεν ὁ H. van Heuraet, ὁ ὁποῖος ἐγεννήθη εἰς Harlem τὸ 1633 καὶ ἐσπούδασε τὴν ἰατρικὴν εἰς Leiden, ἀλλ' ἀποσυρθεὶς τὸ 1658 εἰς Saumur ἀφιερώθη ἀποκλειστικῶς εἰς τὰ μαθηματικά. Καὶ μὲ ποίαν ἀπόδοσιν εἰργάσθη μανθάνομεν ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Schooten, περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 1659, εἰς τὴν ὁποίαν καθιστᾷ γνωστὴν τὴν ὑπ' αὐτοῦ εὐθειοποίησιν τόξου τῆς ἡμικυβικῆς παραβολῆς, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι ἡ ἐξαίρετος αὐτὴ ἀνακάλυψις ἐπραγματοποιήθη περίπου συγχρόνως καὶ ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων ὑπὸ ἑνὸς γεωμέτρου γάλλου (Fermat), ἑνὸς ἄγγλου (Neil) καὶ ἑνὸς ὀλλανδοῦ (van Heuraet). Τυχαῖα σύμπτωσις, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ὁσάκις εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ὑποτιθεμένης λογοκλοπίας.

405. Κάτι περισσότερον καὶ καλύτερος ἑνὸς ἁπλοῦ σχολιαστοῦ φαίνεται εἰς ἡμᾶς ἕνας ποιητὴς καὶ πολιτικὸς ὁ John de Witt (γεννηθεὶς εἰς Dordrecht τὴν 24ην Σεπτεμβρίου 1625, δολοφονηθεὶς ὑπὸ τοῦ ὄχλου εἰς Aja τὴν 7ην Αὐγούστου 1672, ὅταν ἦτο Κυβερνήτης τῶν Ἡνωμένων Ἐπαρχιῶν). Τὸ νεανικόν του ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον Elementa linearum curvarum, (Στοιχεῖα καμπύλων γραμμῶν) περατωθὲν τὴν 6ην Ὀκτωβρίου 1658, ἐδημοσιεύθη τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ F. van Schooten καὶ ἀποτελεῖ τὴν μόνην ἐκ μέρους τοῦ συγγραφέως συμβολὴν εἰς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας.

Τὸ Βιβλίον I περιέχει μίαν εὐσύνοπτον γεωμετρικὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, ὁριζομένων καὶ σπουδαζομένων εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ἀποτελεῖ τρόπον τινὰ προοίμιον τοῦ Βιβλίου II, τοῦ ὁποίου ὁ σκοπὸς διαφαίνεται ἀπὸ τοὺς ἑξῆς λόγους τοῦ συγγραφέως: «Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα, ὅπου πρόκειται νὰ μελετηθῇ ἕνας γεωμετρικὸς τόπος, δηλαδὴ μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ

* Τὰ δημόσια καθήκοντα ἠμπόδισαν τὸν Hudde ν' ἀσχοληθῇ κατὰ συνέχειαν μὲ τὰς ἐπιστήμας ἐκείνας, πρὸς τὰς ὁποίας ᾐσθάνετο ἰδιαιτέραν κλίσιν. Πρῶτος παρετήρησεν ὅτι μία διπλῆ ρίζα ἐξισώσεως εἶναι ρίζα καὶ τῆς παραγώγου ἐξισώσεως. Ἐπὶ πλέον εἰς μίαν συνομιλίαν του μὲ τὸν Leibniz, ποὺ ἔλαβε χώραν τὸ 1676, ἐδήλωσεν ὅτι εἶχεν ἀνακαλύψει πρὸ τοῦ Sluse (§ 393) μίαν μέθοδον κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας καὶ ἀπὸ τοῦ 1662 τὴν μέθοδον τετραγωνισμοῦ τῆς ὑπερβολῆς, τὴν ὁποίαν ὁ Mercator ἐδημοσίευσε τὸ 1668 (§ 400).

ἢ μία καμπύλη, δυνάμεθα, λαμβάνοντες δύο γνωστὰς καὶ ὡρισμένας εὐθείας τεμνομένας ὑπὸ γωνίαν δοθεῖσαν ἢ αὐθαιρέτως ἐκλεγομένην, νὰ καταλήξωμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ἀναγομένη εἰς τὴν ἁπλουστέραν δυνατὴν μορφήν, δὲν περιέχῃ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων ἢ κάποιαν δύναμιν αὐτῶν, ὁ τόπος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι εὐθεῖα. Ἐὰν ὅμως ἕνας τῶν ἀγνώστων εἶναι εἰς τὸ τετράγωνον ἐνῷ ὁ ἄλλος δὲν παρουσιάζεται πολλαπλασιασμένος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του ἢ τὸν ἄλλον ἄγνωστον, ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι παραβολή. Ἐὰν περαιτέρω ἀμφοτέρων τῶν ἀγνώστων ὑπάρχουν τὸ τετράγωνον καὶ τὸ γινόμενον, ὁ τόπος θὰ εἶναι ἔλλειψις, ὑπερβολὴ ἢ περιφέρεια» (διὰ τὴν ἀλήθειαν θὰ ἠδύνατο ἐπίσης νὰ εἶναι παραβολή). Διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅλα αὐτὰ ὁ συγγραφεὺς θεωρεῖ διαδοχικῶς τὰς ἐξισώσεις :

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x \pm c, \qquad y = c - \frac{b}{a}x$$

τῆς ἐξαιρουμένης περιπτώσεως :

$$y = -c - \frac{b}{a}x$$

ἐξεταζομένης ὑπὸ τοῦ ἰδίου συμπτωματικῶς εἰς ἄλλην θέσιν.

Ἀμελῶν ἄλλας δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις, ὁ de Witt ἐξετάζει τὰς ἑξῆς μορφάς :

$$y^2 = ax, \quad y^2 = ax \pm b^2, \quad y^2 = b^2 - ax$$
$$xy = f^2, \quad ly^2/g = x^2 - f^2, \quad lx^2/g = y^2 - f^2$$
$$x^2 - ly^2/g = f^2$$

καὶ εὑρίσκει ἑκάστης τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν. Ἡ ἀλλαγὴ συντεταγμένων, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἐφαρμόζεται ἐπίσης ὑπὸ τοῦ ἰδίου πρὸς ἀναγωγὴν τῆς ἐξισώσεως :

$$y^2 + 2\frac{b}{a}xy + 2cy = \frac{b}{a}x^2 + 2ex + d^2$$

εἰς μίαν τῶν ἀνωτέρω μορφῶν.

Ἀφοῦ τοιουτοτρόπως ἔδωσε δείγματα τῆς δυνάμεως τοῦ τεχνάσματος αὐτοῦ, ὁ de Witt (μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων μερικῶν τόπων β' βαθμοῦ ὁριζομένων γεωμετρικῶς) ἀφιερώνει εἰς αὐτὸ εἰδικὸν Κεφάλαιον. Μερικὰ σημεῖα ἐπαφῆς μεταξὺ τούτου καὶ ἑνὸς ἔργου τοῦ Fermat, εἰς ἡμᾶς πολὺ γνωστοῦ (§ 355), τὰ ὁποῖα βεβαίως εἶναι τυχαῖα, δὲν δύνανται νὰ μειώσουν καθ' οἱονδήποτε τρόπον τὴν ἀξίαν τοῦ ἔργου τοῦ de Witt.

406. Περίπου τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἡ καρτεσιανὴ μέθοδος εὕρισκεν εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἕνα ἐργάτην καὶ ἑρμηνευτὴν εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ J. Wallis*, ὁ ὁποῖος τὸ αὐτὸ ἔτος ποὺ ἐδημοσίευσε τὴν Arithmetica infinitorum, ἔδιδεν εἰς τὴν δημοσιότητα ἐπίσης μίαν «νέαν» ἔκθεσιν τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἡ καινοτομία δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ πρῶτον μέρος αὐτῆς, ὅπου αἱ ἐν λόγῳ καμπύλαι θεωροῦνται εἰς τὸν χῶρον μὲ ἐφαρμογὰς τῆς ἀρχῆς τοῦ Cavalieri, ἀλλ' εἰς τὸ δεύτερον, ὅπου αὗται μελετῶνται μὲ περιωρισμένην ἐφαρμογὴν τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ἐκφραζόμεθα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διότι ὁ Wallis εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν κάνει ἄλλο παρὰ νὰ σημαίνῃ διὰ γραμμάτων τὰ ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου μεθοδικῶς εἰσαγόμενα μήκη καὶ τοιουτοτρόπως ἀντὶ τῶν ἀναλογιῶν, τὰς ὁποίας προτιμᾷ ὁ ἕλλην γεωμέτρης, χειρίζεται ἐξισώσεις. Ἂν καὶ μικρὸν τὸ βῆμα, εἶναι πάντως μία πρόοδος!

Περὶ τὸ τέλος τοῦ ἔργου του, ὁ Wallis ἠθέλησε νὰ ἐπιχειρήσῃ μίαν πτῆσιν πρὸς τὰς παραβολὰς ἀνωτέρας τάξεως, ἀλλὰ δὲν εἶχεν αἰσίαν ἔκβασιν· διότι μὴ καθορίσας προηγουμένως καμμίαν σύμβασιν ὡς πρὸς τὰ πρόσημα τῶν συντεταγμένων, ἐσχεδίασε τὴν παραβολὴν $y = x^3$ ὡς ἐὰν ἦτο τοῦ αὐτοῦ σχήματος μὲ τὴν $y = x^2$. Αὐτὴ ἡ ἀνακρίβεια (ποὺ ἐπανευρίσκεται εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Brouncker) ἀναφέρεται ἐδῶ μόνον διότι χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ λάβωμεν μίαν ἰδέαν τῆς καταστάσεως εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία τὸ 1665. Αἱ Κωνικαὶ τοῦ Wallis ἔχουν λοιπὸν μόνον ἱστορικὴν ἀξίαν, τὴν ὁποίαν ἐπαυξάνει τὸ γεγονὸς ὅτι ἐδῶ διὰ πρώτην φορὰν εἰσάγεται τὸ σύμβολον ∞ ὡς δηλωτικὸν τοῦ ἀπείρου.

Ἀξίαν ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην, ποὺ ἔχουν αἱ ἐφαρμογαὶ τῶν συντεταγμένων ὑπὸ τοῦ Wallis, ἔχουν ἐκεῖναι, τὰς ὁποίας ἀπαντῶμεν εἰς ἕνα ἔργον τοῦ Roberval, δημοσιευθὲν μετὰ θάνατον. Ἡ διάθεσις τῆς ἀρνητικῆς ἀδιαφορίας ποὺ ἐπέδειξεν ὁ τελευταῖος ἔναντι τῆς καρτεσιανῆς μεθόδου φαίνεται ὅτι μὲ τὸν καιρὸν ἐξησθένησεν, εἴτε κατ' ἐπίδρασιν τοῦ Mersenne, εἴτε κατόπιν τοῦ δημοσιεύματος τοῦ Fermat τοῦ τιτλοφορουμένου Ad locos planos et solidos isagoge (§ 355). Τῆς μεταβολῆς αὐτῆς τοῦ Roberval ἔχομεν δείγματα εἰς ἕνα ὑπόμνημα De geometrica planarum et cubicarum aequationem resolutione (Περὶ γεωμετρικῆς λύσεως ἐπιπέδων καὶ κυβικῶν ἐξισώσων), εἰς τὸ ὁποῖον ἀποκαθιστῶνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ κύκλου (τέσσαρες μέθοδοι), τῆς παραβολῆς, τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἀντιστοίχως ὑπὸ τρεῖς, ἑπτὰ καὶ τρεῖς μορφάς. Τῆς κογχοειδοῦς εὑρίσκει ὁ Roberval τὰς ἐξισώσεις κεχωρισμένως διὰ τοὺς δύο κλάδους ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

---

* Σημειωθήτω, πρὸς τιμήν του, ὅτι ἀνεγνώρισε τὴν ταυτότητα τῆς ὑπὸ τοῦ Roberval ὀνομασθείσης καμπύλης «compagne de la roulette» καὶ τῆς «ἡμιτονοειδοῦς».

Περὶ εὐθείας οὐδὲ λόγος! Υἱοθετῶν τὸ συμβολικὸν σύστημα τοῦ Viète, ὁ Roberval, σημαίνει τὰς συντεταγμένας διὰ τῶν γραμμάτων A, E, I, Y, γράφει δ' ἐπὶ πλέον τὰς ἐξισώσεις μὲ δεύτερον μέλος τὸ 0.

407. Πρὶν ἢ δημοσιευθῇ τὸ ἀνωτέρω κείμενον εἰς τὰ Χρονικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων, ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Γαλλίαν ἄλλα ἔργα, τὰ ὁποῖα πράγματι συνέβαλον ἀποτελεσματικῶς εἰς τὴν εὐρυτέραν διάδοσιν τῶν ἰδεῶν τοῦ Descartes καὶ τοῦ Fermat. Συγγραφεύς των εἶναι ἕνας μαθηματικός, τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει πολλάκις, ὁ Philippe de la Hire. Γεννηθεὶς εἰς Παρισίους τὴν 18ην Μαρτίου 1640, προωρίζετο ν' ἀκολουθήσῃ τὸ ἐπάγγελμα τοῦ πατρός του, ὁ ὁποῖος ἦτο ζωγράφος τῆς Αὐλῆς καὶ καθηγητὴς τῆς Ἀκαδημίας Καλῶν Τεχνῶν τῶν Παρισίων. Ὅταν ἔχασε τὸν πατέρα του, δεκαεξαετής, ἦλθεν εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπου ἀπὸ τὴν προοπτικὴν καὶ γνωμονικήν, τὰς ὁποίας ἐμελέτα μὲ ἐνδιαφέρον, ἐστράφη πρὸς τὴν γεωμετρίαν. Ἔλαβε τότε τὸ μέρος τοῦ Descartes καὶ ἔγραψε μερικὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, τὰ ὁποῖα ὁ Bosse παρενέβαλεν εἰς ἕνα ἐκ τῶν ἔργων του.

Εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς ἀφιέρωσε τὸ 1673 ἕνα ἔργον, ὅπου αἱ ἐν λόγῳ καμπύλαι ἐρευνῶνται μέσῳ ἑνὸς ἀξιολόγου ἐπιπέδου μετασχηματισμοῦ (πρόκειται περὶ μιᾶς ὁμολογίας ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ κέντρου, τοῦ ἄξονος καὶ μιᾶς ὁριακῆς εὐθείας), ὁ ὁποῖος τρέπει τὴν περιφέρειαν εἰς κωνικὴν τομήν. Χάρις εἰς αὐτὰ καὶ ἄλλα ἔργα του ποὺ θ' ἀναφέρωμεν μετ' ὀλίγον, ἐγένετο δεκτὸς τὸ 1678 εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν*, τὸ δὲ 1682 κατέλαβε τὴν ἕδραν τοῦ Ramus εἰς τὸ Κολλέγιον τῆς Γαλλίας. Εἰς τὴν γεωμετρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν ἀφιέρωσεν ἔπειτα ἄλλο ἔργον μεγαλυτέρας πνοῆς, τὸ ὁποῖον, γραφὲν εἰς τὴν λατινικήν, διεδόθη ταχέως ἀκόμη καὶ πέραν τοῦ Ρήνου. Ἀπέθανεν εἰς Παρισίους τὴν 21ην Ἀπριλίου 1718.

Τὰ ἔργα τοῦ La Hire ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν αὐτὴν τὴν στιγμὴν εἶναι τρεῖς μικροὶ τόμοι δημοσιευθέντες τὸ 1679. Εἰς τὸν πρῶτον αἱ κωνικαὶ τομαὶ σπουδάζονται γεωμετρικῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον, μὲ ἀφετηρίαν τὰς ἑστιακάς των ἰδιότητας. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν δεύτερον, παρατηροῦμεν, πρὸ πάντων, ὅτι τὰ χρησιμοποιούμενα σύμβολα | καὶ || δηλοῦν τὸ μὲν πρῶτον τὸν λόγον, τὸ δὲ δεύτερον τὴν ἰσότητα, εἰς τρόπον ὥστε ἡ γραφή:

$$a \mid b \parallel xx \mid ab,$$

εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2}{ab},$$

* Εἰς τὰ Mémoires τῆς διασήμου Ἀκαδημίας ὁ La Hire ἐδημοσίευσεν ἀρκετὰς γεωμετρικὰς ἐργασίας ἐπὶ μερικῶν κατηγοριῶν ἀξιολόγων καμπύλων (κυκλοειδῶν καὶ κογχοειδῶν).

ἐνῷ ἡ γραφή : aa | xx | ab,
σημαίνει :

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2}{ab}.$$

Εἰς τὸ Κεφ. II τοῦ αὐτοῦ Βιβλίου εὑρίσκονται λελυμένα μερικὰ προβλήματα ὡρισμένα ἢ μή, εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ εἰς τὸν χῶρον, πρὸς τὸν σκοπὸν ν' ἀποδείξουν πῶς ἡ μελέτη τῶν γεωμετρικῶν ζητημάτων ὁδηγεῖ φυσικῶς εἰς τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι εἰσάγονται περὶ τὸ τέλος τοῦ ἰδίου Κεφαλαίου.

Ἐκεῖ μανθάνομεν ὅτι ὡς «γεωμετρικὸν τόπον» ἐννοεῖ ὁ συγγραφεὺς οἱανδήποτε γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα μὲ ὡρισμένα σημεῖα σταθερά. Ἕνα ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴν τοῦ «τόπου». Ὀνομάζει «στέλεχος» (tige) καὶ «κλάδον» (rameau) τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου καὶ «κόμβον» (noeud) τὸν πόδα τῆς κατηγμένης τοῦ θεωρουμένου σημείου. Ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθεῖ τὸν Descartes εἰς τὴν κατανομὴν τῶν «γενῶν» ὅλων τῶν καμπύλων, καὶ καθιστᾷ γνωστὸν ὅτι αἱ τοῦ πρώτου γένους ἔχουν ἐξισώσεις ἀναγομένας εἰς μίαν τῶν ἀκολούθων μορφῶν :

$$\frac{a}{b}x = y, \qquad ax = y^2, \qquad \frac{a}{b}x^2 = \pm(d^2 - y^2).$$

Πῶς δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἀναγωγὴ διὰ μέσου μιᾶς ἀλλαγῆς συντεταγμένων ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἰδίου διὰ σειρᾶς παραδειγμάτων : Πρὸς τιμήν του πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἐπρότεινε τοὐλάχιστον τὸ πρόβλημα τῆς ἐξαγωγῆς συμπεράσματος περὶ τοῦ εἴδους μιᾶς κωνικῆς δι' ἁπλῆς ἐποπτείας τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

Τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ βιβλία τοῦ La Hire, ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, ἀρχίζει μὲ ἕνα πρόλογον, εἰς τὸν ὁποῖον συνοψίζονται αἱ μέθοδοι γραφικῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων, αἱ ἐκτεθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Descartes εἰς τὴν Géométrie καὶ ὑπὸ τοῦ Hudde εἰς τὸ ἔργον του Mesolabium. Ὁ La Hire προσθέτει ὅτι παρετήρησε μερικὰς ἀνακριβείας διαπραχθείσας ὑπὸ τοῦ Descartes, τὰς ὁποίας ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Huygens. Ὅταν δὲ ἀνεκοίνωσεν αὐτὰς εἰς τὸν Fermat, ἔμαθεν ὅτι καὶ ὁ μεγάλος ἐκεῖνος μαθηματικὸς εἶχε ἤδη ἐπισημάνει τὰ σημεῖα αὐτά. Ὁ La Hire προσθέτει ὅτι, προτοῦ δώσῃ εἰς τὴν δημοσιότητα τὰς παρατηρήσεις του, ἐβεβαιώθη (μὲ ἐπιστολὴν πρὸς τὸν Huygens) ὅτι ὁ Hudde δὲν ἐσκέπτετο νὰ ἐπιστρέψῃ ἐπὶ τῶν θεμάτων ποὺ ἐπραγματεύετο εἰς τὸ προαναφερθὲν ἔργον του*. Εἰσερχόμενος δὲ κατόπιν εἰς τὴν καρδίαν

* Δυστυχῶς ἡ ἐπιστολὴ αὐτὴ δὲν ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πολλῶν ποὺ ἀντηλλάγησαν μεταξὺ τῶν δύο μαθηματικῶν καὶ ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὰ Ἅπαντα τοῦ Huygens. Ση-

τοῦ ζητήματος, ὁ συγγραφεὺς προβαίνει εἰς ἀλγεβρικὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ καὶ γραφικὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων γ' καὶ δ', χρησιμοποιῶν τὰς ἐξισώσεις τὰς ὁποίας παρέταξεν εἰς τὸν προηγούμενον τόμον. Μεταβαίνων ἔπειτα εἰς τὰς ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ, παρατηρεῖ (ὅπως, ἐν ἀγνοίᾳ του, εἶχεν ἤδη κάμει ὁ Fermat, § 356) ὅτι ὁ Descartes διὰ νὰ τὰς λύσῃ εἶχε κάμει χρῆσιν καμπύλων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πραγματικῶς ἀρκοῦντος καί, διὰ νὰ προλάβῃ ἄλλους νὰ ἐμπέσουν εἰς τὸ αὐτὸ σφάλμα, κλείει τὸ ἔργον του μὲ τὴν ὑπόδειξιν τῶν καμπύλων ἐκείνων, ἐλαχίστου βαθμοῦ, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦνται, πρὸς λύσιν ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μέχρι 64ου βαθμοῦ.

Μιμούμενοι τὸ παράδειγμα ἑνὸς ἐνθουσιώδους πανηγυριστοῦ, θὰ ἔπρεπε νὰ ὁμιλήσωμεν ἐδῶ καὶ διὰ τὸν Ugo de Omerique — περὶ τῆς ζωῆς τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ μόνον ἡ χρονολογία (6 Ἰανουαρίου 1634) καὶ ὁ τόπος τῆς γεννήσεως (Sanlucar de Barrameda) — ὁ ὁποῖος ἐθεώρει ἑαυτὸν πρόδρομον τῆς νέας ἀναλυτικῆς γεωμετρίας. Ἀλλ' ἡ ἀντικειμενικὴ ἐξέτασις τοῦ ἔργου, ποὺ ἐδημοσίευσε λήγοντος τοῦ XVII αἰῶνος (τὰ ἄλλα ἔργα του εἶναι ἁπλᾶ βιβλία ἀριθμητικῆς, τριγωνομετρίας καὶ λογαριθμικῶν πινάκων) ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι πρέπει μᾶλλον νὰ συγκαταριθμηθῇ μεταξὺ τῶν μακρινῶν μαθητῶν τῶν ἑλλήνων γεωμετρῶν. Πράγματι ὁ τίτλος Γεωμετρικὴ ἀνάλυσις ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸ ἔργον του δικαιολογεῖται μόνον ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ὁ συγγραφεὺς κατὰ τὴν λύσιν ἀριθμητικοῦ καὶ ἀλγεβρικοῦ ζητήματος, ἀνατρέχει εἰς τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, πολὺ γνωστὴν εἰς τοὺς ἀναγνώστας τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καὶ χρησιμοποιεῖ σταθερῶς τὰς ἀναλογίας. Διὰ νὰ δηλώσῃ τὴν ἰσότητα εἰσάγει εἰδικὸν σύμβολον, τοῦ ὁποίου χρῆσις δὲν εἴδομεν νὰ γίνεται ἀπὸ κανένα ἄλλον.

Τὰ προβλήματα ποὺ πραγματεύεται εἶναι ἁπλᾶ καὶ μικρᾶς μόνον πρωτοτυπίας*. Κατανέμονται ὅμως μὲ καλὴν μέθοδον καὶ λύονται μὲ ἐπιμέλειαν. Προδίδουν καλὴν ἐκ μέρους τοῦ συγγραφέως γνῶσιν τοῦ Πάππου, τοῦ Viète, τοῦ Schooten κλπ. Μαθητὴς τῆς Ἑταιρείας τοῦ Ἰησοῦ ὁ Omerique διετήρησεν ἐγκαρδίους σχέσεις μὲ τοὺς διδασκάλους του, μερικοὶ τῶν ὁποίων ἐπλούτισαν τὸ ἔργον μὲ σελίδας γραφείσας ὑπὸ τῶν ἰδίων.

μειοῦμεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ, ὅτι ἡ πρώτη ἐκ τῶν ὑφισταμένων φέρει χρονολογίαν 24 Μαρτίου 1680 καὶ περιέχει τὸ θεώρημα «δύο κωνικαὶ μὲ ἄξονας παραλλήλους τέμνονται εἰς 4 σημεῖα ὁμοκυκλικά», τὸ ὁποῖον ἀπεκάλυψαν συγχρόνως οἱ δύο ἀλληλογραφοῦντες.

* Εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ὑπενθυμίζεται ὁ πρίγκηψ Ruggiero di Ventimiglia (γενν. εἰς Παλέρμον τὴν 10ην Σεπτεμβρίου 1670, ἀποθ. ἐκεῖ τὴν 12ην Σεπτεμβρίου 1698), συγγραφεύς, μεταξὺ ἄλλων, καὶ ἑνὸς μικροῦ ἔργου φέροντος τίτλον Dubia geometrica (Palermo, 1692).

Θά κλείσωμεν τάς σημειώσεις αὐτάς μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι εἰς τὴν ἐποχὴν περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλοῦμεν ἀνήκει ἐπίσης μία τριλογία ἀφορῶσα τὴν μέθοδον τῶν συντεταγμένων καὶ ὀφειλομένη εἰς τὸν Jacob Ozanam (γενν. εἰς Bouligneux τὸ 1640, ἀποθ. εἰς Παρισίους τὴν 3ην Ἀπριλίου 1717). Ἄν καὶ σημιτικῆς καταγωγῆς, προωρίζετο ἀπὸ τὴν οἰκογένειάν του, ἀσπασθεῖσαν τὸν Χριστιανισμόν, διὰ τὴν ἐκκλησιαστικὴν σταδιοδρομίαν. Ἐκεῖνος ὅμως ἐπροτίμησε νὰ στραφῇ πρὸς τάς ἐπιστήμας, ἐδίδαξε δὲ μαθηματικὰ ἰδιωτικῶς πρῶτα εἰς τὴν Λυὼν καὶ κατόπιν εἰς Παρισίους. Γονιμώτατος συγγραφεύς, εἰς τὴν δρᾶσιν τοῦ ὁποίου ὀφείλομεν μίαν πλήρη σειρὰν μαθηματικῶν μαθημάτων (Cours), ἕνα μαθηματικὸν Λεξικὸν καὶ μίαν Συλλογὴν διασκεδαστικῶν μαθηματικῶν, ὁμοίαν τῆς τοῦ Bachet de Méziriac (§ 309), ἡ ὁποία εἶχε τὴν πλέον καταπληκτικὴν ἐπιτυχίαν, ἂν κρίνωμεν ἀπὸ τάς ἀλλεπαλλήλους ἐκδόσεις καὶ μεταφράσεις της.

Christiaan Huygens

408. Εἰς τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς ὁποίας ἀφηγούμεθα τὰ ἐπιτεύγματα ἀνήκει ἕνα πρόσωπον, τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ εἶχε δώσει τὸ ὄνομά του εἰς τὸν αἰῶνα ποὺ ἔζησε, ἂν δὲν εἶχε τὴν ἀτυχίαν ἢ τὴν τύχην νὰ ζήσῃ εἰς ἐποχὴν βρίθουσαν ἀπὸ προσωπικότητας πρώτου ἀναστήματος. Παρὰ ταῦτα, καίτοι περιστοιχούμενος ὑπὸ γιγάντων, δὲν παύει νὰ φαίνεται κολοσσιαίου μεγέθους, ἔστω καὶ ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ καθαρὰ μαθηματικὰ δὲν ἀποτελοῦν τὴν κυρίαν του ἀπασχόλησιν, ὅπως συνέβαινε καὶ μὲ τὸν Γαλιλαῖον, καὶ ὅτι ἐκ τοῦ λόγου τούτου ἡ θέσις του εἰς τὴν παροῦσαν ἱστορίαν παρουσιάζει ἔκτασιν μικροτέραν ἐκείνης ἄλλων προσωπικοτήτων μετριωτέρου ἀναστήματος. Ἐννοοῦμεν τὸν Christiaan Huygens. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς τὴν Χάγην ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν διαμαρτυρομένων τὴν 14ην Αὐγούστου 1629. Ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πατρός του ἔτυχεν ἐπιμελεστάτης ἀγωγῆς καὶ εὐρυτάτης παιδείας. Εἰς ἡλικίαν 16 ἐτῶν μετεφέρθη εἰς Leiden διὰ νὰ κάμῃ ἐκεῖ νομικὰς σπουδάς. Ἐλθὼν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν François von Schooten, ἠδυνήθη νὰ ἐπωφεληθῇ τῶν πολυτίμων μαθημάτων καὶ συμβουλῶν του κατὰ τὰ ἔτη 1645 — 46 καὶ 1646 — 47. Τοιουτοτρόπως ἐγνώρισε τὰ ἔργα τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος (Ἀρχιμήδους, Ἀπολλωνίου, Πάππου, Διοφάντου) καὶ τῶν νεωτέρων χρόνων (Viète καὶ Descartes). Τὰ τετράδια τῶν σημειώσεών του τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἐπιτρέπουν ν' ἀναμετρήσωμεν τὴν ἔκτασιν τῶν σπουδῶν του, αἱ ὁποῖαι καλύπτουν ὅλους τοὺς μαθηματικοὺς κλάδους τῆς ἐποχῆς του. Τότε ἔκαμε μίαν παρατήρησιν, ἡ ὁποία ἀπεκάλυψεν ἕνα νέον πνεῦμα προωρισμένον διὰ τάς ὑψηλοτέρας πτήσεις· εἴδομεν ἤδη (§ 303) ὅτι ὁ Γαλιλαῖος ἐξέλαβεν ὡς παραβολὴν τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὑπὸ

Θά κλείσωμεν τάς σημειώσεις αὐτάς μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι εἰς τὴν ἐποχὴν περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλοῦμεν ἀνήκει ἐπίσης μία τριλογία ἀφορῶσα τὴν μέθοδον τῶν συντεταγμένων καὶ ὀφειλομένη εἰς τὸν Jacob Ozanam (γενν. εἰς Bouligneux τὸ 1640, ἀποθ. εἰς Παρισίους τὴν 3ην Ἀπριλίου 1717). Ἂν καὶ σημιτικῆς καταγωγῆς, προωρίζετο ἀπὸ τὴν οἰκογένειάν του, ἀσπασθεῖσαν τὸν Χριστιανισμόν, διὰ τὴν ἐκκλησιαστικὴν σταδιοδρομίαν. Ἐκεῖνος ὅμως ἐπροτίμησε νὰ στραφῇ πρὸς τὰς ἐπιστήμας, ἐδίδαξε δὲ μαθηματικὰ ἰδιωτικῶς πρῶτα εἰς τὴν Λυὼν καὶ κατόπιν εἰς Παρισίους. Γονιμώτατος συγγραφεύς, εἰς τὴν δρᾶσιν τοῦ ὁποίου ὀφείλομεν μίαν πλήρη σειρὰν μαθηματικῶν μαθημάτων (Cours), ἕνα μαθηματικὸν Λεξικὸν καὶ μίαν Συλλογὴν διασκεδαστικῶν μαθηματικῶν, ὁμοίαν τῆς τοῦ Bachet de Méziriac (§ 309), ἡ ὁποία εἶχε τὴν πλέον καταπληκτικὴν ἐπιτυχίαν, ἂν κρίνωμεν ἀπὸ τὰς ἀλλεπαλλήλους ἐκδόσεις καὶ μεταφράσεις της.

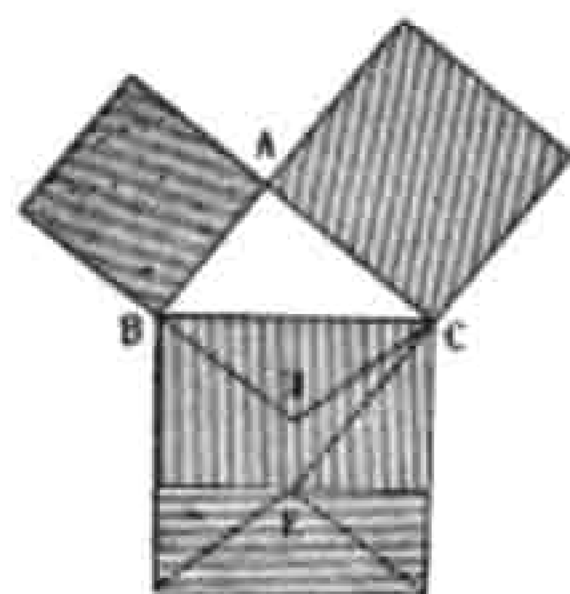
Christiaan Huygens

408. Εἰς τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς ὁποίας ἀφηγούμεθα τὰ ἐπιτεύγματα ἀνήκει ἕνα πρόσωπον, τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ εἶχε δώσει τὸ ὄνομά του εἰς τὸν αἰῶνα ποὺ ἔζησε, ἂν δὲν εἶχε τὴν ἀτυχίαν ἢ τὴν τύχην νὰ ζήσῃ εἰς ἐποχὴν βρίθουσαν ἀπὸ προσωπικότητας πρώτου ἀναστήματος. Παρὰ ταῦτα, καίτοι περιστοιχούμενος ὑπὸ γιγάντων, δὲν παύει νὰ φαίνεται κολοσσιαίου μεγέθους, ἔστω καὶ ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ καθαρὰ μαθηματικὰ δὲν ἀποτελοῦν τὴν κυρίαν του ἀπασχόλησιν, ὅπως συνέβαινε καὶ μὲ τὸν Γαλιλαῖον, καὶ ὅτι ἐκ τοῦ λόγου τούτου ἡ θέσις του εἰς τὴν παροῦσαν ἱστορίαν παρουσιάζει ἔκτασιν μικροτέραν ἐκείνης ἄλλων προσωπικοτήτων μετριωτέρου ἀναστήματος. Ἐννοοῦμεν τὸν Christiaan Huygens. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς τὴν Χάγην ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν διαμαρτυρομένων τὴν 14ην Αὐγούστου 1629. Ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πατρός του ἔτυχεν ἐπιμελεστάτης ἀγωγῆς καὶ εὐρυτάτης παιδείας. Εἰς ἡλικίαν 16 ἐτῶν μετεφέρθη εἰς Leiden διὰ νὰ κάμῃ ἐκεῖ νομικὰς σπουδάς. Ἐλθὼν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν François von Schooten, ἠδυνήθη νὰ ἐπωφεληθῇ τῶν πολυτίμων μαθημάτων καὶ συμβουλῶν του κατὰ τὰ ἔτη 1645 — 46 καὶ 1646 — 47. Τοιουτοτρόπως ἐγνώρισε τὰ ἔργα τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος (Ἀρχιμήδους, Ἀπολλωνίου, Πάππου, Διοφάντου) καὶ τῶν νεωτέρων χρόνων (Viète καὶ Descartes). Τὰ τετράδια τῶν σημειώσεών του τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἐπιτρέπουν ν' ἀναμετρήσωμεν τὴν ἔκτασιν τῶν σπουδῶν του, αἱ ὁποῖαι καλύπτουν ὅλους τοὺς μαθηματικοὺς κλάδους τῆς ἐποχῆς του. Τότε ἔκαμε μίαν παρατήρησιν, ἡ ὁποία ἀπεκάλυψεν ἕνα νέον πνεῦμα προωρισμένον διὰ τὰς ὑψηλοτέρας πτήσεις· εἴδομεν ἤδη (§ 303) ὅτι ὁ Γαλιλαῖος ἐξέλαβεν ὡς παραβολὴν τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὑπὸ

τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους του, σχοινίον ἀναρτώμενον ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα του. Τὴν γνώμην αὐτὴν συνεμερίσθη καὶ ὁ Stévin, ὁ ὁποῖος ἐνόμιζε μάλιστα ὅτι κατεῖχε καὶ τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς. Ὁ Huygens, προσπαθῶν νὰ μαντεύσῃ αὐτὴν τὴν δῆθεν ἀπόδειξιν, ἀνεγνώρισε τὴν πλάνην τῆς γνώμης των*. Ἡ ἀνακάλυψις αὐτὴ—τὴν ὁποίαν ὁ Huygens ἐπρόκειτο ἀργότερα νὰ συμπληρώσῃ προσδιορίζων τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς καμπύλης (A.E., δηλαδὴ Acta Eruditorum, Ἰούνιος 1691) — ἀνακοινωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Schooten πρὸς τὸν Descartes προεκάλεσε μίαν προφητικὴν δήλωσιν τοῦ τελευταίου (ἐπιστολὴ 16ης Ἰουνίου 1646), ὅτι ὁ Huygens ἦτο προωρισμένος νὰ γίνῃ «ἐξοχότης εἰς τὴν ἐπιστήμην αὐτήν».

Πρὸς συμπλήρωσιν τῶν νομικῶν του σπουδῶν παρέμεινεν δύο ἀκόμη ἔτη εἰς τὴν Breda, κατόπιν τῶν ὁποίων ἐπέστρεψεν εἰς Χάγην. Τὸ δίπλωμα τῆς νομικῆς ἔλαβεν εἰς τὴν Γαλλίαν (Κράτος εἰς τὸ ὁποῖον ἴσχυεν ἀκόμη τὸ Θ έ σ π ι σ μ α τῆς Νάντης τῆς 13ης Ἀπριλίου 1598) ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιον διαμαρτυρομένων τοῦ Angers, πόλεως εἰς τὴν ὁποίαν μετέβη κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς τὴν Γαλλίαν τὸ θέρος τοῦ 1655.

Ἀπὸ τοῦ 1651 εἶχε δώσει εἰς τὴν δημοσιότητα μίαν ὀξεῖαν ἀνασκευὴν τοῦ Opus magnum τοῦ G. de S. Vincent, περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον. Ἀλλὰ τὰ ἔτη ποὺ ἠκολούθησαν τὸ πέρας τῶν σπουδῶν του (1655 - 1659) ὑπῆρξαν, ἀκόμη καὶ εἰς τὸν τομέα τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν, ἔτη ἀσυνήθους γονιμότητος, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀλληλογραφίαν του καὶ ἀπὸ κατάλοιπα χειρόγραφά του, δημοσιευθέντα ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. Τὰ ἔγγραφα αὐτὰ ἀποδεικνύουν, ὅτι δὲν ὑπῆρξε κλάδος τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του, πρὸς τὸν ὁποῖον δὲν ἔστρεψε τὴν διάνοιαν**: ἡ στοιχειώδης γεωμετρία (μεταξὺ ἄλλων ἐπενόησε μίαν νέαν καὶ κομψὴν ἀπόδειξιν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, σχ. 28, ὅπου BD = BA, CE = CA καὶ ἐκ τοῦ E ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὴν BC), ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν (κλάδος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ Fermat ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν



Σχ. 28

* Τὸ ἐσφαλμένον τῆς γνώμης τοῦ Γαλιλαίου ἀνεγνωρίσθη καὶ πρὸ τοῦ Huygens πειραματικῶς ὑπὸ τοῦ Ἰωακεὶμ Jung (1587 - 1685), ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ ἔργον του Ἐ μ π ε ι ρ ι κ ὴ γ ε ω μ ε τ ρ ί α (1627).

** Ἐνδιαφέρον εἶναι νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἰς μίαν ἐπιστολήν του γραφεῖσαν τὸ 1650 ἐπεσήμανε τοὺς κινδύνους τῆς μεθόδου τῶν ἀδιαιρέτων, τὴν ὁποίαν ἐν τούτοις δὲν εἶχε διδαχθῆ ἀπὸ ἄμεσον ἀνάγνωσιν τῶν ἔργων τοῦ Cavalieri. Θὰ ἴδωμεν (§ 462) ὅτι εἰς τὸν ἀπειροστικὸν λογισμὸν ἐπεφύλαξε σοφώτατα εὐμενῆ ὑποδοχὴν καὶ κατέληξε νὰ τὸν χρησιμοποιῇ μὲ ἄκραν εὐχέρειαν.

τῶν μαθηματικῶν χάρις εἰς τὰς γνωστὰς μαχητικάς του προκλήσεις § 360), εὐθειοποιήσεις καὶ τετραγωνισμοί, ἔρευναι ἐπὶ εἰδικῶν καμπύλων (ὡς εἶναι αἱ παραβολαί, ὑπερβολαὶ πάσης τάξεως, πέρλαι τοῦ Sluse, φύλλον τοῦ Καρτεσίου, τετραγωνίζουσα τοῦ Δεινοστράτους), ἰδιαιτέρως ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς, πρὸς τὴν ὁποίαν ἐστράφη ἡ διάνοια τοῦ Huygens ἐξ ἀφορμῆς τῆς μαχητικῆς προκλήσεως τοῦ Pascal (§ 379)*, ἐνειλιγμέναι, παράλληλοι καμπύλαι κλπ.



CHRISTIAAN HUYGENS

Ἀπὸ τὰς σελίδας αὐτὰς συνάγεται, ὅτι ὁ Huygens εἰς τὰς ἐρεύνας του ἐχρησιμοποίει ἐλευθέρως τὰς συντεταγμένας καὶ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν μὲ καρτεσιανὸν συμβολισμόν, ἀλλὰ κατὰ τὴν διατύπωσιν τῶν συμπερασμάτων του πρὸς δημοσίευσιν ἐφήρμοζε τὰς κλασσικὰς μεθόδους. Καὶ μάλιστα αἱ συναντώμεναι δυσκολίαι κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῆς μεταφορᾶς αὐτῆς ἐκ τοῦ ἑνὸς συστήματος εἰς τὸ ἄλλο ἐγένοντο ἀφορμή, ὥστε ν' ἀποφύγῃ τὴν ἐν συνόλῳ δημοσίευσιν ὡρισμένων ἐργασιῶν του, περιορισθεὶς νὰ διατυπώσῃ μόνον τὰ συμπεράσματα. Ἂς προσθέσωμεν ὅτι, ὅταν ὁ Schooten παρεσκεύαζε μίαν νέαν ἔκδοσιν τῆς εἰς τὴν λατινικὴν μεταφράσεως τῆς Géométrie τοῦ Descartes, ἐζήτησε τὴν συνδρομὴν τοῦ παλαιοῦ του μαθητοῦ, ὁ ὁποῖος τοῦ εἰσηγήθη βελτιώσεις, τὴν ἀξίαν τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ

* Ἀπὸ μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν J. Bouilliand, τὴν 25ην Ἰουλίου 1658, συνάγεται ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ὁ πρῶτος τετραγωνισμὸς κυκλοειδικοῦ χωρίου.

ἐκτιμήσωμεν, μόλις σήμερον, κατόπιν τῆς δημοσιεύσεως ὅλων τῶν χειρογράφων τοῦ Huygens.

Ἡ ἔντονος ἀπασχόλησις τοῦ Huygens μὲ τὰ μαθηματικὰ δὲν τὸν ἀπέσπασεν ἀπὸ τὴν μελέτην τῶν φυσικῶν φαινομένων. Ἀπὸ τῆς νεότητός του ἠσχολεῖτο μὲ τὴν λείανσιν τῶν ὑάλων τῶν τηλεσκοπίων καὶ δὲν ἐβράδυνε ν' ἀποκτήσῃ μοναδικὴν ἐμπειρίαν εἰς ἐργασίας αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Οὕτω, ὡδηγήθη ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς τὴν διοπτρικήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἤρχισεν ἀπὸ τοῦ 1653 νὰ συγγράφῃ ἕνα ἔργον δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του (1703), ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς ἐκτεταμένας οὐρανίους ἐξερευνήσεις, καρπὸς τῶν ὁποίων ὑπῆρξεν ἡ ἀποκάλυψις τοῦ πρώτου δορυφόρου καὶ τοῦ δακτυλίου τοῦ Κρόνου. Ὡς ἐὰν δὲν ἔφθανεν αὐτό, κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἐπέτυχε νὰ ἐφαρμόσῃ τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὰ ὡρολόγια, ἐφεύρεσις ἡ ὁποία προηγήθη ὀλίγον μόνον τῆς ἐκ μέρους του ἀνακαλύψεως τοῦ ἰσοχρόνου τῆς κυκλοειδοῦς, καὶ ἔγραψε τὴν πρώτην ἔκθεσιν τῶν μεθόδων πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἀνέκυψαν ἐκ τῶν τυχηρῶν παιγνιδίων (§ 413).

409. Ἂν καὶ εἰλικρινὴς θαυμαστὴς τοῦ Descartes, ὁ Huygens δὲν ἐδίστασε νὰ διατυπώσῃ τὴν γνώμην, ὅτι οἱ νόμοι οἱ προταθέντες ὑπὸ τοῦ πρώτου ὡς διέποντες τὴν κροῦσιν τῶν σωμάτων εἶναι ἀπαράδεκτοι. Ὁ Schooten, φοβηθεὶς διὰ τὴν τόλμην τοῦ παλαιοῦ μαθητοῦ του, προσεπάθησε νὰ τὸν μεταπείσῃ χωρὶς ὅμως ἀποτέλεσμα. Ὁ Huygens πράγματι ἐπροχώρησε προτείνων ἄλλους νόμους, οἱ ὁποῖοι καὶ ἔτυχον γενικῆς ἀποδοχῆς. Ἠκολούθησε τὸν πατέρα του (χειμὼν 1660 - 1661) μεταβαίνοντα εἰς Παρισίους ὑπὸ τὴν ἰδιότητα πρεσβευτοῦ, κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν δὲ ἐπέρασεν ἀπὸ τὸ Λονδῖνον. Τρίτον ταξίδιον εἰς Παρισίους ἔλαβε χώραν ἀπὸ τὸν Ἀπρίλιον τοῦ 1663 μέχρι τοῦ Ἰουνίου 1664, μὲ μίαν μετάβασιν εἰς Λονδῖνον, ὅπου, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του, ἐγένετο μέλος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας.

Ὅταν ἱδρύθη ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων, ὁ Λουδοβῖκος XIV τὸν ἐκάλεσεν ἀμέσως νὰ λάβῃ μέρος. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης ἔγινε σχεδὸν μόνιμος κάτοικος τῆς γαλλικῆς πρωτευούσης (Ἀπρίλιος 1666 - Σεπτεμβρίου 1670, Ἰούνιος 1671 - Μαρτίου 1676, Μάρτιος 1678 - Σεπτεμβρίου 1681), μετέχων δραστηρίως εἰς τὰς ἐργασίας τῆς Ἀκαδημίας καὶ δημοσιεύων ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐχρειάσθησαν πολὺν χρόνον νὰ γίνουν κλασσικαί. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ ἐργασίαι α) Horologium oscillatorium (Ἐκκρεμὲς ὡρολόγιον) ὅπου μεταξὺ ἄλλων ἀπαντᾶται ἡ πρώτη ἔκθεσις ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἐνειλιγμένων καὶ β) De la cause de la Pesanteur (Περὶ τῆς αἰτίας τῆς βαρύτητος), εἰς παράρτημα τῆς ὁποίας ἐκτίθενται αἱ κυριώτεραι ἰδιότητες τῆς λογαριθμικῆς καμπύλης. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοιούτων περιοδειῶν συνῆψε φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν νεαρὸν Leibniz καὶ τὸν

κατηύθυνεν εἰς τὰ πρῶτα βήματά του πρὸς τὰς μαθηματικὰς σπουδάς.

Ἡ ἀνάκλησις τοῦ Θεσπίσματος τῆς Νάντης (23 Ὀκτωβρίου 1685) τὸν ἠνάγκασε νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρίδα, ἀλλὰ δὲν ἔσβησεν ἐντός του ἡ μαθηματικὴ δραστηριότης. Ἐκτὸς ἄλλων τεκμηρίων ποὺ θὰ σημειώσωμεν περαιτέρω, ἀναφέρομεν ἐδῶ τὸ διάσημον ἔργον του: Traité de la lumière (Πραγματειὰ περὶ τοῦ φωτός, 1690). Ἀπέθανεν εἰς τὴν πόλιν τῆς γεννήσεώς του τὴν 8ην Ἰουνίου 1695.

Ἡ πατρίς, ἡ ὁποία τὸν εἶχε θαυμάσει εἰς τὴν ζωήν, δὲν παρέλειψε νὰ τοῦ ἀποδώσει τὰς σημαντικωτέρας τιμὰς μετὰ θάνατον. Ἐκ τῶν πολυαρίθμων χειρογράφων του ἔλαβον ἀμέσως γένεσιν οἱ Τόμοι οἱ φέροντες τοὺς τίτλους: Opuscula posthuma (1703), Opera varia (1724) καὶ Opera reliqua (1728), ἐδημοσιεύθησαν δὲ καὶ πολυάριθμα μέρη τῆς ἐπιστημονικῆς του ἀλληλογραφίας.

Δύο αἰῶνας μετὰ τὸν θάνατόν του ἀνελήφθη ἡ μνημειώδης κριτικὴ ἔκδοσις τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν του (μετὰ τῆς Ἀλληλογραφίας του), ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἤδη εἰς τὸ στάδιον τῆς ἐκτυπώσεως.

410. Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον κατέστησε γνωστὸν εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον τὸν εἰκοσιδυετῆ Christiaan Huygens εἶναι τὸ Theoremata de quadratura κλπ. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διακεκριμένα μέρη, τὸ ἕνα θεωρητικὸν καὶ τὸ ἄλλο κριτικόν. Τὸ πρῶτον ἐνεπνεύσθη ὁ συγγραφεὺς ἀπὸ τὰς κεντροβαρικὰς ἐρεύνας τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ ὁποῖαι διήγειρον εἰς τὸν νεαρὸν μαθηματικὸν τὴν ἐπιθυμίαν νὰ κάμῃ μερικὰς προσθήκας εἰς τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Συρακουσίου. Ἐστράφη κυρίως πρὸς τὴν ὑπερβολήν, ἀποδείξας ὅτι, γνωστοῦ ὄντος τοῦ τετραγωνισμοῦ της, ἀπορρέει ἐξ αὐτοῦ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς χωρίου της. Ἡ ὁδὸς ὅμως διὰ τῆς ὁποίας ἔφθασεν εἰς αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα δὲν τὸν ἱκανοποίησε καὶ κατόπιν νέων μελετῶν εὗρεν ἄλλην σαφεστέραν καὶ ἐφαρμόσιμον ὁμοιοτύπως εἰς ὅλας τὰς κωνικὰς τομάς. Τότε μόνον ἔλαβε γνῶσιν τοῦ μικροῦ ἔργου τοῦ della Faille (§ 320) — περὶ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται μετὰ πολλῶν ἐγκωμίων εἰς ἐπιστολάς του καὶ εἰς τὸν Πρόλογον τοῦ βιβλίου του — καὶ ἀκριβῶς τὸ θεώρημα ποὺ καθορίζει τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ἀποτελεῖ καὶ τὸν ἐπίλογον τοῦ αὐτοῦ ἔργου.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ποὺ ἐσπούδαζεν εἰς τὴν Breda εἶχε λάβει γνῶσιν τῆς ὑπάρξεως ἑνὸς μαστοδοντικοῦ ὄγκου συγγράμματος τοῦ G. de S. Vincent, εἰς τὸν τίτλον τοῦ ὁποίου ἀνηγγέλλετο ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Ματαίως τὸ ἐζήτησεν ἐπὶ ἐπιστροφῇ ἀπὸ τὸν Pell (§ 423), ὁ ὁποῖος, ὅπως ἔκαμαν καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ πρὸς τοὺς ὁποίους ἀπηυθύνθη, ἠρνήθη νὰ ἐκφράσῃ γνώμην ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀνακοινωθείσης ἀνακαλύψεως. Τέλος (τὸ ἀποκαλύπτει μία ἐπιστολή του πρὸς

τὸν Mersenne τῆς 20ῆς Ἀπριλίου 1648) ἐπέτυχε νὰ τὸ ἀποκτήσῃ. Πότε κατώρθωσε ν' ἀνακαλύψῃ τὴν πλάνην τοῦ συγγραφέως δὲν μᾶς εἶναι γνωστὸν μὲ ἀκρίβειαν. Γνωρίζομεν μόνον ὅτι, ἀφοῦ ἀνεκοίνωσε πρὸς αὐτὸν τὰς παρατηρήσεις του, ἀντὶ ὑπερασπίσεως, ἔλαβεν ὡς ἀπάντησιν τὴν προτροπὴν νὰ καταστήσῃ δημοσίως γνωστὰς τὰς παρατηρήσεις του. Εἶναι ἀκριβῶς αὐταί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ περιεχόμενον τοῦ Μέρους II τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργου.

411. Διαπιστωθέντος ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, παρὰ τὰς ἡρωικὰς προσπαθείας τοῦ πατρὸς Γρηγορίου, ἀνέμενεν ἀκόμη τὸν λύτην του, ὁ Huygens ᾐσθάνθη τὴν ἔφεσιν νὰ δοκιμάσῃ, ἂν δύναται νὰ ἐπιφέρῃ ἰδικήν του συμβολήν, θέτων ὡς σκοπόν, ἐμπνεόμενος καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη (βλ. ἔργον De circuli magnitudine inventa), νὰ συμπληρώσῃ τὰ ὅσα εἶχε γράψει ὁ Συρακούσιος γύρω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν π. Ἀλλ' ἐνῷ οἱ πολυάριθμοι ὑπολογισταί, περὶ τῶν ὁποίων ἔχομεν ἤδη κάμει λόγον, περιωρίζοντο ν' ἀκολουθοῦν πιστῶς τὰ ἴχνη τοῦ Συρακουσίου, ὁ Huygens κατώρθωσε νὰ πλουτίσῃ τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν διὰ τόσων καὶ τοιούτων συμπερασμάτων, ὥστε δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ σχετικὴ θεωρία ἔφθασεν ἀκριβῶς τότε εἰς τὴν μεγίστην της τελειότητα. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ δὲν ἐχρησιμοποίησε παρὰ στοιχειωδέστατα μέσα, τοῦ ἀνήκει ἡ δόξα, ὅτι κατώρθωσε νὰ προσθέσῃ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου πολλὰς σελίδας, ἀξίας νὰ φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κορυφαίου ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου.

Ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον ν' ἀναφέρωμεν (ὅπως θὰ τὸ ἠθέλαμεν ὠθούμενοι ἀπὸ τὸν πειρασμὸν) ὅλα τὰ θεωρήματα ποὺ ἀπέδειξεν ὁ Huygens — μερικὰ τῶν ὁποίων εἶχεν ἄνευ ἀποδείξεως διατυπώσει καὶ ὁ Stévin — θὰ περιορισθῶμεν ν' ἀναφέρωμεν, χάριν συντομίας, μόνον τὰ κομψότερα. Διὰ τὴν συντομίαν θὰ καλέσωμεν, P_n καὶ S_n τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου n πλευρῶν περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1, p_n καὶ s_n τὰ ἀνάλογα μεγέθη διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον· ὑφίστανται τότε αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

$$\pi > s_{2n} + \frac{(s_{2n} - s_n)}{3} \qquad (1)$$

$$2\pi > p_{2n} + \frac{p_{2n} - p_n}{3} \qquad (2)$$

$$\pi < \frac{2}{3} S_n + \frac{1}{3} s_n \qquad (3)$$

$$2\pi < \frac{2}{3} P_{2n} + \frac{1}{3} p_n \qquad (4)$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ ἐπιτρέπουν νὰ εὕρωμεν ὁλοὲν πλησιεστέρας τιμὰς τοῦ π, ἔτι δὲ νὰ ἐπινοήσωμεν ἀξιολόγους προσεγγιστικὰς κατασκευὰς εὐθειοποιήσεως τῆς περιφερείας. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου, ὁ ὀλλανδὸς μαθηματικὸς ἔφθασεν εἰς τὸν ἀκόλουθον περιορισμὸν τοῦ π:

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538 \qquad (5)$$

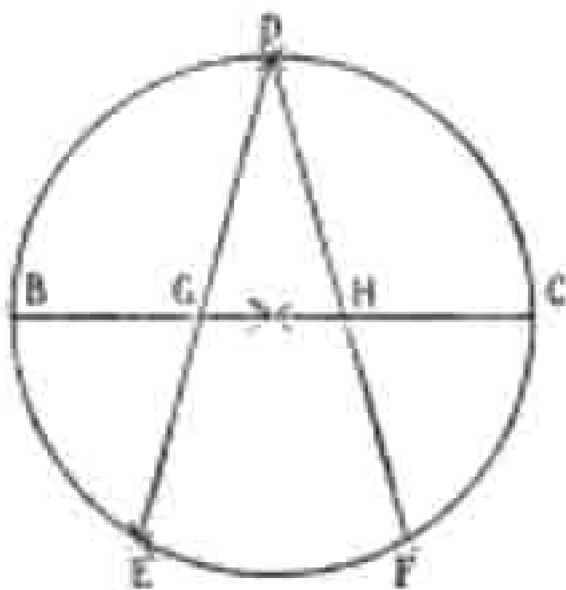
καὶ εἰς πλῆθος προσεγγιστικῶν κατασκευῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐξέχει διὰ τὴν ἁπλότητά της ἡ ἀκόλουθος:

Δοθέντος (σχ. 29) ἑνὸς κύκλου διαμέτρου BC, ἃς σημειωθῇ τὸ μέσον D ἑνὸς τῶν δύο ἡμικυκλίων καὶ ἃς τριχοτομηθῇ ἰσάκις τὸ δεύτερον, διὰ τῶν σημείων E, F. Ἔστωσαν G, H τὰ σημεῖα τομῆς τῆς διαμέτρου BC μὲ τὰς εὐθείας DE, DF. Θὰ εἶναι:

$$\frac{\pi}{2} = DG + GH,$$

κατὰ διαφορὰν ἐπὶ ἔλαττον 1/5000 τῆς διαμέτρου.

Ὁ Huygens παρατηρεῖ ὀρθῶς, ὅτι δι' ἐφαρμογῆς τῶν συμπερασμάτων του δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κρίνωμεν περὶ τῆς ἀξίας νέων τετραγωνισμῶν τοῦ κύκλου (π.χ. δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἀμέσως, ὅτι εἶναι ἐσφαλμένη ἡ μέθοδος τοῦ Longomontano ἐφ' ὅσον ὁδηγεῖ εἰς τιμὴν τοῦ π > 3,14182) καὶ νὰ καταστήσωμεν ἀκριβεστέρους τοὺς ὑφισταμένους πίνακας χορδῶν.



Σχ. 29

Δὲν πρέπει νὰ παρασιωπηθῇ ἐπίσης τὸ γεγονός, ὅτι ἠσχολήθη ὁ Huygens καὶ μὲ ἕνα γενικώτερον ζήτημα, τουτέστι μὲ τὴν εὐθειοποίησιν τυχόντος κυκλικοῦ τόξου, δικαιολογῶν καὶ τελειοποιῶν ἕνα ἀποτέλεσμα ληφθὲν ἀπὸ τὸν καρδινάλιον de Cusa (Τόμος I, § 181) χωρὶς νὰ παραλείψῃ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος. Ἀλλ' οὔτε καὶ αὐτὸ ἐξαντλεῖ τὰς συμβολὰς τοῦ Huygens εἰς τὴν μοναδικὴν καμπύλην, ποὺ κατέλαβε θέσιν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας.

412. Τὸ μικρὸν ἔργον ποὺ ἀνελύσαμεν ἐν συντομίᾳ ἀνωτέρω ἔχει ἕνα Παράρτημα ἀξιόλογον, τὸ ὁποῖον περιέχει νέας γεωμετρικὰς λύσεις πολλῶν προβλημάτων τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα, ὅπως ἐδείχθη ἀπὸ προσφάτως δημοσιευθέντα χειρόγραφά του, ἔφθασεν ὁ Huygens ἐφαρμόζων τὰς μεθόδους τοῦ Descartes καὶ τῶν ὀπαδῶν του εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ. Θ' ἀναφέρωμεν μεταξὺ τούτων τὸ ἀρχιμήδειον πρόβλημα τῆς διαιρέσεως μιᾶς σφαίρας εἰς δύο μέρη ἔχοντα δοθέντα λόγον, τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου, τὴν παρεμβολὴν δύο μέσων ἀνα-

λόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μεγεθῶν, τὸν προσδιορισμὸν τῶν βελῶν τῆς κογχοειδοῦς, καὶ πολλὰ προβλήματα παρεμβολῆς. Πρόκειται περὶ προβλημάτων ποὺ εὑρίσκοντο τότε εἰς τὴν ἡμερησίαν διάταξιν, ὅπως ἀποδεικνύεται, μεταξὺ ἄλλων, καὶ ἀπὸ τὸ Mesolabium τοῦ R. de Sluse (§ 393). Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐκ τῶν καταλειφθέντων χειρογράφων τοῦ μεγάλου, περὶ οὗ ὁ λόγος, προκύπτει ὅτι ἀκριβῶς ἡ μελέτη τοῦ ἔργου ἐκείνου τὸν ὡδήγησεν εἰς τὴν τελειοποίησιν τῶν κατασκευῶν ποὺ εἶχε δημοσιεύσει προηγουμένως, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐπέστρεψε καὶ πάλιν ἀργότερα, ὡς ἐὰν ἤθελε νὰ ἐκδηλώση τὸ ἀδιάπτωτον ἐνδιαφέρον του δι' αὐτάς. Τετάρτου βαθμοῦ εἶναι ἐπίσης τὸ πρόβλημα, ποὺ εἶναι γνωστὸν ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Alhazen, καὶ μὲ τὸ ὁποῖον ἐπὶ μακρὸν ἠσχολήθη (βλ. ἀλληλογραφίαν του) ἐπιτυχὼν μάλιστα τὴν πρώτην λίαν ἐπιτυχῆ γεωμετρικὴν λύσιν.

Θὰ ἠδύνατο κανεὶς νὰ ὑποθέση, ὅτι μὲ τὰ σημαντικὰ αὐτὰ δημοσιεύματα ὁ Huygens ἔθαψε διὰ παντὸς τὸν δῆθεν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, περὶ τοῦ ὁποίου εἶχεν ἐκφέρει τὴν κριτικήν του. Ὁ πατὴρ Γρηγόριος, ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς βασιμότητος τῶν διατυπωθεισῶν παρατηρήσεων ἐπὶ τῆς σχετικῆς ἐργασίας του, ἀπήντησε μὲ ὑπεκφυγάς. Ἀντὶ αὐτοῦ ἔλαβον τὸν λόγον εἰς ὑπεράσπισίν του τρεῖς ἄνδρες τῆς ἐκκλησίας, ἤτοι οἱ Ἰησουῖται A.A. Sarasa (γενν. εἰς Nieuwenpont τὸ 1618, ἀποθ. εἰς Ἀμβέρσαν τὴν 5ην Ἰουλίου 1667) καὶ F.S.Ayscom (γενν. εἰς Ἀμβέρσαν τὸ 1624, ἀποθ. ἐκεῖ τὴν 8ην Δεκεμβρίου 1660) καὶ ὁ G. L. Kinner von Löwenthurm (γενν. εἰς Reichenbach κατὰ τὸ 1610). Εἰς τὸν δεύτερον ὁ Huygens ἀπήντησε κατὰ τρόπον σύντομον μέν, ἀλλὰ τόσον ἀκριβῆ, ὥστε τὰ ἀμερόληπτα πρόσωπα ἔκριναν, ὅτι ἡ συζήτησις ἔληξεν ὁριστικῶς μὲ καταδικαστικὴν ἀπόφασιν εἰς βάρος τοῦ πατρὸς Γρηγορίου.

413. Ὅταν ὁ Huygens μετέβη διὰ δευτέραν φορὰν εἰς τὴν Γαλλίαν δὲν εὗρε τὴν εὐκαιρίαν νὰ γνωρίση τὸν Fermat, οὔτε τὸν Pascal, οὔτε τὸν Carcavy. Ἦλθεν ὅμως εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Roberval καὶ μὲ ἕνα ἄλλον γάλλον νομομαθῆ, τὸν Claude Mylon, περὶ τῆς μαθηματικῆς δεξιότητος τοῦ ὁποίου πολλὰ δείγματα ὑφίστανται εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν του. Εἶναι λοιπὸν βέβαιον, ὅτι ἔλαβεν οὕτω εὐκαιρίαν νὰ ἐνημερωθῆ ἐπὶ τῶν προβλημάτων ποὺ ἀνέκυψαν ἐκ τῶν τυχηρῶν παιγνιδίων καὶ διεφιλονικοῦντο τότε μεταξὺ Fermat καὶ Pascal.

Ἐπιστρέψας εἰς τὴν Ὁλλανδίαν, φαίνεται ὅτι ἤρχισεν ἀμέσως νὰ συγγράφη μίαν σύντομον πραγματείαν ἐπὶ τοῦ θέματος, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ 1656 ἀνήγγειλεν εἰς τὸν Schooten καὶ τὸν Roberval, ὅτι εἶχεν ἤδη θέσει τὰς βάσεις. Συνεφωνήθη μάλιστα ἀπὸ τότε μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ Huygens ὅτι τὸ κείμενον, ποὺ προέκυπτε τελικῶς, θὰ παρενεβάλλετο εἰς τὸ ἔργον Exercitationum mathematicarum libri cinque (Μαθηματικῶν ἐφαρμογῶν

βιβλία πέντε), ἔργον τὸ ὁποῖον ὁ Schooten προητοίμαζε πρὸς δημοσίευσιν, τόσον εἰς λατινικὴν ὅσον καὶ εἰς ὀλλανδικὴν γλῶσσαν (πρᾶγμα ποὺ ἐγένετο κατὰ τὰ ἔτη 1657 καὶ 1660). Σημειοῦμεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ, ὅτι χειρόγραφα προσφάτως δημοσιευθέντα ἀποδεικνύουν, ὅτι ὁ Huygens ἐσυνέχισε καὶ μετέπειτα ἀσχολούμενος μὲ τὸ αὐτὸ θέμα.

Ἐνῷ ὁ Pascal παρουσίασε τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα ὡς ἁπλᾶς ἐφαρμογὰς τοῦ συνδυαστικοῦ λογισμοῦ, ὁ Huygens, κατόπιν βαθυτέρας μελέτης, παρετήρησεν ὅτι, τῆς ἐν λόγῳ θεωρίας ἀποτελούσης νέον κλάδον τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, ἦτο ἀπαραίτητον νὰ θεμελιωθῇ οὗτος ἐπὶ αἰτήματος ξένου πρὸς τὴν καθαρὰν ἐπιστήμην. Καὶ ὡς κατάλληλον πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἔλαβεν ὁ μαθηματικός μας ἀκριβῶς τὴν ἀρχήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐστηρίχθησαν οἱ μεταγενέστεροι θεμελιωταὶ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων. Εἰς τὸ τέλος τῆς πραγματείας του ὁ συγγραφεὺς ἐπρότεινε πλῆθος νέων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἐπροκάλεσαν μέγα ἐνδιαφέρον ἀκόμη καὶ εἰς ἐξέχουσας προσωπικότητας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμεν τὸν Hudde. Ἄλλας ἀποδείξεις τῆς ἐπιτυχίας τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Huygens θὰ συναντήσωμεν, ὅταν θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ XVIII αἰῶνος.

Θὰ τελειώσωμεν μὲ τὴν παρατήρησιν (μολονότι τὰ ἔργα τοῦ Huygens, ποὺ εἶναι ξένα πρὸς τὰ καθαρὰ μαθηματικά, ἐξέρχονται τοῦ πλαισίου μας), ὅτι εἰς ἕνα ἔργον του δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του ὑπὸ τὸν τίτλον Planetario automatico, ἔκαμε μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἐφαρμογὴν τῶν συνεχῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἔρευναν μιᾶς ἀνέτου ἐκφράσεως εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοῦ λόγου τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τῶν περιόδων περιφορᾶς Γῆς καὶ Κρόνου, φθάνων τοιουτοτρόπως εἰς τὸν ἁπλούστατον λόγον 206/7.

Ὁ Τόμος XVII τῶν Ἁπάντων τοῦ Huygens (1932) δίδει (σελ. 334 - 338) πληροφορίας περὶ τῶν ἐρευνῶν τοῦ κορυφαίου ὀλλανδοῦ νὰ τελειοποιήσῃ τὴν ἀριθμομηχανὴν τοῦ Pascal, περὶ τῆς ὁποίας εἶχε πληροφορηθῆ ἀπὸ τὸν Bellair τὸν Ἰούλιον τοῦ 1659 (Oeuvres complètes de Huygens, T. II, 1889, σ. 426 καὶ πέραν).

Ἔργα στοιχειώδους γεωμετρίας

414. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν θρησκευτικῶν ἐρίδων, αἱ ὁποῖαι ἀνεφύησαν εἰς τὴν Γαλλίαν ἐκ τῶν ἰδεῶν τοῦ Jansen (1585 - 1638) κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος, ὁ Antoine Arnauld ἀνῆλθεν εἰς τόσον ὑψηλὴν φήμην, ὥστε ἀπεκαλεῖτο ὑπὸ τοῦ κοινοῦ «ὁ μέγας Arnauld». Γεννηθεὶς εἰς Παρισίους τὴν 6ην Φεβρουαρίου 1612, συνεπλήρωσεν εὐδοκίμως τὰς σπουδάς του εἰς τὴν Σορβόννην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεκηρύχθη τὸ 1641 διδάκτωρ. Τὸ 1648 ἀπεσύρθη εἰς τὸ ἀββαεῖον τοῦ Port - Royal, ὅπου συνέζησε μὲ τὸν Pascal. Ἡ ἀλληλογραφία του μὲ τὸν Leibniz καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Huy-

βιβλία πέντε), ἔργον τὸ ὁποῖον ὁ Schooten προητοίμαζε πρὸς δημοσίευσιν, τόσον εἰς λατινικὴν ὅσον καὶ εἰς ὀλλανδικὴν γλῶσσαν (πρᾶγμα ποὺ ἐγένετο κατὰ τὰ ἔτη 1657 καὶ 1660). Σημειοῦμεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ, ὅτι χειρόγραφα προσφάτως δημοσιευθέντα ἀποδεικνύουν, ὅτι ὁ Huygens ἐσυνέχισε καὶ μετέπειτα ἀσχολούμενος μὲ τὸ αὐτὸ θέμα.

Ἐνῷ ὁ Pascal παρουσίασε τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα ὡς ἁπλᾶς ἐφαρμογὰς τοῦ συνδυαστικοῦ λογισμοῦ, ὁ Huygens, κατόπιν βαθυτέρας μελέτης, παρετήρησεν ὅτι, τῆς ἐν λόγῳ θεωρίας ἀποτελούσης νέον κλάδον τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, ἦτο ἀπαραίτητον νὰ θεμελιωθῇ οὗτος ἐπὶ αἰτήματος ξένου πρὸς τὴν καθαρὰν ἐπιστήμην. Καὶ ὡς κατάλληλον πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἔλαβεν ὁ μαθηματικός μας ἀκριβῶς τὴν ἀρχήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐστηρίχθησαν οἱ μεταγενέστεροι θεμελιωταὶ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων. Εἰς τὸ τέλος τῆς πραγματείας του ὁ συγγραφεὺς ἐπρότεινε πλῆθος νέων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἐπροκάλεσαν μέγα ἐνδιαφέρον ἀκόμη καὶ εἰς ἐξέχουσας προσωπικότητας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμεν τὸν Hudde. Ἄλλας ἀποδείξεις τῆς ἐπιτυχίας τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Huygens θὰ συναντήσωμεν, ὅταν θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ XVIII αἰῶνος.

Θὰ τελειώσωμεν μὲ τὴν παρατήρησιν (μολονότι τὰ ἔργα τοῦ Huygens, ποὺ εἶναι ξένα πρὸς τὰ καθαρὰ μαθηματικά, ἐξέρχονται τοῦ πλαισίου μας), ὅτι εἰς ἕνα ἔργον του δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του ὑπὸ τὸν τίτλον Planetario automatico, ἔκαμε μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἐφαρμογὴν τῶν συνεχῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἔρευναν μιᾶς ἀνέτου ἐκφράσεως εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοῦ λόγου τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τῶν περιόδων περιφορᾶς Γῆς καὶ Κρόνου, φθάνων τοιουτοτρόπως εἰς τὸν ἁπλούστατον λόγον 206/7.

Ὁ Τόμος XVII τῶν Ἁπάντων τοῦ Huygens (1932) δίδει (σελ. 334 - 338) πληροφορίας περὶ τῶν ἐρευνῶν τοῦ κορυφαίου ὀλλανδοῦ νὰ τελειοποιήσῃ τὴν ἀριθμομηχανὴν τοῦ Pascal, περὶ τῆς ὁποίας εἶχε πληροφορηθῆ ἀπὸ τὸν Bellair τὸν Ἰούλιον τοῦ 1659 (Oeuvres complètes de Huygens, T. II, 1889, σ. 426 καὶ πέραν).

Ἔργα στοιχειώδους γεωμετρίας

414. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν θρησκευτικῶν ἐρίδων, αἱ ὁποῖαι ἀνεφύησαν εἰς τὴν Γαλλίαν ἐκ τῶν ἰδεῶν τοῦ Jansen (1585 - 1638) κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος, ὁ Antoine Arnauld ἀνῆλθεν εἰς τόσον ὑψηλὴν φήμην, ὥστε ἀπεκαλεῖτο ὑπὸ τοῦ κοινοῦ «ὁ μέγας Arnauld». Γεννηθεὶς εἰς Παρισίους τὴν 6ην Φεβρουαρίου 1612, συνεπλήρωσεν εὐδοκίμως τὰς σπουδάς του εἰς τὴν Σορβόννην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεκηρύχθη τὸ 1641 διδάκτωρ. Τὸ 1648 ἀπεσύρθη εἰς τὸ ἀββαεῖον τοῦ Port - Royal, ὅπου συνέζησε μὲ τὸν Pascal. Ἡ ἀλληλογραφία του μὲ τὸν Leibniz καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Huy-

gens τοῦ ἀφιέρωσεν ἕνα ἀντίτυπον τοῦ ἔργου του Horologium oscillatorium ἀποδεικνύουν τὴν μεγάλην ὑπόληψιν, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν ἀκόμη καὶ εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον. Ἀπέθανε τὴν 8ην Αὐγούστου 1694 εἰς Βρυξέλλας ἢ εἰς Λιέγην. Ἀλλὰ δὲν ἔσβησε μαζύ του ὁ θαυμασμὸς μὲ τὸν ὁποῖον περιεβάλλετο εἰς τὴν ζωήν, διότι τὸ 1778 ἐγένετο μία πλήρης ἔκδοσις τῶν ἔργων του, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ὁλόκληρον σειρὰν ἐκ 42 τοὐλάχιστον Τόμων.

Ἐὰν πίπτῃ εἰς ἡμᾶς ἡ ὑποχρέωσις νὰ κάμωμεν λόγον περὶ αὐτοῦ, τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἔργον του Νέα στοιχεῖα γεωμετρίας (Nouveaux élements de géométrie, 1667), τὸ ὁποῖον ἔτυχε τόσον εὐμενοῦς ὑποδοχῆς, ὥστε εἰς βραχύτατον χρονικὸν διάστημα ἐγνώρισε πολλὰς ἐκδόσεις. Εἰς τὴν συγγραφὴν αὐτοῦ ὡδηγήθη ἔπειτα ἀπὸ μίαν ἐπαφὴν ποὺ εἶχε μὲ τὸν Pascal, ὁ ὁποῖος τοῦ ἔδειξε μερικὰς σελίδας, ὄχι τόσον ἐπιτυχεῖς, τὰς ὁποίας εἶχε γράψει ὡς σχέδιον μιᾶς νέας διαρθρώσεως τῆς ὕλης τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας. Ὁ Arnauld ἐκαυχήθη ὅτι ἦτο εἰς θέσιν νὰ κάμῃ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν πολὺ καλύτερα, φαίνεται δὲ ὅτι ὁ Pascal, ὅταν ἐξήτασε τὸ ἔργον ποὺ ἔγραψεν ὁ Arnauld, δὲν ἐδίστασε ν' ἀναγνωρίσῃ ὅτι οὗτος εἶχεν ἐπιτύχει πράγματι τὸν σκοπόν του.

Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ πνέει ἡ ἀντι - ευκλείδειος αὔρα ποὺ ἦτο αἰσθητὴ εἰς τὴν Γαλλίαν ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ramus καὶ τῆς ὁποίας ἐπίκεντρον ἦτο ἡ Σχολὴ τοῦ Port - Royal. Εἰς τὴν σχολὴν αὐτὴν ἡ γεωμετρικὴ καθαρότης, ποὺ χαρακτηρίζει τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ὑπεχώρησεν ἔπειτα ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς θεωρίας, ποὺ ἀνεπτύχθησαν ἐν τῷ μεταξύ. Ἐξ ἄλλου εἰς τὴν θεωρίαν τῶν παραλλήλων πλησίον τοῦ «ἀρνητικοῦ» ὁρισμοῦ τῶν μὴ συναντωμένων εὐθειῶν προστίθεται ὁ «θετικὸς» ὁρισμὸς τῶν ἰσαπεχουσῶν εὐθειῶν. Ὡς τιμητικὸς τίτλος τοῦ Arnauld ἀναφέρεται ἡ ἀπόδειξις, τὴν ὁποίαν ἐφιλοτέχνησε διὰ τὸ θεώρημα περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἡ ὁποία εἶναι τόσον ἐξαίρετος, ὥστε ἐπανευρεθεῖσα μετὰ δύο αἰῶνας, ἐχρησίμευσεν εἰς ἕνα ἀντίπαλον τῆς μὴ εὐκλειδείου γεωμετρίας, ὡς ὅπλον ὑποστηρίξεως τῶν ἰδεῶν του (βλ. Comptes rendus, Τόμος XXXIII, 1871, σελ. 368). Μολονότι τὸ ἔργον τοῦ Arnauld περιλαμβάνει 15 βιβλία, δὲν περιέχει παρὰ μόνον τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ἐχρησίμευσε δὲ ὡς ὑπόδειγμα ἄλλων μεταγενεστέρων ἔργων τῆς αὐτῆς φύσεως (Malézieu, Varignon, Lomy κλπ.).

Ἐν παραρτήματι τὸ ἔργον περιλαμβάνει μίαν ἀρίστην ἐργασίαν ἀφιερωμένην εἰς τὰ μαγικο - μαγικὰ τετράγωνα, τουτέστιν εἰς ἐκεῖνα τὰ μαγικὰ τετράγωνα ποὺ παραμένουν τοιαῦτα, ἂν ἀποκοποῦν ἐξ αὐτῶν διάφοροι γωνίαι των. Ἀκόμη καὶ ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου εἶναι ὁρατὴ ἡ σκιὰ τοῦ Pascal, ὁ ὁποῖος εἰς ἕνα πρόγραμμα ἐργασίας ὑποβληθὲν ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων, καὶ ἀσφαλῶς περιελθὸν εἰς γνῶσιν τοῦ Arnauld, κάμνει νύξιν διὰ μίαν μέθοδόν του χρήσιμον εἰς

τὴν κατασκευὴν τῶν λεγομένων «μαγικο - μαγικῶν ἀριθμῶν»* Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ Arnauld εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔδωσε δείγματα ἀναφισβητήτων μαθηματικῶν χαρισμάτων, ἀναφέρομεν ἐδῶ (σελ. 350) τὰ μαγικο - μαγικὰ τετράγωνα, τὰ ἀποτελούμενα ἀπὸ 11^2 καὶ 12^2 ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα κατασκεύασε κατόπιν ἐφαρμογῆς γενικῆς θεωρίας :

415. Ἡ Ἰταλία, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν λατινικὴν ἀδελφήν της, παρέμεινε πάντοτε πιστὴ εἰς τὴν λατρείαν τοῦ Εὐκλείδου, καίτοι δὲν ἔπαυσε ν' ἀναγνωρίζῃ εἰς τὰ ἀρχαῖα Στοιχεῖα τὴν ὕπαρξιν ὡρισμένων ἐλλείψεων, τὰς ὁποίας μάλιστα ἐπεχείρησε νὰ καλύψῃ. Μεταξὺ τῶν πολλῶν ἀποπειρῶν ποὺ ἔγιναν πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν συναντῶμεν τὸ ἔργον τὸ τιτλοφορούμενον Euclide restituito overo gli antichi elementi geometrici restaurati e facilitati (Ὁ Εὐκλείδης ἀποκατεστημένος ἢ καλύτερα τὰ ἀρχαῖα γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἀποκατεστημένα καὶ ἁπλοποιημένα) (Ρώμη, 1680). Συγγραφεὺς αὐτοῦ εἶναι ὁ Vitale Giordano, γεννηθεὶς εἰς Bitonto (ἐπαρχία τοῦ Bari) τὴν 13ην Δεκεμβρίου 1633. Ἄνθρωπος βιαίου χαρακτῆρος, διῆγε βίον ἔκλυτον καὶ γενόμενος φονεὺς τοῦ γυναικαδέλφου του, κατέφυγεν εἰς Βενετίαν. Ἐκεῖ ἐπεβιβάσθη εἰς πλοῖον τῆς ἐκστρατευτικῆς ἀποστολῆς ἐναντίον τῶν Τούρκων, ὑπηρετήσας ὡς γραμματεὺς τοῦ βενετοῦ ναυάρχου.

Ὅταν ἐπέστρεψεν, ἐπεδόθη μετὰ ζήλου εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ ἐγκατέστησε τὴν ἕδραν του εἰς τὴν Ρώμην, ὅπου ἐχρημάτισε διαδοχικῶς μαθηματικὸς τῆς Βασιλίσσης Μαρίας Χριστίνας τῆς Σουηδίας, καθηγητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Καλῶν Τεχνῶν, ποὺ ἵδρυσεν ὁ Λουδοβῖκος XIV, καὶ τέλος καθηγητὴς εἰς τὴν Sapienza. Ἀπέθανε τὴν 3ην Νοεμβρίου 1711.

Τὸ πρωτοτυπότερον καὶ σημαντικώτερον μέρος τοῦ προαναφερθέντος ἔργου του εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἀφορᾷ τὰς παραλλήλους. Ὁ συγγραφεὺς παρατηρεῖ, ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς μὴ συναντήσεως δύο γραμμῶν παραλλήλων, ἐπ' ἄπειρον προεκτεινομένων, δὲν χαρακτηρίζει ἐπαρκῶς τὴν παραλληλίαν, ἀφοῦ ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ζεύγη γραμμῶν, μὴ εὐθειῶν, ἔχοντα ἐπίσης τὴν αὐτὴν ἰδιότητα (π.χ. δύο παραβολαὶ προκύπτουσαι ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διὰ μεταφορᾶς παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ἢ μία κογχοειδὴς τοῦ Νικομήδους καὶ ἡ ἀσύμπτωτός της). Παρατηρεῖ ἐπίσης, ὅτι τὸ εὐκλείδειον αἴτημα δὲν εἶναι πράγματι προφανές, διὸ προστρέχει καὶ αὐτός, ὅπως ἔκαμε καὶ ὁ Clavio, εἰς ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων ὡς εὐθειῶν ἰσαπεχουσῶν. Διὰ ν' ἀποφύγῃ ὅμως τὰ ἄτοπα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδει λαβὴν ὁ ὁρισμὸς αὐτός, ἀποκαθιστᾷ μίαν σειρὰν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐξασφαλίζουν διακεκριμένην θέσιν μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκ τοῦ μακρόθεν προητοίμασαν τὴν ἐμφάνισιν

---

* Βλ. ἐπίσης μίαν ἐργασίαν τοῦ Fermat, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν εἰς § 359.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	89	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	97	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	36	50	40	23	34	85	106
94	96	92	27	28	25	75	80	26	53	64

118	26	116	39	94	30	31	90	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	28
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	28	71	123	62	145	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	151	80	25	82
73	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	700
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	149	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	41	46	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

Μαγικο - μαγικὰ τετράγωνα τοῦ Arnauld

τῆς μὴ εὐκλειδείου γεωμετρίας *, μολονότι δι' αὐτῶν δὲν κατορθώνει νὰ ἐμφυτεύσῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν περὶ ἑαυτοῦ γνώμην, ὅτι δηλαδὴ κατέστησε τελειότερον τὸν ἀρχαῖον Πανδέκτην τῆς γεωμετρίας.

416. Ἄλλαι προσπάθειαι πρὸς βελτίωσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἀπαντῶνται εἰς τὰ Ἔργα τοῦ Wallis. Μερικαὶ σελίδες ἀφοροῦν ἕνα ζήτημα, χαρακτηριζόμενον συνήθως μὲ τὸ ὄνομα «γωνία συνεπαφῆς»[4], καὶ τὸ ὁποῖον ἕλκει τὴν καταγωγήν του ἀπὸ τὴν Πρότασιν 16 τοῦ Βιβλίου III τῶν Στοιχείων, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν μεταξὺ μιᾶς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ποὺ ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τυχὸν σημεῖον δὲν δύναται ν' ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα εἰς τρόπον, ὥστε ἡ (μικτόγραμμος) γωνία περιφερείας καὶ ἐφαπτομένης εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐξ εὐθειῶν ἀποτελουμένης. Ἐντεῦθεν τὸ ἐρώτημα· δυνάμεθα μετ' αὐστηρότητος ν' ἀποφανθῶμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ γωνία εἶναι μηδενική;

Ἡ ἀρχαιοτέρα μνεία τοῦ ζητήματος τούτου ἐσημειώθη εἰς τὸ ἔργον De triangulis τοῦ Giordano Nemorario (Τόμος I, § 170). Κατόπιν ἠσχολήθησαν μὲ αὐτὸ ἄλλοι μαθηματικοὶ τοῦ Μεσαίωνος, γνωστοί μας, ὅπως εἶναι ὁ Giovanni Campano, ὁ Ἀλβέρτος τῆς Σαξωνίας, ὁ Nicolò Cusano καὶ ὁ G. Cardano.

Ἕνας ἐκδότης τοῦ Εὐκλείδου, ὁ de Foix Candalla (1502 - 1594), παρετήρησε μὲ ὀξυδέρκειαν, ὅτι ἡ γωνία συνεπαφῆς εἶναι ὀντότης νέου εἴδους, μὴ δυναμένη νὰ συγκριθῇ πρὸς τὰς εὐθυγράμμους γωνίας. Ὀλίγον ἔπειτα ὁ Pélétier (τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη ὡς ἀλγεβριστήν, § 243) εἰς ἕνα σχόλιόν του εἰς τὰ Στοιχεῖα, ὑπεστήριξεν ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ διατηρήσωμεν τὴν ἰσχὺν τῆς Προτάσεως 1 τοῦ X Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, ἡ γωνία συνεπαφῆς πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς οὖσα αὐστηρῶς μηδενική.

Ἡ ἀνωτέρω γνώμη κατεπολεμήθη ἀπὸ τὸν Clavio, ὁ ὁποῖος διετύπωσε τὴν ἄποψιν ὅτι, ἐὰν ὁ Εὐκλείδης ἐθεώρει ὡς μηδενικὴν τὴν γωνίαν συνεπαφῆς, δὲν θὰ εὑρίσκετο εἰς τὴν ἀνάγκην ν' ἀποδείξῃ ὅτι εἶναι μικροτέρα οἱασδήποτε ἄλλης εὐθυγράμμου. Κατ' αὐτὸν ἡ γωνία συνεπαφῆς ὑφίσταται, εἶναι μία ἀληθὴς ποσότης, ἂν μή τι ἄλλο διότι δὲν εἶναι ὅλαι αἱ γωνίαι συνεπαφῆς μεταξύ των ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν μέγεθος ἰδιότυπον, sui generis, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ἐφαρμογὴν ἡ προαναφερθεῖσα Πρότασις 1 τοῦ Βιβλίου X τῶν Στοιχείων.

Ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ οἱ μαθηματικοὶ ἐχωρίσθησαν εἰς δύο παρατάξεις, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ μὲν ἀπεδέχθησαν τὰς ἀπόψεις τοῦ Pélétier, οἱ

---

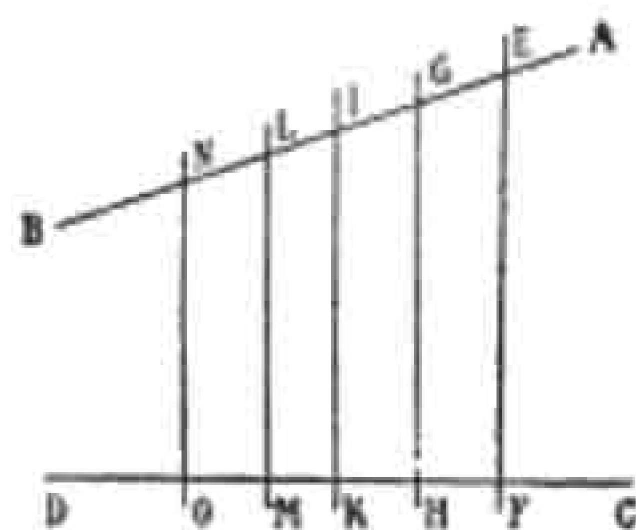
* Σημειοῦμεν ὅτι πρὸ τοῦ Saccheri ὁ Giordano, πράγματι, παρετήρησεν ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ τετράπλευρον ἰσοσκελὲς διορθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι νὰ εἶναι ὀρθαί, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ διὰ πᾶν ἄλλο ἀνάλογον σχῆμα.

ἄλλοι τὴν γνώμην τοῦ Clavio. Ἐκεῖνος ὅμως ὁ ὁποῖος ἐχειρίσθη τὸ ζήτημα μὲ μεγαλυτέραν εὐρύτητα ὑπῆρξεν ὁ Wallis, ὁ ὁποῖος ἀφιέρωσεν εἰς αὐτὸ δύο κείμενα. Τὸ ἕνα ἔχει χαρακτῆρα θεωρητικὸν καὶ καταλήγει εἰς ὑποστήριξιν τῆς ἰδέας, ὅτι αἱ εὐθύγραμμοι καὶ καμπυλόγραμμοι γωνίαι πρέπει νὰ θεωροῦνται τῆς αὐτῆς φύσεως. Τὸ ἄλλο ἔχει πολεμικὸν χαρακτῆρα καὶ ἀποβλέπει εἰς ὑπεράσπισιν τῶν ἰδεῶν του. Ἀλλὰ μὲ αὐτὰ δὲν ἔκλεισεν ἡ συζήτησις. Ἡ φιλονικία ἐπεξετάθη μεταξὺ φιλοσόφων καὶ μαθηματικῶν μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἐδόθησαν σαφεῖς ὁρισμοὶ καὶ ἐμπεδώθησαν διαυγεῖς ἰδέαι ἐπὶ τῶν ἀπειροστῶν διαφόρων τάξεων.

Εἰς ἄλλο του ἔργον ὁ Wallis ἀπέβλεψεν εἰς δύο διακεκριμένους σκοπούς. Ὁ ἕνας εἶναι ἡ ἐκκαθάρισις τῆς ἐννοίας τοῦ «συνθέτου λόγου», περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Βιβλίου VI τῶν Στοιχείων· διότι ὁ ἐν λόγῳ ὁρισμὸς εἶναι τόσον ἀτελής, ὥστε οἱ διασημότεροι σύγχρονοι ἐκδόται τοῦ Εὐκλείδου θεωροῦν τοῦτον ὡς μεταγενεστέραν παρεμβολήν[32]. Ὁ ἄλλος εἶναι ἡ ἐπιθυμία τοῦ συγγραφέως νὰ ἐπιφέρῃ κάποιαν συμβολὴν πρὸς τελειοποίησιν τῆς ἀρχαίας θεωρίας τῶν παραλλήλων. Ὡς πρὸς τὸ τελευταῖον τοῦτο ζήτημα, ὁ διαπρεπὴς ἄγγλος γεωμέτρης ἐπρότεινε τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ σκοτεινοῦ εὐκλειδείου αἰτήματος μὲ τὸ ἀκόλουθον, τὸ ὁποῖον ἔκρινεν, ὄχι ἀδίκως, ὅτι ἠδύνατο νὰ γίνῃ δεκτὸν ἀπὸ ὅλους : Κάθε ἐπίπεδον σχῆμα ἔχει πάντοτε ἕνα ὅμοιον κατὰ τὴν μορφὴν ἀλλὰ διάφορον κατὰ μέγεθος.

417. Ὡς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν παραλλήλων, ὁ Wallis ἔχει ἐπίσης τὴν τιμὴν ὅτι κατέστησε γνωστὴν εἰς τοὺς Εὐρωπαίους μίαν ἀπόδειξιν τοῦ περιφήμου εὐκλειδείου αἰτήματος, ὀφειλομένην εἰς τὸν ἄραβα μαθηματικὸν Nassir ed Din (Τόμος I, § 152). Ἡ ἐν λόγῳ ἀπόδειξις στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀκολούθων λημμάτων :

I. Δοθεισῶν (σχ. 30) εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο εὐθειῶν AB, CD συναντωμένων ὑπὸ οἱωνδήποτε εὐθειῶν EF, GH, IK, LM, NO καθέτων ἐπὶ τὴν CD καὶ τοιούτων ὥστε αἱ γωνίαι ποὺ σχηματίζουν μὲ τὴν AB νὰ εἶναι ὅλαι ὀξεῖαι πρὸς τὸ B καὶ ἀμβλεῖαι πρὸς τὸ A, αἱ δύο εὐθεῖαι ἀπομακρύνονται πρὸς τὸ μέρος AC καὶ πλησιάζουν πρὸς τὸ μέρος BD.



Σχ. 30

II. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι AC καὶ BD εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν AB, θὰ εἶναι ὀρθαὶ αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν μὲ τὴν συνδέουσαν τὰ ἄκρα των.

III. Εἰς πᾶν εὐθύγραμμον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται

πρὸς δύο ὀρθάς, (ὁ συγγραφεὺς τὸ ἀποδεικνύει διαδοχικῶς διὰ τρίγωνα ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια). Ἐντεῦθεν ἀπορρέει ἡ ἐν λόγῳ πρότασις.

Προτοῦ ἀφήσωμεν τὸν Wallis ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ γεωμέτρου, ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὀφείλεται εἰς αὐτὸν ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἡ πρώτη μελέτη μιᾶς νέας ἐπιφανείας, τῆς «κωνο - σφηνοειδοῦς», ὅπως τὴν ἀπεκάλει. Πρόκειται περὶ τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τῆς ἀποτελουμένης ἀπὸ τὰς ἀπείρους εὐθείας, αἱ ὁποῖαι παράλληλοι πρὸς ἕνα ἐπίπεδον συναντοῦν εὐθεῖαν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ περιφέρειαν κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπίσης ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τοιουτοτρόπως ἐνεκαινίασε τὴν μελέτην τῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι, ὅπως οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι, ἀναλύονται εἰς ἄπειρον πλῆθος εὐθειῶν.

Mydorge καὶ Schwenter εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς κατασκευαστικῆς γεωμετρίας

418. Αἱ θεωρητικοῦ χαρακτῆρος μελέται, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, δὲν ἀπεμπόλησαν τὸ κατασκευαστικὸν μέρος τῆς γεωμετρίας. Εἴδομεν ἤδη πῶς εἰς μίαν τοιαύτην διακλάδωσιν τῆς ἐπιστήμης τοῦ διαστήματος ἀνταποκρίνονται μερικὰ ζητήματα ἐξ ἐκείνων ποὺ ἀντήλλαξαν μεταξύ των κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιφήμου ἔριδος οἱ L. Ferrari καὶ N. Tartaglia. Τὸν ἑπόμενον αἰῶνα ζητήματα τοιαύτης φύσεως δὲν ἐγκατελείφθησαν ἐντελῶς. Τοῦτο ἀποδεικνύεται προπάντων ἀπὸ μίαν συλλογὴν ἐκ χιλίων καὶ πλέον προβλημάτων τοῦ μαθηματικοῦ C. Mydorge (§ 342) καὶ ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ ἕνα τόμον διασκεδαστικῶν μαθηματικῶν ὀφειλόμενον εἰς τὸν Daniel Schwenter (γενν. εἰς Νυρεμβέργην τὴν 31ην Ἰανουαρίου 1585, ἀποθ. τὴν 19ην Ἰανουαρίου 1636 εἰς Altdorf, εἰς τὸ πανεπιστήμιον τοῦ ὁποίου ἐδίδασκε μαθηματικὰ) καὶ δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του.

Μεταξὺ τῶν προβλημάτων ποὺ λύονται εἰς τὴν συλλογὴν αὐτὴν ἀπαντᾶται τὸ ἀκόλουθον: «Νὰ γραφῇ μὲ διαβήτην ἀνοίγματος r περιφέρεια δεδομένου κέντρου C καὶ ἀκτῖνος $a < r$». Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν του ὁ Schwenter, δίδων δεῖγμα ζηλευτῆς πρωτοτυπίας, ἐγκαταλείπει τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ πρόκειται νὰ γραφῇ ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ θεωρεῖ τὴν εἰς C κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον O, τοιοῦτον ὥστε $CO = \sqrt{r^2 - a^2}$. Φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα r, θὰ τμήσῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ τὴν ζητουμένην περιφέρειαν.

«Euclides Danicus» τοῦ G. Mohr

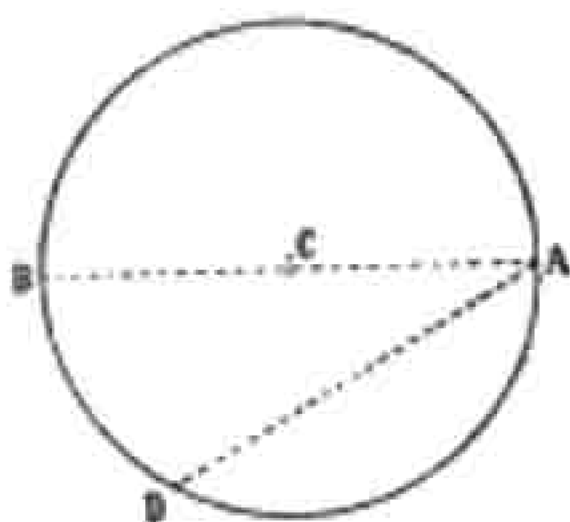
419. Χαρακτῆρα ἀνάλογον πρὸς τὰ ἔργα ποὺ ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω ἔχει ἕνα ἄλλο ἔργον, τοῦ ὁποίου ὁ συγγραφεὺς ἔθεσεν ὡς σκοπὸν ν' ἀγνοήσῃ τὸν κανόνα καὶ νὰ λύσῃ ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ Εὐκλείδου μὲ τὴν χρῆσιν μόνον τοῦ διαβήτου. Ὁ τίτλος Euclides Danicus, (Δανὸς Εὐκλείδης) τὸν ὁποῖον φέρει τὸ ἔργον, εἶναι προφανῶς ἀπομίμησις τῶν ἀναλόγων Apollonius Gallus (τοῦ Viète) καὶ Eratosthenes Batavus (τοῦ Snelius). Συγγραφεὺς εἶναι ὁ Georg Mohr. Γεννηθεὶς εἰς Κοπεγχάγην τὴν 1ην Ἀπριλίου 1640, ἐσπούδασεν εἰς τὰ διάσημα ὀλλανδικὰ πανεπιστήμια, βραδύτερον μετέβη εἰς Λονδῖνον διὰ λόγους σπουδῶν καὶ κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν μετέβη εἰς Παρισίους ὅπου συνδιελέχθη μὲ τὸν Leibniz, εἰς τὸν ὁποῖον ἄφησε τόσον καλὴν ἐντύπωσιν, ὥστε ὁ τελευταῖος εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Oldenburg (12 Μαΐου 1676) δὲν ἐδίστασε νὰ τὸν χαρακτηρίσῃ ὡς ἰδιοφυΐαν εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν ἀνάλυσιν (in geometria et analysi versatissimus). Τίποτε ἄλλο δὲν γνωρίζομεν γύρω ἀπὸ τυχὸν περαιτέρω συγγραφικήν του δραστηριότητα, οὔτε περὶ τοῦ τέλους τῆς ζωῆς του *.

Τὸ μικρὸν ἔργον, περὶ οὗ ὁ λόγος, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὸ Ιον ἐκ τῶν ὁποίων περιέχει τὰ θεωρητικὰ θεμέλια τῆς χρησιμοποιουμένης μεθόδου, ἐνῷ τὸ IIον ἀφιεροῦται εἰς ποικιλίαν ἐφαρμογῶν. Ἀπὸ τὰ ἀκολουθοῦντα παραδείγματα δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ λάβῃ ἰδέαν τοῦ περιεχομένου :

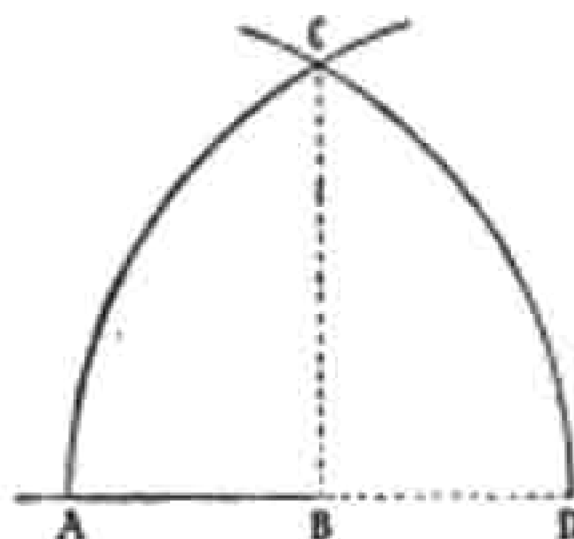
---

* α) N. Nielsen: Matematik in Danmark 1528 - 1800 (Kobenhavu, 1912) σ. 149. β) Ἕνα πρόσφατον δημοσίευμα (J. Hjelmslev: Beitraege zur Lebensbenschreibung von Georg Mohr (1640, - 1697), Χρονικὰ τῆς Δανικῆς Ἀκαδημίας Ἐπιστημῶν, 1931 ἐπιτρέπει τὴν συναγωγὴν περισσοτέρων βιογραφικῶν δεδομένων διὰ τὸν ἀρχαῖον πρόδρομον τοῦ Mascheroni. Πληροφορούμεθα ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ ἐπίθετόν του ἦτο Mohrendal καὶ ὄχι Mohr. Ἡ δίψα τῆς γνώσεως τὸν ὤθησεν εἰς ἡλικίαν 22 ἐτῶν νὰ ἐπιχειρήσῃ μακρὰ ταξείδια ἐπὶ 11 καὶ πλέον ἔτη εἰς Ἀγγλίαν, Γαλλίαν καὶ Ὀλλανδίαν, διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του. Ἰδιαιτέρως μακρὰ ὑπῆρξεν ἡ παραμονή του εἰς τὰς Κάτω Χώρας, ὅπου συνῆψε φιλίαν μὲ τὸν Tschirnhausen, καθ' ὅσον παρέμεινεν ἐκεῖ ἀπὸ τοῦ 1668 μέχρι τοῦ 1675. Φοβούμενος ὅτι θὰ ἦτο ἀφηρημένος ἐκ τῆς ἀπορροφήσεώς του εἰς ἐπιστημονικὰς μελέτας, ἠρνεῖτο πᾶσαν ἐπίσημον ἀπασχόλησιν. Μόνον εἰς ὥριμον ἡλικίαν ἐδέχθη πρόσκλησιν τοῦ φίλου του Tschirnhausen νὰ μεταβῇ εἰς Δρέσδην, ὡς φιλοξενούμενος βοηθός του, ὅπερ ἐγένετο κατὰ τὸ θέρος τοῦ 1695. Τῆς νέας του ὅμως καταστάσεως ὁ Mohrendal δὲν ἔλαβε τὸν καιρὸν νὰ ἐπωφεληθῇ καθ' ὅσον ἀπέθανε τὴν 26ην Ἰανουαρίου 1697. Διετήρει ἐπιστημονικὴν ἀλληλογραφίαν τόσον μὲ τὸν Tschirnhausen ὅσον καὶ μὲ τὸν Leibniz. Ἐλάχιστα ὅμως ἴχνη τῆς ἀλληλογραφίας αὐτῆς εὑρέθησαν μέχρι τοῦδε.

Δοθέντων δύο σημείων A, C νὰ γραφῇ (σχ. 31, ὅπου, ὡς καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα, προσετέθησαν χάριν σαφηνείας μερικαὶ εὐθεῖαι εἰκονιζόμεναι μὲ ἐστιγμένην γραμμὴν) περιφέρεια μὲ κέντρον C διερχομένη διὰ τοῦ A. Φέροντες τὴν ρηθεῖσαν ἀκτῖνα ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου περιφερείας, μετὰ 6 βήματα ἐπανερχόμεθα εἰς A, ἐνῷ μετὰ 3 φθάνομεν εἰς τὸ σημεῖον B, διαμετρικῶς ἀντικείμενον τοῦ A καὶ μετὰ 2 λαμβάνομεν τὴν χορδὴν τῶν 120°. Ἐντεῦθεν αἱ μέθοδοι προσδιορισμοῦ, μὲ τὴν χρῆσιν μόνον τοῦ διαβήτου, τοῦ σημείου B τοιούτου ὥστε νὰ εἶναι BC = AC καί, δοθέντος τοῦ τμήματος a = AC, τὰ τμήματα 2a καὶ $a\sqrt{3}$.



Σχ. 31



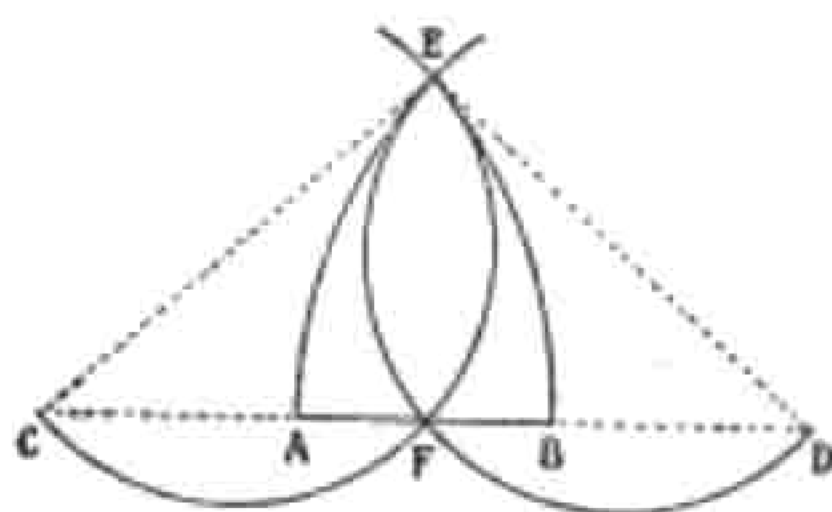
Σχ. 32

Ἕνα ἄλλο πρόβλημα, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λυθῇ κατὰ τρόπον ἀνάλογον, συνίσταται εἰς τὸ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ ἄκρον B δοθείσης εὐθείας AB (σχ. 32) τὴν κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἂς προεκταθῇ πράγματι (ὡς ἀνωτέρω) ἡ AB οὕτως ὥστε νὰ εἶναι AD = 2AB καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς AD τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ACD. Τὰ σημεῖα B καὶ C προσδιορίζουν προφανῶς τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν.

Τοῦ προβλήματος τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μέσου δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος, ὁ συγγραφεύς μας ἐκθέτει διαφόρους λύσεις: ἀναφέρομεν ἐκείνην ἡ ὁποία μᾶς φαίνεται περισσότερον ἀξιόλογος. Ἂς προεκταθῇ (ὡς ἀνωτέρω) τὸ τμῆμα AB (σχ. 33) ἑκατέρωθεν μέχρι τῶν σημείων C καὶ D τοιούτων, ὥστε νὰ προκύπτῃ CA = AB = BD, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς CD τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον τὰς πλευρὰς CE καὶ DE ἴσας πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς AB. Ἐπειδὴ ὁ συγγραφεὺς ἔχει διδάξει προηγουμένως τὴν κατασκευὴν τῶν μέσων τῶν τμημάτων CE, DE, δύνανται νὰ γραφοῦν αἱ περιφέρειαι ἐπὶ τούτων ὡς διαμέτρων, ὅτε αἱ περιφέρειαι θὰ τμηθοῦν ἐπὶ τοῦ ζητουμένου σημείου.

Ἐνῷ τὸ Μέρος I τοῦ ἔργου τοῦ Mohr περιστρέφεται περὶ τὴν ὕλην τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὸ Μέρος II ἐξετάζονται προβλήματα πολυπλοκώτερα, ὅπως εἶναι τὰ ζητήματα τῆς παρεμβολῆς, τὸ οὕτω καλούμενον θεώρημα τοῦ Pothénot (λυθὲν ἀριθμητικῶς τὸ 1617 ὑπὸ τοῦ

Stévin) καὶ μερικὰ ζητήματα γνωμονικῆς. Εἰς τὸ Μέρος αὐτὸ τοῦ ἔργου του, ἠσθάνθη τὴν ἀνάγκην ὁ Mohr νὰ προσδιορίσῃ μὲ τὴν μέθοδόν του τὸ κοινὸν σημεῖον δύο εὐθειῶν AB, CD (σχ. 34). Πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ σκο-



Σχ. 33



Σχ. 34

ποῦ του, κατέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα: Ἀγομένων πράγματι ἐκ τῶν A καὶ B τῶν καθέτων AE καὶ BF ἐπὶ τὴν CD, ἡ ἀπόστασις AX τοῦ ζητουμένου σημείου A δύναται νὰ προσδιορισθῇ μέσῳ τῆς ἀκολούθου ἀναλογίας:

$$\frac{AB}{AE-BF}=\frac{AX}{AE}.$$

Προλαμβάνων ἀπορίαν τοῦ ἀναγνώστου, ὁ Mohr ἀναγνωρίζει ὅτι μερικαὶ ἀπὸ τὰς ἰδικάς του κατασκευὰς εἶναι πολυπλοκώτεραι τῶν ἀντιστοίχων τοῦ Εὐκλείδου, παρατηρεῖ ὅμως ὅτι σκοπός του ἦτο νὰ δείξῃ, ὅτι ἡ χρῆσις τοῦ κανόνος δὲν εἶναι ἀπαραίτητος καὶ ὅτι ἀρκεῖ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ὁ διαβήτης. Ὀφείλομεν νὰ ὁμολογήσωμεν, ὅτι ἐπέτυχε πλήρως τὸν σκοπόν του.

Ἂν αἱ κατασκευαὶ μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἢ μὲ ἀποκλειστικὴν χρῆσιν τοῦ ὀργάνου τούτου τοποθετοῦνται, ἀπὸ καθαρᾶς μαθηματικῆς ἀπόψεως, εἰς τὴν στάθμην ἁπλῶν ἀθλητικῶν γυμνασμάτων, ἔτι αὐστηρότερος χαρακτηρισμὸς πρέπει νὰ δοθῇ εἰς κατασκευὰς πραγματοποιουμένας δι' ἀναδιπλώσεως τοῦ χάρτου. Παρὰ ταῦτα ὁ ἀμερόληπτος ἱστορικὸς ὀφείλει νὰ σημειώσῃ, ὅτι ἡ δι' ἀναδιπλώσεως τοῦ χάρτου κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου (λαιμοδέτης, noeud de cravate), ἐνῷ ἀποδίδεται συνήθως εἰς ἕνα γάλλον γεωμέτρην τοῦ XIX αἰῶνος (Eduard Lucas), ἀνεκαλύφθη διὰ πρώτην φορὰν ἀπὸ ἕνα μαθητὴν τοῦ B. Cavalieri, ὀνομαζόμενον Urbano d'Aviso (γενν. εἰς Ρώμην περὶ τὸ 1618). Ὁ τελευταῖος περιέγραψε τὴν ἐν λόγῳ κατασκευήν, δημοσιεύων ἕνα ἔργον Trattato sulla sfera (Ρώμη, 1656), ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἀποδιδόμενον, ὄχι ὡς φαίνεται ὀρθῶς, εἰς τὸν Γαλιλαῖον.

Giovanni καὶ Tommaso Ceva

420. Κατὰ πολὺ σημαντικωτέρα τοῦ ἔργου τοῦ Mohr εἶναι, ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως, ἡ γεωμετρικὴ παραγωγὴ τοῦ Giovanni Ceva. Ὁ διακεκρι-

μένος αὐτὸς μαθηματικὸς ἐγεννήθη εἰς Μιλᾶνον τὸ 1648. Τὸ καλύτερον μέρος τῆς ζωῆς του ἐπέρασεν εἰς τὴν Mantova ὑπὸ τὴν ἰδιότητα μαθηματικοῦ τῆς Αὐλῆς καὶ γενικοῦ ἐπιτρόπου τοῦ δουκάτου τῶν Gonzaga. Ἐκεῖ ἀπέθανε τὴν 13ην Δεκεμβρίου 1734 «ἐτῶν 86 καὶ μηνῶν 6, κατ' ἀπόφασιν τῶν ζωτικῶν πνευμάτων» (ὅπως ἐκφράζεται χρονογράφος τῆς ἐποχῆς).

Διάφορα δημοσιεύματά του ἀποδεικνύουν ἄνθρωπον μὲ ἀξιόλογον δύναμιν καὶ πρωτοτυπίαν σκέψεως. Ἀλλὰ ἡ περιφημοτέρα πράγματι ἐργασία του εἶναι ἡ ἀφιερωμένη εἰς τὸν Δοῦκα τῆς Μαντούης Ferdinando Carlo καὶ τιτλοφορουμένη De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio. Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ δεικνύεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν περὶ κέντρου βάρους θεωριῶν εἰς τὴν ἔρευναν καὶ τὴν ἀπόδειξιν γεωμετρικῶν θεωρημάτων. Μεταξὺ τούτων προέχει τὸ θεώρημα, ποὺ φέρει τὸ ὄνομα τοῦ Ceva καὶ τὸ ὁποῖον διδάσκει τὴν σχέσιν ποὺ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἓξ τμημάτων τῶν καθοριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν, ἐκπορευομένων ἀνὰ μιᾶς ἐξ ἑκάστης κορυφῆς καὶ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου. Ἀπὸ τὸ θεώρημα αὐτὸ ἐξάγει ἀμέσως ὁ Ceva τὴν ἀλήθειαν, ὅτι αἱ διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἐπὶ τὰ ἀντικείμενα σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι συντρέχουν εἰς ἕνα σημεῖον (εἶναι ἄδικος ἑπομένως ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτοῦ ὡς «σημείου τοῦ Nagel»). Ἡ δύναμις τῆς μεθόδου, διὰ τὴν ἔρευναν καὶ τὴν ἀπόδειξιν, ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὴν ἀνακάλυψιν προτάσεως ἀναφερομένης εἰς τὸν χῶρον καὶ ἀναλόγου πρὸς τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ Μενελάου διὰ τὸ ἐπίπεδον, ἀφορώσης δηλαδὴ τὰ ὀκτὼ τμήματα ποὺ προσδιορίζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου ὑπὸ διατέμνοντος ἐπιπέδου. Ἄλλα ἐντυπωσιακὰ ἀποτελέσματα διαφόρου φύσεως ἐκτίθενται ὑπὸ τοῦ Ceva* εἰς ἕνα Παράρτημα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου λυπούμεθα μὴ δυνάμενοι νὰ ἐνδιατρίψωμεν, ἰδιαιτέρως μάλιστα διότι ὁ G. Ceva ἀναμένει ἀκόμη μίαν πλήρη ἔρευναν τῆς ζωῆς καὶ τοῦ ἔργου του, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ἀδιαφιλονίκητα δικαιώματα. Εἰς ἕνα χωρίον τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου ἀναφέρεται κάποιος διδάσκαλος τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ἐκ Μιλάνου, ὁ ὁποῖος, ὡς φαίνεται, ὑπῆρξε καλὸς μαθηματικὸς καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα εἶναι Pietro Paolo Caravaggio ὁ νεώτερος (1659 - 1723)**. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται μία καθαρῶς γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva. Εἶναι τόσον ἁπλῆ, ὥστε ἀξίζει νὰ τὴν ἀναφέρωμεν ἐδῶ καὶ τόσον ἀνάγλυφος ὥστε δύναται νὰ γίνῃ κατανοητὴ ἀκόμη καὶ χωρὶς τὴν βοήθειαν σχήματος : Εἰς τὸ τρίγωνον ABC αἱ διὰ τῶν

* Τοιουτοτρόπως, ἐνῷ ὁ Clavio περιωρίζετο εἰς τὸ νὰ ἐξετάζῃ τὰς ἐξωτερικὰς κοινὰς ἐφαπτομένας δύο περιφερειῶν, ὁ Ceva ἐξήτασεν ἀκόμη καὶ τὰς ἐσωτερικάς, ἐφ' ὅσον ὑφίστανται.

** Ἦτο υἱὸς ἄλλου ἐπιστήμονος τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος (ζήσαντος 1617 - 1688), τὸν ὁποῖον καὶ διεδέχθη εἰς τὰς ἀνακτορικὰς Σχολὰς τοῦ Μιλάνου.

κορυφῶν τέμνουσαι AA_1, BB_1, CC_1, συντρέχουν εἰς O. Προφανῶς εἶναι τότε αἱ σχέσεις:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BAA_1\,^*}{CAA_1} = \frac{BOA_1}{COA_1},$$

αἱ ὁποῖαι δίδουν, κατόπιν ἀφαιρέσεως:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AOB}{COA}.$$

Ὁμοίως:

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BOC}{AOB}, \qquad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{COA}{BOC},$$

Πολλαπλασιάζοντες τώρα κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 = CA_1 \cdot AB_1 \cdot BC_1 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ὁ Giovanni Ceva εἶχεν ἀδελφὸν ἕνα ἄλλον μαθηματικόν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄξιος τοὐλάχιστον κάποιας μνείας ἐκ μέρους μας. Εἶναι ὁ Tommaso (γεννηθεὶς εἰς Μιλᾶνον τὴν 20ὴν Δεκεμβρίου 1648 καὶ ἀποθ. ἐκεῖ τὴν 3ην Φεβρουαρίου 1736 ἢ 37), ἰησουΐτης διδάξας εἰς τὸ Κολλέγιον τοῦ τάγματός του, ποὺ εὑρίσκετο τότε εἰς τὴν μεγάλην μητρόπολιν τῆς Λομβαρδίας καὶ ὁ ὁποῖος ἀπέκτησε μεγάλην φήμην χάρις εἰς τὰ λατινικά του ποιήματα. Αἱ A.E. τοῦ Ἰουνίου 1695 περιέχουν ἄρθρον του, εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφεται ὄργανον, κατάλληλον πρὸς διαίρεσιν μιᾶς γωνίας εἰς οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Περιγράφεται ἐπίσης καὶ ἐφαρμόζεται τὸ ὄργανον αὐτὸ ὑπὸ τοῦ de l' Hôpital (Sections Coniques, Βιβλ. X, Προβλ. VI), χωρὶς νὰ γίνεται μνεία τοῦ Ceva. Πρόκειται περὶ ἑνὸς προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται ἀκόμη μερικαὶ σελίδες τοῦ μικροῦ τόμου τοῦ ἔχοντος τίτλον Opuscola mathematica (Μιλᾶνον, 1699), εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει ν' ἀνατρέξη ὁ ἀναγνώστης ὁ ἐπιθυμῶν νὰ γνωρίση εἰς τὴν ἀρχικήν του μορφὴν τὸν ὁρισμὸν τῶν καμπύλων, εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἴδιος ἔδωσε τὸ ὄνομα «ἀνώμαλοι κυκλοειδεῖς» (cycloides anomalae). Ἡ μακρὰ ὁδός, τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀκόμη νὰ διατρέξωμεν, δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατρίψωμεν περισσότερον ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἄλλων μικροτέρων ἐργασιῶν τοῦ ἰδίου συγγραφέως.

Τὰ ἀλγεβρικὰ ἔργα τοῦ J. Wallis

421. Ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ ὁ J. Wallis ἔκαμε δύο συστηματικὰς ἐργασίας: ἡ μία ἀνάγεται εἰς τὰ πρῶτα ἔτη τῆς διδακτικῆς του στα-

* Παριστῶμεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου BAA_1.

διοδρομίας (1657), ἡ ἄλλη (πολὺ εὐρυτέρα καὶ ὑψηλοτέρα) χρονολογεῖται ἀπὸ τῆς ὡρίμου περιόδου τῆς μακρᾶς του ζωῆς.

Ἡ πρώτη φέρει τὸν τίτλον Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum καὶ φαίνεται ὅτι κυρία ἰδέα τοῦ συγγραφέως εἶναι νὰ δείξῃ, ὅτι ἐκεῖνος ποὺ ἐργάζεται μὲ ἀριθμοὺς πρέπει ν' ἀκολουθῇ τοὺς αὐτοὺς λογιστικοὺς κανόνας μ' ἐκείνους ποὺ ἀκολουθεῖ ὁ ἐργαζόμενος μὲ γράμματα. Ἐκ τῆς ἐργασίας αὐτῆς προδίδεται ἡ μεγάλη οἰκειότης τοῦ συγγραφέως ὄχι μόνον μὲ τὰς κλασσικὰς γλώσσας, ἀλλ' ἀκόμη καὶ μὲ τὴν ἀραβικὴν καὶ ἑβραϊκήν. Ὁμιλεῖ εἰς τὴν ἀρχὴν μὲ γενικότητας γύρω ἀπὸ τὴν φύσιν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν μαθηματικῶν, κατόπιν δὲ εἰσάγει τὴν μονάδα καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐξαίρων τὸν ρόλον τοῦ ἀριθμοῦ 10 εἰς τὸ ἐν χρήσει ἀριθμητικὸν σύστημα. Ἀναφερόμενος περαιτέρω εἰς τὴν προφορικὴν καὶ γραπτὴν ἀρίθμησιν, ἐκθέτει τὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ Λατῖνοι, οἱ Ἕλληνες καὶ οἱ Ἄραβες, χωρὶς νὰ παραλείψῃ νὰ κάμῃ μνείαν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

Μεταβαίνων κατόπιν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ἀλγέβρας, ἐκθέτει τὰ διάφορα ἐν χρήσει συστήματα πρὸς παράστασιν τοῦ ἀγνώστου καὶ τῶν διαδοχικῶν του δυνάμεων. Ἀκολουθοῦν λεπτομερεῖς ἀναπτύξεις περὶ τοῦ τρόπου ἐκτελέσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τῶν βασάνων αὐτῶν, μὲ ἐνδιαφερούσας ἐφαρμογὰς εἰς χρονολογικοὺς λογισμούς. Χρησιμοποιῶν τὰ προηγούμενα, ὁ Wallis ἐκθέτει ἀλγεβρικῶς τὸ περιεχόμενον τοῦ Βιβλίου II τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοὺς κανόνας πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἁπλουστέρων ἐπιπέδων ἐμβαδῶν.

Ἡ σύγκρισις δύο ἀριθμῶν τοῦ δίδει ἀφορμὴν ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὰς ἀριθμητικὰς καὶ γεωμετρικὰς προόδους. Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὸ ζατρίκιον (σκάκι) δὲν παρουσιάζει ἀξιόλογον πρωτοτυπίαν, ἀλλὰ μερικοὶ ἀναγνῶσται θὰ εὕρουν ἴσως ἐνδιαφέρουσαν τὴν ἀναπαραγωγὴν μιᾶς ἀραβικῆς σελίδος, ὅπου ἱστορεῖται ἡ προέλευσις τοῦ διασήμου παιγνιδίου.

Ἀπαντᾶται κατόπιν μία νέα ἔκθεσις τοῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου V τοῦ Εὐκλείδου, ἀποτελοῦσα τρόπον τινὰ προοίμιον εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (regula aurea), εὐθεῖαν, ἀντίστροφον καὶ συνεζευγμένην. Ἀκολουθοῦν αἱ μέθοδοι λύσεως προβλημάτων ἑταιρείας καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Πολὺ εὐρύτερον εἶναι τὸ πρόγραμμα τὸ ἐκτιθέμενον εἰς τὸ δεύτερον ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν ἔργων τοῦ Wallis (δημοσιευθὲν ἀγγλιστὶ τὸ 1673 ὑπὸ τὸν τίτλον Treatise of algebra both historical and practical, ἀναδημοσιευθὲν μεταφρασμένον εἰς λατινικὴν τὸ 1685). Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀποτελεῖ ἐκτενῆ ἀνασκόπησιν, ἱστορικὴν καὶ θεωρητικήν, τοῦ συνόλου τῆς ὕλης, ἡ ὁποία ἀνῆκεν εἰς τὴν ἄλγεβραν περὶ τὰ τέλη τοῦ XVII αἰῶνος. Εἰς τὴν ὕλην αὐτὴν περιλαμβάνονται καὶ ζητήματα τὰ ὁποῖα σήμερον θεωροῦνται ξένα πρὸς

τὸν κλάδον αὐτὸν τῶν μαθηματικῶν. Ἡ συγγραφὴ ἔγινε μὲ βάσιν τὴν σχετικὴν τῆς ἐποχῆς βιβλιογραφίαν, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τὸν Luca Pacioli (τὰ ἔργα τοῦ Fibonacci δὲν εἶχον ἀκόμη ἀνασυρθῆ ἐκ τοῦ τάφου). Οἱ περιορισμοὶ τοῦ χώρου καὶ ἡ ἐπιθυμία μας νὰ μὴν ἐπαναλαμβάνωμεν γνωστὰ ἤδη πράγματα, μᾶς ἀναγκάζουν νὰ παραιτηθῶμεν τῆς περιγραφῆς τῶν 112 Κεφαλαίων ποὺ συνιστοῦν τὸ ὅλον σύγγραμμα.

Παρατηροῦμεν γενικῶς ὅτι εἰς τὸ θεωρητικὸν μέρος ὁ Wallis ἀποκαλύπτεται ὡς ἔμπειρος διδάσκαλος*, μὴ ἀπαιτῶν ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας του μεγάλας προσπαθείας διὰ νὰ κατανοήσουν τὴν σκέψιν του. Ὡς ἱστορικὸς δεικνύεται ἐν γένει πρόθυμος καὶ διατεθειμένος ν' ἀναγνωρίσῃ τὰς συμβολὰς τῶν προγενεστέρων του (τοῦτο μαρτυροῦν μερικὰ ἱστορικοῦ περιεχομένου ἄρθρα του δημοσιευθέντα εἰς τὰ Philosophical Transactions), ἄγγλων ἢ μή. Λέγομεν «ἐν γένει», διότι ἀπέναντι τοῦ Descartes, ὁ Wallis, παρασυρόμενος ἀπὸ ὑπέρμετρον ἐθνικισμόν, ἔχασε τελείως τὴν ψυχραιμίαν τῆς ὀρθῆς κρίσεως, ἀφοῦ ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον νὰ καταβάλῃ προσπαθείας διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅτι ἡ Géométrie εἶναι ἔργον ἐστερημένον πάσης πρωτοτυπίας καὶ σπουδαιότητος! Κατ' αὐτὸν ὅ,τι ὑπάρχει ἀξιόλογον δὲν εἶναι νέον καὶ ὅ,τι εἶναι σημαντικὸν στερεῖται πρωτοτυπίας, ὡς ἀντιγραφὲν ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Harriot (§ 331). Ὁ συγγραφεὺς τοῦ Discours de la méthode εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Mersenne κατὰ Δεκέμβριον τοῦ 1638, ἀνεγνώρισεν, ὅτι εἶχεν ἀπὸ μακροῦ εἰς τὴν κατοχήν του τὸ ἔργον ἐκεῖνο, ἀλλὰ δηλώνει, ὅτι τὸ διέτρεξε μόνον μετὰ τὴν δημοσίευσιν τῆς Géométrie, προσθέτων μάλιστα ὅτι δὲν ἀνεῦρε παρὰ ἐλάχιστα σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸ ἔργον ἐκεῖνο, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἄλλως τε κάθε ἀντικειμενικὸς ἀναγνώστης δύναται ν' ἀναγνωρίσῃ καὶ μόνος του ὡς ἀπολύτως σύμφωνον πρὸς τὴν ἀλήθειαν.

Παρὰ ταῦτα ἡ περὶ λογοκλοπίας κατηγορία ἐναντίον τοῦ Descartes ἐξηκολούθησε νὰ ὑφίσταται, πιθανῶς ἐκ δραστηριότητος τοῦ λόρδου Cavendish, ὁ ὁποῖος ἔζη εἰς Παρισίους ἀπὸ τοῦ 1645. Ὑπάρχει περὶ αὐτοῦ μία μαρτυρία εἰς μίαν ἐπιστολὴν τοῦ Carcavy ὑπὸ χρονολογίαν 24 Σεπτεμβρίου 1649, σταλεῖσαν πρὸς τὸν Descartes ἀκριβῶς τὴν στιγμήν, ποὺ ἦτο ἕτοιμος ν' ἀναχωρήσῃ διὰ τὸ μοιραῖον του ταξείδιον. Εἰς τὸν Wallis ὅμως ἀνήκει τὸ θλιβερὸν προνόμιον, ὅτι ἀπροκαλύπτως διεκήρυξε τὴν κατηγορίαν, τεκμηριωμένην κατὰ τὸν ἴδικόν του τρόπον**, μὲ μοναδικὸν ἐν τούτοις

* Ὁ Wallis εἶναι δημιουργὸς τοῦ ὅρου mantiss, μὲ τὸν ὁποῖον ἐχαρακτήριζε γενικῶς τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω καὶ ἂν αὐτὸς δὲν παριστᾷ λογάριθμον.

** Ἐκτὸς πολλῶν χωρίων τῆς Ἀλγέβρας του, ἂς μελετήσῃ ὁ ἐνδιαφερόμενος τὴν ἐπιστολὴν πρὸς S. Morland (12 Μαρτίου 1688) καταχωρηθεῖσαν εἰς τὸν Τόμον III σελ 207 - 213 τῶν Opera mathematica, ὡς καὶ μίαν ἄλλην (4 Ἰουλίου 1692) καταχωρηθεῖσαν ὁμοίως ἐκεῖ σελ. 213 - 220 καὶ ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν P. Prestet (1650 περίπου - 1690),

ἀποτέλεσμα νὰ περιέλθῃ ὁ ἴδιος εἰς ἀνυποληψίαν καὶ νὰ καταστήσῃ διστακτικοὺς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ ἔργου του, οἱ ὁποῖοι βεβαίως δὲν λησμονοῦν τὸ ἀρχαῖον ρητόν: «ὁ ἅπαξ ψευσθεὶς πάντοτε ψεύδεται» (semel mentitus, semper mentitus).

422. Εἰς συμπλήρωσιν, πιθανῶς, τῆς μεγάλης αὐτῆς ἀλγεβρικῆς ἐγκυκλοπαιδείας, ὁ Wallis ἔγραψεν (εἰς ἀγγλικὴν γλῶσσαν, τὸ 1685) ἕνα μικρὸν ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον πραγματεύεται ζητήματα, μὴ συμπεριληφθέντα εἰς τὸ πρῶτον. Ὑπολογίζεται τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν καὶ τῶν μεταθέσεων (alternationes), αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ μορφωθοῦν ἐξ ἑνὸς πλήθους στοιχείων, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν δὲν εἶναι ὅλα τὰ στοιχεῖα διακεκριμένα. Ὡς πρὸς τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν, θεωρεῖ ἄξιον ἐξάρσεως τὸν τεράστιον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον ὁδηγεῖ ὁ ὑπολογισμός· ὑπολογίζει δὲ χάριν παραδείγματος τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ποὺ ἐπιδέχονται τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι τὸν ἀριθμόν:

620448401733239439360000.

Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι δύναται κανεὶς νὰ γράψῃ πέντε μεταθέσεις εἰς ἕκαστον λεπτόν, ἐκ τῶν 525600 ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ἔτος, ἂς ἐπιχειρήσῃ ὁ ἀναγνώστης νὰ προσδιορίσῃ πόσαι ζωαὶ θὰ ἐχρειάζοντο διὰ νὰ ἐξαντληθῇ ἡ καταγραφὴ τοῦ συνόλου τῶν μεταθέσεων!

Ὁ Wallis στρέφεται κατόπιν εἰς ἄλλο ζήτημα, τουτέστιν εἰς τὴν μελέτην τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, προκειμένου νὰ λύσῃ τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ προβλήματα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Fermat εἰς τὴν γνωστὴν ἀγωνιστικήν του πρόκλησιν (§ 360).

Τὸ αὐτὸ ἔτος (1685) ἐδημοσίευσεν ὁ ἴδιος, ἐπίσης εἰς ἀγγλικὴν γλῶσσαν, μίαν πραγματείαν ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν «γωνιακῶν τομῶν» (πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τόξων), περιοριζόμενος εἰς τὰς περιπτώσεις, ὅπου ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, . . . , 6. Ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τῶν προκυπτόντων τύπων, ἄξιαι ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι αἱ λύσεις ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὰ προβλήματα τὰ προταθέντα, τὸ ἕνα ὑπὸ τοῦ γάλλου François du Laurens τὸ 1667, τὸ ἄλλο ὑπὸ τοῦ βέλγου Jacobo Wassenaar (§ 352) τὸ 1667, τοῦ πρώτου ἀφορῶντος τὸν κύκλον, τοῦ δευτέρου τὴν ἐξωτερικὴν κογχοειδῆ.

E. G. Rahn καὶ G. Pell

423. Αἱ ἐπελθοῦσαι τελειοποιήσεις εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν, κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ XVII αἰῶνος δὲν ἐθεωρήθησαν ὑφ' ὅλων ὡς ὁρι-

συγγραφέα ἑνὸς διτόμου βιβλίου φέροντος τὸν τίτλον Nouveaux Élements de mathématiques.

στικαί. Μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι κατέβαλον προσπαθείας περαιτέρω βελτιώσεως τούτου, θ' ἀναφέρωμεν τὸν E.G.Rahn (γενν. τὴν 13ην Μαρτίου 1622, ἀποθ. τὴν 27ην Μαΐου 1676), ὁ ὁποῖος, κατόπιν συμβουλῆς καὶ βοηθείας ἑνὸς φίλου του, ἀπεφάσισε νὰ κάμῃ μίαν νέαν ἔκθεσιν τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ, τῆς ὁποίας τὴν ὕλην εἶχε διδαχθῆ ἀπὸ τοὺς Διόφαντον, Viète, Descartes καὶ van Schooten. Τοιουτοτρόπως ἔλαβεν ὑπόστασιν ἡ Teutsche algebra, ἐκδοθεῖσα εἰς τὴν Ζυρίχην τὸ 1659*.

Ὑποτίθεται γενικῶς ὅτι ὁ ἀνώνυμος ἐκεῖνος φίλος καὶ βοηθὸς ἦτο ὁ Ἰωάννης Pell, γεννηθεὶς εἰς Southwick τὴν 1ην Μαρτίου 1611 καὶ σπουδάσας εἰς τὸ Cambridge, ὅπου καὶ ἀπέκτησε φήμην ἀνδρὸς πολυγλώσσου. Τὸ 1643 ἐκλήθη νὰ διδάξῃ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Amsterdam. Ἐδίδαξε τότε μίαν σειρὰν μαθημάτων ἐπὶ τοῦ Διοφάντου, τῶν ἔργων τοῦ ὁποίου ἔκαμε μίαν πλήρη μετάφρασιν παραμείνασαν ἀνέκδοτον, τὸ δὲ 1646 ἐδημοσίευσεν εἰς ἀγγλικὴν καὶ τὸ ἑπόμενον ἔτος εἰς λατινικὴν μίαν ἀναίρεσιν τοῦ δῆθεν τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ὑπὸ τοῦ δανοῦ μαθηματικοῦ καὶ ἀστρονόμου Longomontano (§ 411).

Ἐπαναπατρισθεὶς τὸ 1652, ἐπέσυρε τὴν ἐμπιστοσύνην τοῦ Cromwell, ὁ ὁποῖος τὸν ἀπέστειλεν εἰς τὴν Ζυρίχην ὡς διπλωματικόν του ἐκπρόσωπον. Ἐπιστρέψας εἰς τὸ Λονδῖνον προσεκολλήθη εἰς τὴν μοναρχίαν, περιεβλήθη τὸ ἱερατικὸν ἔνδυμα καὶ ἐξελέγη μέλος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου. Τὸ 1672 ἐδημοσίευσεν ἐκτεταμένον πίνακα τετραγώνων καὶ ἀπέθανε τὴν 12ην Δεκεμβρίου 1685, καταλιπὼν μέγαν ἀριθμὸν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα κατάκεινται εἰς τὸ Βρεττανικὸν Μουσεῖον, ἀναμένοντα τὸν ἁρμόδιον ἐρευνητὴν πρὸς ἐξέτασιν.

Ὁ Rahn, εἰς τὸ ἔργον του, ἐκτὸς τῶν εὑρισκομένων ἤδη ἐν χρήσει συμβόλων ($+$, $-$, $=$, $>$, $<$), χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸ σύμβολον * καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν τὸ σύμβολον $\div$. Πολυπλοκώτερα σύμβολα εἰσάγονται πρὸς ἐξυπηρέτησιν ἄλλων σκοπῶν, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν περιττὸν νὰ μνημονεύσωμεν, ἀφοῦ δὲν ἐγένοντο τελικῶς δεκτὰ εἰς τὸ κοινόν. Σημειώνομεν μᾶλλον, ὅτι διὰ νὰ δηλωθῇ ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν, χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ἡ λέξις «involviren», ἐκ τῆς ὁποίας παράγεται ἡ λέξις «involution» (ἐνέλιξις), ἡ ὁποία ἀκόμη σήμερον χρησιμοποιεῖται μὲ τὴν ἰδίαν σημασίαν ἀπὸ πολλοὺς ἄλλους συγγραφεῖς.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον ἀπαντᾶται πίναξ τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, κάτω τοῦ 24 000, τῶν μὴ διαιρετῶν διὰ τοῦ 5, ἑκάστου συνοδευομένου ὑπὸ τοῦ μικροτέρου διαιρέτου ἢ ὑπὸ τοῦ γράμματος p ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ ἀριθμοῦ πρώτου. Τὸ ἔργον αὐτὸ (τὸ ὁποῖον μετὰ σεβασμοῦ μνημονεύει ὁ Leibniz)

* Τὸ χειρόγραφον μιᾶς δευτέρας ἐκδόσεως, κατ' ἐπιθυμίαν τοῦ συγγραφέως, φυλάσσεται εἰς τὴν Δημοτικὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ζυρίχης.

εὗρε ἕνα μεταφραστὴν εἰς ἀγγλικὴν γλῶσσαν, τὸν Thomas Backer (1625 - 1690). Σχετικῶς παρατηροῦμεν πρωτίστως ὅτι εἰς τὸν τίτλον τῆς μεταφράσεως (An introduction to algebra, translated out of the high - dutch into english, Λονδῖνον 1668) τὸ ὄνομα τοῦ Rahn ἔχει ὑποστῇ ἔκλειψιν, καὶ κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι ἡ μετάφρασις παρουσιάζει τὸ ἔργον βελτιωμένον διὰ χειρὸς τοῦ Pell, εἰς τὸν ὁποῖον ἰδίως ὀφείλεται ἡ ἐπέκτασις τοῦ προλεχθέντος πίνακος μέχρι τοῦ 100 000. Ἀλλ' εἰς αὐτὴν (καὶ ἀκόμη ὀλιγώτερον εἰς τὸ πρωτότυπον κείμενον) δὲν ὑπάρχουν ἴχνη τῆς ἐξισώσεως $x^2 + ay^2 = 1$, καὶ ἀποβαίνει ματαία, ἑπομένως, ἡ ἀναζήτησις μιᾶς δικαιολογίας εἰς τὸ ὄνομα «ἐξίσωσις τοῦ Pell», τὸ ὁποῖον ἔδωσαν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὁ Euler καὶ οἱ ὀπαδοί του. Ἐξ ἴσου ἀδικαιολόγητος, μέχρις ἀποδείξεως τοῦ ἐναντίου, εἶναι ἡ ἀπόδοσις εἰς τὸν Pell τῶν ὑπὸ τοῦ Rahn εἰσαχθέντων νέων συμβόλων, διὰ τὴν ὁποίαν ὑπεύθυνος εἶναι ὁ Wallis, ὡς ἐκλαβὼν κατὰ λάθος τὸν Pell ὡς συγγραφέα τοῦ ἀνωνύμου ἐκείνου τόμου.

G. Caramuel

424. Τὴν σειρὰν αὐτὴν τῶν μετακαρτεσιανῶν ἀλγεβριστῶν κλείει ἕνας μαθηματικός, διὰ τὸν ὁποῖον ὑπερηφανεύεται ἡ Ἱσπανία, μολονότι πρόκειται περὶ προσώπου ἄλλης φυλῆς, γεννηθέντος ἐντελῶς τυχαίως εἰς τὴν Μαδρίτην καὶ ζήσαντος, σχεδὸν ἐφ' ὅρου ζωῆς, εἰς ἄλλα μέρη τῆς Εὐρώπης. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Giovanni Caramuel. Ἐγεννήθη τὴν 23ην Μαΐου 1606 ἀπὸ τὸν μηχανικόν, βοημὸν τὴν καταγωγήν, Lorenzo Caramuel y Lobkowitz καὶ τὴν ὀλλανδὴν Catalina de Frisia. Ἀπὸ μικρᾶς ἡλικίας ἐπέδειξεν ἱκανότητας καὶ ἔφεσιν πρὸς ἐπιστημονικὰς σπουδάς, περιεβλήθη τὸ ράσον τοῦ Ἁγίου Βενεδίκτου καὶ ἤρχισε τὴν σταδιοδρομίαν τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ εἰς τὸ κολλέγιον τῆς Alcalà, ὅπου ὑπῆρξε μαθητής.

Μετέβη κατόπιν εἰς Πορτογαλίαν καὶ Λουβαίν, ὅπου ἐθαυμάσθη ὄχι μόνον διὰ τὸν πλοῦτον τῶν γνώσεών του, ἀλλ' ἐπίσης διὰ τὰ κατορθώματα ἀνδρείας ποὺ ἐπετέλεσε κατόπιν μιᾶς προσκαίρου ἀνταλλαγῆς τοῦ ράσου μὲ τὸν στρατιωτικὸν θώρακα. Μετοικήσας ἀργότερα εἰς τὴν Σκωτίαν ἐξελέγη ἀρχιερατικὸς ἐπίτροπος τοῦ Τάγματος τῶν Σιστερσιανῶν διὰ τὴν Μεγάλην Βρεττανίαν καὶ Ἰρλανδίαν.

Εἰς τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην ἐπέστρεψεν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀββᾶ τοῦ Disibodenberg (Παλατινᾶτον). Ἐκδιωχθεὶς ὅμως ὑπὸ τῶν ἐλβετικῶν στρατευμάτων κατέφυγεν εἰς Βιέννην, ὁπόθεν μετέβη εἰς τὴν Πράγαν καὶ εὑρίσκετο ἐκεῖ, ὅταν τὰ στρατεύματα τοῦ Γουσταύου Ἀδόλφου προσέβαλον τὴν πόλιν τὸ 1648, ἐπιδείξας καὶ πάλιν ἀσυνήθη ἀνδρείαν.

Ὁ Πάπας Ἀλέξανδρος VII, ὁ ὁποῖος τὸν ἐγνώριζε προσωπικῶς, τὸν ἐκάλεσεν εἰς τὴν Ρώμην, ἀλλὰ μετ' ὀλίγον οἱ ἐχθροὶ τοῦ Caramuel ἐφρόν-

τισαν καὶ ἐπέτυχον νὰ τὸν ἀπομακρύνουν. Ὠνομάσθη τότε ἐπίσκοπος τῆς Καμπανίας καὶ κατόπιν ἀρχιεπίσκοπος τοῦ Τάραντος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς συμπληρώσεως τῶν μελετῶν του, ὁ βασιλεὺς τῆς Ἱσπανίας ἐφρόντισε νὰ μετοικήσῃ εἰς Vigenano, ὅπου καὶ ἀπέθανεν τὸ 1682.

Ἄνθρωπος εὐρυτάτης παιδείας ἐξέπληττε τοὺς συγχρόνους διὰ τῆς ἐργατικότητός του, ἀρκεῖ νὰ σημειώσωμεν ὅτι τὰ ἔργα του ἀνέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 262, ἐκ τούτων δὲ μερικὰ ἐξεδόθησαν εἰς μέγα φύλλον. Ἡμᾶς ἐνδιαφέρουν οἱ τέσσαρες τόμοι τοῦ συγγράμματός του Cursus mathematicus, τοῦ ὁποίου πολλαὶ σελίδες ἀφοροῦν τὴν ἱστορίαν καὶ τὴν φιλοσοφίαν τῶν μαθηματικῶν. Δύο ἐξ αὐτῶν φέρουν τὴν ἔνδειξιν «Καμπανία, 1670», καὶ εἰδικὸν τίτλον Mathesis biceps vetus et nova (Δικέφαλος μάθησις ἀρχαία καὶ νέα). Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ παρατήρησις περὶ τῆς δυνατότητος σχηματισμοῦ συστημάτων ἀριθμήσεως μὲ βάσιν διάφορον τοῦ 10. Ὁ Caramuel φέρει παραδείγματα διὰ νὰ δείξῃ πῶς ἐμφανίζεται ἡ ἀριθμητική, ὅταν ληφθῇ ὡς βάσις τὸ 2 ἢ 3 κ.ο.κ.

Μία ἄλλη καινοτομία εἶναι ἡ εἰσαγωγὴ ἑνὸς νέου συστήματος λογαρίθμων μὲ βάσιν C τοιαύτην, ὥστε

$$\log_{10} C = 9.$$

Ὁ συγγραφεὺς προσθέτει, ὅτι μεταξὺ τῶν νέων λογαρίθμων καὶ τῶν ἄλλων μὲ βάσιν τὸ 10 ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$\log_{10} N = 9 \cdot \log_c N,$$

ὅπου N τυχὼν ἀριθμός. Πρόκειται περὶ μιᾶς βελτιώσεως τοῦ νεπερείου συστήματος, ἡ ὁποία εἶχε παροδικὴν ζωήν, παρὰ τὴν ἀδιαφιλονίκητον θεωρητικήν της σπουδαιότητα.

E. Gunter καὶ E. Wingate

425. Κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχὴν δύο πρόσωπα, γεννηθέντα εἰς τὴν Ἀγγλίαν, κατέβαλον ἐπιτυχεῖς προσπαθείας πρὸς εὐρυτέραν διάδοσιν καὶ διευκόλυνσιν τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων. Χρέος μας εἶναι νὰ κάμωμεν ἐδῶ μνείαν τῆς δράσεώς των.

Ὁ Edward Gunter, γεννηθεὶς τὸ 1581, ἐνεγράφη τὸ 1599 εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford, ὅπου ἔλαβε τοὺς τίτλους B.A. (1603) καὶ M.A. (1606). Μία μέθοδος προβολῆς τῆς γηίνης σφαίρας, ὑπ' αὐτοῦ ἐπινοηθεῖσα, τὸν ἔφερεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Briggs καὶ τὸν Oughtred. Ἐφεῦρεν ἐπίσης ἕνα ἐμβαδομετρικὸν ἐργαλεῖον, ποὺ ἀπεδείχθη χρησιμώτατον εἰς τὴν πρᾶξιν. Τὸ 1619 κατέλαβε μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὸ Κολλέγιον Gresham τοῦ Λονδίνου, τὸ δὲ ἑπόμενον ἔτος ἐδημοσίευσεν ὑπὸ τὸν τίτλον Canon triangulorum, ἕνα πίνακα ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων, ὅπου διὰ πρώτην

φοράν άπαντῶνται οἱ τεχνικοὶ ὅροι «συνημίτονον» καὶ «συνεφαπτομένη». Ἐφεῦρεν ἐπίσης ἕνα ἀναγωγικὸν κύκλον, εἶδος λογιστικοῦ κανόνος. Τὰ ἔργα του συμπεριελήφθησαν εἰς μίαν συλλογήν, τῆς ὁποίας εἰς βραχύτατον χρόνον ἐγένοντο δύο ἐκδόσεις (1624, 1636).

Ὁ Edward Wingate ἐγεννήθη εἰς Yorkshire τὸ 1596, ἔκαμε δὲ τὰς σπουδάς του εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον 1610 - 1614. Κατόπιν μετέβη εἰς τὴν Γαλλίαν, ὅπου διὰ προφορικῆς διδασκαλίας καὶ γραπτῶν δοκιμίων ἐξελαΐκευσε τὰς ἐφευρέσεις τοῦ Napier καὶ τοῦ Gunter. Ἐπανελθὼν εἰς τὴν πατρίδα, καθ' ἣν ἐποχὴν ἐμαίνετο ὁ ἐμφύλιος πόλεμος, κατέλαβε μίαν θέσιν εἰς τὸν δικαστικὸν κλάδον. Ὅταν ἔφθασεν ἡ ὥρα τοῦ θανάτου (13 Δεκεμβρίου 1657), ρίπτων ἕνα βλέμμα εἰς τὸ ἔργον του ἔλαβε τὴν ἱκανοποίησιν ὅτι τοῦτο δὲ ἦτο μάταιον, διότι τῶν βιβλίων ποὺ ἀφιέρωσεν εἰς τὸν λογαριθμικὸν λογισμὸν καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν καὶ χρῆσιν τοῦ κυκλικοῦ ἀναγωγέως, ἐπανελαμβάνοντο αἱ ἐκδόσεις εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ τὴν Γαλλίαν.

Μία τριγωνομετρία τοῦ J. Caswel

426. Παρὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν νέων κλάδων εἰς τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος, ἡ τριγωνομετρία δὲν παρημελήθη, χάρις εἰς τὰς πολυαρίθμους καὶ σημαντικὰς ἐφαρμογὰς τὰς ὁποίας ἐπιδέχεται. Καὶ περιποιεῖ τιμὴν εἰς τὸν Wallis τὸ γεγονὸς ὅτι, μὲ τὸ νὰ παρεμβάλῃ καὶ τὸν κλάδον αὐτὸν εἰς τὸν II τόμον τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν του, διέσωσεν ἀπὸ τὴν ἀφάνειαν μίαν νέαν ἔκθεσιν τῆς ὕλης ὀφειλομένης εἰς τὸν Johr Caswell, καθηγητὴν καὶ ἀντιπρύτανιν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Oxford. Συμπατριώτης καὶ ὀπαδὸς τοῦ Oughtred, ὁ συγγραφεὺς δὲν φείδεται συμβόλων, μερικὰ τῶν ὁποίων ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν:

R = ἀκτίς,	σ = συντέμνουσα,
S = ἡμίτονον,	T = ἐφαπτομένη,
Σ = συνημίτονον,	t = συνεφαπτομένη,
s = τέμνουσα,	V = παρημίτονον τόξου,

sv = παρημίτονον τοῦ συμπληρωματικοῦ τόξου.

Ἡ ἔκθεσις τῆς ἐπιπεδομετρίας τοῦ Caswell εἶναι μεθοδική, στηριζομένη ἀποκλειστικῶς ἐπὶ τῶν θεωρημάτων τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνημιτόνων. Εἰς τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν θεωρεῖ τὸ τρίεδρον τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον καί, διὰ νὰ λάβῃ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, καταφεύγει εἰς κατακλίσεις, δίδων τοιουτοτρόπως πειστικὸν

παράδειγμα τῆς χρησιμότητος μεθόδων τῆς παραστατικῆς γεωμετρίας ἐφαρμοζομένων εἰς τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν.

Ὀφείλονται ἐπίσης εἰς αὐτὸν πρωτότυποι ἀποδείξεις τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Napier καὶ ἡ δημοσίευσις ἄλλων τύπων παρομοίας φύσεως, τὰς ὁποίας τοῦ ἀνεκοίνωσεν ὁ φίλος του ἐφημέριος Thomas Backer, γνωστός μας ἤδη ἐκ μνείας τοῦ ὀνόματός του εἰς § 423. Τὸ ὄνομά του συνδέεται κυρίως μὲ γραφικὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων ἀνωτέρου βαθμοῦ. Ἀρκοῦν αὐτὰ πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σπουδαιότητος τῆς ἐργασίας του, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἕνα ἀκόμη τεκμήριον τοῦ ζήλου, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκαλλιεργοῦντο τότε τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν Ἀγγλίαν. Δὲν εἶναι λοιπὸν διόλου παράδοξον τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν χώραν αὐτὴν ἐγεννήθη ἕνας μέγας ἐπιστήμων, τοῦ ὁποίου τὴν ζωὴν καὶ τὰ ἔργα πρόκειται ν' ἀφηγηθῶμεν εἰς τὸ προσεχὲς Κεφάλαιον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVIII

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ NEWTON ΚΑΙ LEIBNIZ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ: NEWTON

Βιογραφία

427. Τὸ αὐτὸ ἔτος τοῦ θανάτου τοῦ Γαλιλαίου (1642), τὴν ἡμέραν τῶν Χριστουγέννων, ἐγεννήθη εἰς τὸ Woolsthorpe τῆς κομητείας τοῦ Lincoln ὁ Isaac Newton (ἑλληνικὰ Ν ε ύ τ ω ν· ὀρθότερα Ν ι ο ῦ τ ο ν). Υἱὸς μικροῦ ἀγροκτηματίου, εἶδε τὸ φῶς προώρως, ὀλίγον μετὰ τὸν θάνατον τοῦ πατρός του, ἦτο δὲ τόσον ἰσχνός, ὥστε ἡ ζωή του ἐπὶ μακρὸν ἐφαίνετο εἰς κίνδυνον. Μετὰ δεύτερον γάμον τῆς μητρός του, πραγματοποιηθέντα μετὰ πάροδον τριετίας ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του, παρεδόθη εἰς τὰς φροντίδας στενῶν συγγενῶν οἱ ὁποῖοι, ὅταν ἔγινε δωδεκαετής, τὸν ἔστειλαν εἰς τὴν γειτονικὴν πόλιν τοῦ Grantham διὰ νὰ λάβῃ, εἰς ἕνα σχολεῖον ὑφιστάμενον μέχρι σήμερον, μίαν μόρφωσιν ἀνάλογον τῆς κοινωνικῆς του καταστάσεως. Ἐκεῖ, ἔπειτα ἀπὸ μίαν βραχεῖαν περίοδον μαθητείας, διεκρίθη μεταξὺ τῶν συμμαθητῶν του, οἱ ὁποῖοι ἀργότερα μὲ εὐαρέσκειαν ἀνεπόλουν τὸν γλυκὺν χαρακτῆρα καὶ τὸ ζωηρότατον πνεῦμα, τὴν μανίαν εἰς τὸ σχέδιον καὶ τὴν ἀπαράμιλλον δεξιότητα εἰς τὸ νὰ κατασκευάζῃ, κατὰ τὰς ὥρας τῶν διαλειμμάτων, στολίσματα περιπλοκώτατα καὶ ὡραιότατα.

Ἡ μητέρα του, χηρεύσασα διὰ δευτέραν φοράν, ἐπέστρεψεν ἐν τῷ μεταξὺ εἰς τὴν οἰκίαν τοῦ πρώτου συζύγου της, συνοδευομένη ἀπὸ τρία ἄλλα τέκνα ποὺ ἀπέκτησε μὲ τὸν δεύτερον. Οἰκοκυρὰ μὲ περιωρισμένην νοοτροπίαν, τρέφουσα τὴν ἐλπίδα νὰ διορθώσῃ τὰ ἐλλιπῆ οἰκονομικὰ μέσα τῆς οἰκογενείας, ἐσκέφθη ν' ἀποσύρῃ τὸν πρωτότοκον ἀπὸ τὰς σπουδάς του, διὰ νὰ τὸν εἰδικεύσῃ εἰς τὴν πρακτικὴν γεωργίαν. Ἀλλὰ δὲν ἐβράδυνε νὰ διαπιστώσῃ, ὅτι ἡ προσπάθειά της ἦτο ἄκαρπος κόπος, διότι τὸ παιδὶ δὲν εἶχε κανένα ἐνδιαφέρον εἰς ἐπιχειρήσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους, καταγινόμενον συνεχῶς μὲ βιβλία καὶ μηχανισμούς. Ἀπεστάλη λοιπὸν πάλιν εἰς τὸ

Grantham μὲ τὸν σκοπὸν νὰ συμπληρώσῃ τὸν κύκλον τῶν σπουδῶν, ποὺ ἦτο ἀπαραίτητος διὰ τὴν εἴσοδόν του εἰς τὸ Πανεπιστήμιον. Ἕνα σημειωματάριον, ποὺ ἐκράτει τότε, ἀποδεικνύει ὅτι τὸ κύριον ἐνδιαφέρον του τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐστρέφετο εἰς πειράματα φυσικῆς καὶ χημείας. Τὸν Ἰούνιον τοῦ 1661 ἐνεγράφη εἰς τὸ Trinity College τοῦ Cambridge, τὸ μέγα ἐκπαιδευτικὸν ἵδρυμα, τοῦ ὁποίου ἦτο προωρισμένος ν' ἀποβῇ ὁ διασημότερος ἐργάτης.

Ἔφθασεν εἰς τὴν ἔνδοξον πανεπιστημιούπολιν μὲ ἀποσκευὰς γνώσεων πτωχοτέρας ἴσως ἀπὸ ἐκείνας ποὺ εἶχον πολλοὶ τῶν συναδέλφων του, ἀλλὰ μὲ τὸ πνεῦμα δροσερὸν καὶ ἤρεμον. Εἶχε δὲ τὴν ἐξαιρετικὴν τύχην νὰ εὕρῃ μεταξὺ τῶν καθηγητῶν του τὸν Isaac Barrow, τριακονταετῆ περίπου τότε, ὁ ὁποῖος δὲν ἐχρειάσθη πολὺν χρόνον διὰ ν' ἀνακαλύψῃ εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ νέου μαθητοῦ του μίαν σπανίαν διάνοιαν. Ὁ Barrow εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος προέτρεψε τὸν Newton νὰ ἐπιδοθῇ εἰς τὴν μελέτην τῆς Ὀπτικῆς τοῦ Kepler.

Εὑρέθη ὅμως ὁ νεαρὸς μαθητὴς ἐνώπιον ὡρισμένων μαθηματικῶν δυσκολιῶν, αἱ ὁποῖαι ὑπερέβαινον τὰς δυνάμεις του καὶ αἱ ὁποῖαι τὸν ἠνάγκασαν νὰ ζητήσῃ βοήθειαν εἰς τὸν Εὐκλείδη. Ἀλλὰ δὲν εὗρεν ἱκανοποίησιν· ἀντιθέτως ᾐσθάνθη κόπωσιν ἀπὸ τὴν ἀνάγνωσιν ἑνὸς βιβλίου, ποὺ τοῦ ἐφαίνετο ἀσήμαντον· μόνον εἰς ἡλικίαν ὡριμοτέραν ἀνεγνώρισεν ὁ Newton τὰ σπάνια χαρίσματα τοῦ μνημειώδους κειμένου καὶ ἐλυπήθη σφόδρα διὰ τὴν ἐσπευσμένην καὶ ἐπιζημίαν δι' αὐτὸν ἐτυμηγορίαν του, ἡ ὁποία δὲν ἦτο παρὰ ἀποτέλεσμα νεανικῆς ὑπεροψίας. Ἐστράφη τότε πρὸς τὸν Descartes, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἤντλησε γνώσεις καὶ ἐμπνεύσεις, κατόπιν πρὸς τὸν Viète, τὸν Oughtred, τὸν van Schooten, διακόπτων τὰς μελέτας του αὐτὰς διὰ ν' ἀφοσιωθῇ εἰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις ἢ ν' ἀσχοληθῇ μὲ πειράματα φυσικῆς καὶ χημείας.

Συνεχίζων τὰς μελέτας του, ἔφθασεν (1663) εἰς τὰ ἔργα τοῦ Wallis, τοῦ λαμπροτέρου τότε ἄστρου ὑπὲρ τὸν μαθηματικὸν οὐρανὸν τῆς Ἀγγλίας, καὶ ὑπέστη ἐξ αὐτῶν βαθεῖαν καὶ εὐεργετικὴν ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ὁ χρόνος ἐστάθη ἀνίκανος ν' ἀπαλείψῃ. Καρπὸς αὐτῶν τῶν μελετῶν του εἶναι ἕνα χειρόγραφον, ἀναγόμενον εἰς τὸ ἔτος 1665, εἰς τὸ ὁποῖον, ὅπως θὰ ἴδωμεν, εὑρίσκονται τὸ θεώρημα τοῦ διωνύμου δι' ἐκθέτην τυχόντα, πολλὰ ἀναπτύγματα εἰς σειρὰς καὶ οἱ πρῶτοι τύποι τοῦ ροϊκοῦ λογισμοῦ (fluxion calculus), μὲ ἐφαρμογὰς εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις καὶ τὰς ἐπιπέδους καμπύλας.

Τὸν Ἰανουάριον τοῦ ἰδίου ἔτους τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge τοῦ ἀπένειμε τὸν πρῶτον πανεπιστημιακὸν τίτλον τῆς ἐποχῆς (B.A. = bachelor of Arts). Τὸ θέρος τοῦ ἰδίου ἔτους ἡ χολέρα, ἡ ὁποία ἐλυμαίνετο ἀπὸ τοῦ 1664 τὸ Λονδῖνον καὶ τὰ περίχωρα, τὸν ἠνάγκασε νὰ ἐγκαταλείψῃ

προσωρινῶς τὴν «πότνιαν μητέρα τῶν σπουδῶν» (alma mater studiorum) καὶ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρικὴν οἰκίαν. Ὅταν παρῆλθεν ἡ φοβερὰ μάστιξ, ἡ ὁποία ἐθέρισεν ἀναρίθμητα θύματα, ἐπέστρεψεν εἰς τὸ Cambridge διὰ νὰ λάβῃ καὶ τοὺς ἄλλους πανεπιστημιακοὺς τίτλους τῆς ἐποχῆς του, ἤτοι τοῦ «Minor Fellow» (1η Ὀκτωβρίου 1667) καὶ κατόπιν τοῦ M.A. (Master of Arts, 16 Μαρτίου 1668).

428. Μολονότι μέχρι τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ὁ νεαρὸς ἐπιστήμων δὲν εἶχε δώσει τίποτε εἰς τὸν τύπον, ἔχαιρεν ἤδη μεγάλης ὑπολήψεως εἰς τοὺς ἀκαδημαϊκοὺς κύκλους. Ἐκμεταλλευόμενος τ' ἀποτελέσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὅπως εἴπομεν εἶχε φθάσει ἀπὸ τοῦ 1665, συνέταξε τὸ ὑπόμνημα Analysis per aequationes numero terminorum infinitas[33] καὶ τὸ 1669 τὸ ἔθεσεν ὑπὸ τὴν κρίσιν τοῦ καθηγητοῦ του Barrow, ὁ ὁποῖος τὸ θέρος τοῦ ἰδίου ἔτους τὸ ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Collins (§ 284), αὐτὸς δὲ ἐζήτησε καὶ ἔλαβεν ἐξουσιοδότησιν νὰ λάβῃ ἀντίγραφα πρὸς ἀποστολὴν εἰς τοὺς πολυαρίθμους ἀνταποκριτάς του. Ἐκ τούτου γίνεται πιστευτόν, ὅτι αἱ πρῶται ἀνακαλύψεις τοῦ Newton ἔλαβον εὐρεῖαν δημοσιότητα ἀπὸ τότε, τουτέστι πολὺ προτοῦ δοθοῦν εἰς τὸν τύπον. Ὀλίγον ἔπειτα, κατὰ πρόσκλησιν τοῦ καθηγητοῦ καὶ φίλου του Barrow, ἔκαμε μίαν δευτέραν ἔκθεσιν τῶν μεθόδων ποὺ διεμόρφωσεν ὁ ἴδιος (Methodus fluxionum et serierum infinitarum[34]), μὲ τὸν σκοπὸν νὰ δημοσιευθῇ διὰ τοῦ τύπου ὡς παράρτημα μιᾶς σχεδιαζομένης τότε μεταφράσεως ἐκ τῆς ὀλλανδικῆς εἰς τὴν λατινικὴν ἑνὸς ἔργου ἀλγέβρας ὀφειλομένου εἰς κάποιον Kuckhuysen*. Τοῦ σχεδίου ὅμως ἐγκαταλειφθέντος, τὸ ἔργον ἐκεῖνο παρέμεινεν ἀνέκδοτον μέχρι τοῦ 1736, ὅτε ἐδημοσιεύθη τούτου μία ἀγγλικὴ μετάφρασις. Ὁ Barrow ὅμως, ὁ ὁποῖος εἶχε διαβάσει τὸ κείμενον ἐκεῖνο, μὲ ἀνυπόκριτον θαυμασμόν, ἤντλησε νέαν ἀπόδειξιν τῆς μεγάλης ἀξίας τοῦ παλαιοῦ μαθητοῦ του. Τόση δὲ ἦτο ἡ ἐκτίμησις μὲ τὴν ὁποίαν τὸν περιέβαλλεν, ὥστε μὲ μίαν ἀποφασιστικότητα, μοναδικὴν ἴσως εἰς τὰ χρονικὰ τῆς δημοσίας ἐκπαιδεύσεως, τοῦ παρεχώρησε τὴν ἕδραν τὴν ὁποίαν κατεῖχεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge, διὰ ν' ἀφοσιωθῇ ἐκεῖνος τοῦ λοιποῦ ψυχῇ καὶ σώματι εἰς τὴν Θεολογίαν. Τὸ ἀποτέλεσμα ἦτο νὰ ἐκλεγῇ ὁ Newton, τὴν 29ην Ὀκτωβρίου 1669, Lucasian Professor[35], ἐνῷ ὁ βασιλεὺς τῆς Ἀγγλίας δι' εἰδικοῦ προνομίου τὸν ἀπήλλαξε τῆς ὑποχρεώσεως νὰ φέρῃ τὴν εἰδικὴν στολὴν (abito talare), ποὺ ἐπέβαλλεν ὁ ἱδρυτικὸς κανονισμὸς τῆς ἕδρας ἐκείνης.

---

* Λεπτομέρειαι ἐπὶ τοῦ προκειμένου εὑρίσκονται εἰς ἐπιστολὰς ἀνταλλαγείσας μεταξὺ Newton καὶ J. Collins, ἡ πρώτη τῶν ὁποίων φέρει χρονολογίαν 11 Ἰουλίου 1670 (Ἀλληλογραφία ἐπιστημόνων, μνημονευομένη εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ Κεφαλαίου τούτου).

429. Ἡ εἰκοσαετία πού διέρρευσεν ἀπό τοῦ 1667 μέχρι τοῦ 1686, ἐνῷ ὑπῆρξεν ἐξόχως γόνιμος διὰ τὰς φυσικο - μαθηματικὰς ἐπιστήμας, εἰς τὴν ζωὴν τοῦ Newton παρουσιάζεται ἔρημος ὑπὸ ἔποψιν ἀξίας λόγου παραγωγικῆς δραστηριότητος. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς καθηγητικῆς του σταδιοδρομίας ἠσχολεῖτο κατὰ ἔκδηλον προτίμησιν μὲ τὴν ὀπτικήν. Συνέλαβε δὲ τότε τὴν ἰδέαν τοῦ κατοπτρικοῦ τηλεσκοπίου, τὸ ὁποῖον φέρει σήμερον τὸ ὄνομά του. Διὰ τὸ τηλεσκόπιον αὐτὸ ἐνδιεφέρθη ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία τοῦ Λονδίνου, ἡ ὁποία ἐφρόντισεν, ὥστε νὰ περιληφθῇ εἰς τὰ Πρακτικά της μία περιγραφὴ τοῦ ὀργάνου, ἐνῷ συγχρόνως ἔσπευσε νὰ καλέσῃ εἰς τοὺς κόλπους της τὸν νεαρὸν ἐφευρέτην (11 Ἰανουαρίου 1671). Εἰς τὴν μεγάλην αὐτὴν ἐπιστημονικὴν ἑταιρείαν ὁ Newton ἀνεκοίνωσεν (ἐπιστολὴ πρὸς Oldenburg τῆς 6ης Φεβρουαρίου 1672) τὴν ἀνακάλυψιν τῆς διαφόρου θλαστικότητος τῶν ἀκτίνων πού συνθέτουν τὸ λευκὸν φῶς. Παρὰ τὰς κριτικάς, αἱ ὁποῖαι ἠγέρθησαν ἐκ πολλῶν κατευθύνσεων, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν μεγαλειώδη αὐτὴν ἀνακάλυψιν, ἡ θεωρία του, ὅπως εἶναι παγκοίνως γνωστόν, ἔλαβε μόνιμον θέσιν εἰς τὸν κατάλογον τῶν φαινομένων ἐκείνων, ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν χωρεῖ καμμία εὔλογος ἀμφιβολία, εἰδικώτερον μάλιστα ἀφ' ὅτου τὰ σχετικὰ πειράματα περιεγράφησαν ἐκτενῶς εἰς τὸ μέγα ἔργον πού ἐδημοσίευσεν ὁ ἴδιος τὸ 1704 ἐπὶ τῆς Ὀ π τ ι κ ῆ ς.

Ἕνα ἄλλο ζήτημα, πού δὲν ἔπαυσε ν' ἀπασχολῇ τὸν Newton ἐπὶ μακρόν, ἦτο κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰς τὸ ἐπίκεντρον τοῦ ἐνδιαφέροντος. Ἐννοοῦμεν τὴν ἔρευναν τῶν νόμων, οἱ ὁποῖοι διέπουν τὴν πτῶσιν τῶν στερεῶν σωμάτων πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς. Φαίνεται ὅτι ἀπὸ τοῦ 1664 οὗτος ἦτο πεπεισμένος περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, τὸν ὁποῖον εἶχον ἤδη ἄλλοι ἐκφέρει προηγουμένως ὑπὸ μίαν ὑποθετικὴν μορφήν, δυνάμει τοῦ ὁποίου ἡ περὶ ἧς πρόκειται δύναμις θὰ ἔπρεπε ν' ἀσκῆται κατὰ λόγον ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Τὰ ἐμπόδια ὅμως πού συνήντησεν εἰς τὴν προσπάθειαν προσδιορισμοῦ τῆς ἕλξεως τῆς ἀσκουμένης ὑπὸ ὑλικῆς σφαίρας ἐφ' ἑνὸς ἐξωτερικοῦ σημείου ὡς καὶ ἡ ἔλλειψις ἑνὸς ἀλγορίθμου γενικῶς γνωστοῦ, ἱκανοῦ νὰ δώσῃ λύσιν εἰς τὰ ἀπαντώμενα προβλήματα, συνετέλεσαν, ὥστε νὰ καθυστερήσῃ ἡ ἀποκάλυψις τοῦ συμπεράσματος τῆς θεμελιώδους αὐτῆς ἐρεύνης ἐπὶ χρονικὸν διάστημα δεκατεσσάρων περίπου ἐτῶν. Ὅταν ἐπανέλαβε μὲ ἀποφασιστικότητα τὴν ἔρευναν ἐπὶ μίαν ἀκόμην πενταετίαν σκληρᾶς ἐργασίας καὶ ἔφθασεν εἰς ἀπόδειξιν τῆς δυνατότητος ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίου ἕλξεως ἐπὶ τῆς σελήνης, ἐθεώρησεν ἑαυτὸν ἱκανὸν νὰ θεμελιώσῃ τὴν οὐράνιον μηχανικὴν ἐπὶ βάσεων γρανιτώδους ἀσφαλείας.

430. Περὶ τῶν ἀνωτέρω ἀπασχολήσεων τοῦ Newton, ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία τοῦ Λονδίνου ἔλαβε γνῶσιν κατὰ τὴν συνεδρίασιν τῆς 10ης Δεκεμ-



SIR ISAAC NEWTON

βρίου 1684, διὰ στόματος ἑνὸς μεγάλου ἀστρονόμου, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα κατέστη εὐλόγως δημοφιλὲς ἐκ τῆς ὑπ' αὐτοῦ γενομένης ἀνακαλύψεως ἑνὸς κομήτου· ἐννοοῦμεν τον Edmond Halley. Οὗτος ἐξέθεσε τὴν ἡμέραν ἐκείνην εἰς τὰς γενικάς των γραμμὰς τὸ σχέδιον καὶ τὰ ἀποτελέσματα μιᾶς πραγματείας Περὶ τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν εἶχε συγγράψει ὁ Newton. Ἡ Ἑταιρεία παραχρῆμα ἐπεφόρτισε τὸν Halley νὰ ἐπιδιώξῃ αὐτοπροσώπως τὴν πραγματοποίησιν μιᾶς πλήρους ἀνακοινώσεως. Ἡ πρόσκλησις ἐγένετο δεκτὴ καὶ κατὰ τὴν ἱστορικὴν συνεδρίασιν τῆς 15ης Ἀπριλίου 1685 προσήχθησαν εἰς τὴν μεγάλην ἐκείνην ἐπιστημονικὴν Ἑταιρείαν τὰ πρῶτα δύο Βιβλία τοῦ ἀθανάτου ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐπέπρωτο νὰ λάβῃ τὸν ἱστορικὸν τίτλον: Philosophiae naturalis principia mathematica (Μαθηματικαὶ ἀρχαὶ τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας). Ἡ Ἑταιρεία, ὑπὸ τὸ κράτος εὐλόγου ἐνθουσιασμοῦ, ἀνέθεσεν εἰς τὸ Διοικητικὸν Συμβούλιον τὴν φροντίδα νὰ ἐξεύρῃ τὰ μέσα διὰ τὴν ὑπὸ τὴν αἰγίδα της ἔκδοσιν τοῦ μνημειώδους συγγράμματος. Εἰς τὴν πραγματοποίησιν τῆς εὐγενεστάτης αὐτῆς ἀποφάσεως δὲν ἤρκουν, ὡς ἦτο φυσικόν, τὰ περιωρισμένα οἰκονομικὰ μέσα τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας (§ 287)· αἱ δυσκολίαι ὅμως ὑπερενικήθησαν χάρις εἰς τὴν μεσολάβησιν τοῦ προνοητικοῦ Halley, ὁ ὁποῖος ἀνέλαβε νὰ ἐγγυηθῇ προσωπικῶς εἰς τὸν τυπογράφον τὴν καταβολὴν τῶν δαπανῶν ἐκτυπώσεως. Τοιουτοτρόπως τὸ νευτώνειον χειρόγραφον κατετέθη εἰς τὸ τυπογραφεῖον τὴν 5ην Ἰουνίου 1686. Ὁ Halley ἀνέλαβε τὸ ἔργον τῆς διορθώσεως τῶν δοκιμίων, τὸ ὁποῖον ἐξεπλήρωσε μὲ τοιοῦτον ζῆλον καὶ τοιαύτην δεξιότητα, ὥστε χωρὶς ἀμφιβολίαν—προστιθεμένης καὶ τῆς προτέρας θερμῆς εἰσηγήσεως ὑπὲρ τοῦ ἔργου — πλῆρες δίκαιον ἔχουν οἱ ἰσχυρισθέντες ὅτι, χωρὶς τὸν Halley, τὸ μνημειῶδες ἐκεῖνο ἔργον οὐδέποτε θὰ ἔβλεπε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος. Σημειωτέον μάλιστα ὅτι ὁ ἴδιος ὁ Halley, γνωρίζων ἄριστα τὴν λατινικήν, ἐφιλοτέχνησεν ἔμμετρον ᾠδήν, ὡς ἀφιέρωσιν εἰς τὸν «ἔνδοξον συγγραφέα», προταχθεῖσαν τοῦ νευτωνείου κειμένου. Ἀπὸ τοὺς στίχους τῆς ᾠδῆς αὐτῆς διαφαίνεται ὁ βαθὺς θαυμασμὸς τοῦ ποιητοῦ πρὸς τὸν μεγαλοφυῆ συγγραφέα. Παραθέτομεν τοὺς τελευταίους στίχους εἰς ἐλευθέραν μετάφρασιν: «Καὶ τώρα σεῖς, ποὺ νέκταρ πίνετε οὐράνιο, ἐλᾶτε νὰ δοξάσωμε μὲ ὕμνους, ὅλοι μαζύ, τὸ ὄνομα τοῦ Νεύτωνα, ποὺ τόσο πολὺ ἀγάπησαν οἱ Μοῦσες· γιατὶ ξεκλείδωσε τοὺς σφιχτομπαρωμένους θησαυροὺς τῆς ἀλήθειας. Τόσο πλούσια ὁ Φοῖβος, μὲ τὴν ἀκτινοβολία τῆς θεότητάς του, φώτισε τὸ μυαλὸ τοῦ Νεύτωνα, ποὺ ἔτσι πέτυχε νὰ πλησιάσῃ τόσο τοὺς Θεούς, ὅσο κανεὶς ἄλλος θνητὸς δὲν θὰ μπορέσῃ».

Χάρις εἰς τὸν ἀκαταπόνητον ζῆλον τοῦ Halley, κατωρθώθη ὥστε τὸν Ἰούλιον τοῦ ἑπομένου ἔτους νὰ προσφερθῇ εἰς τὸν βασιλέα Ἰάκωβον II τὸ πρῶτον ἀντίτυπον τοῦ ἔργου, τοῦ προωρισμένου νὰ ἐξασφαλίσῃ εἰς τὴν

Ἀγγλίαν, ἐπὶ ἕνα περίπου αἰῶνα, ἀναμφισβήτητα πρωτεῖα δόξης εἰς τὰς φυσικομαθηματικὰς ἐπιστήμας.

431. Τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1687 ὁ Newton ἐξελέγη ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge ὡς συνήγορος ὑπερασπιστὴς τῶν ἱστορικῶν δικαιωμάτων τοῦ ἱδρύματος, τὰ ὁποῖα ἠπειλοῦντο ὑπὸ τοῦ μονάρχου τῆς ἐποχῆς, ἐξεπλήρωσε δὲ τὴν λεπτὴν αὐτὴν ἀποστολὴν μὲ τοιαύτην ἐπιτυχίαν, ὥστε τὸ αὐτὸ Πανεπιστήμιον τὸν ἐξέλεξεν ἐν συνεχείᾳ ὡς ἀντιπρόσωπόν του εἰς τὴν Βουλήν, ἡ ὁποία ἐλειτούργησεν ἀπὸ τὸν Ἰανουάριον 1689 μέχρι Φεβρουαρίου 1690. Ὑπὸ τὴν ἰδιότητά του αὐτὴν ὑπεστήριξε μὲ μετριοπάθειαν, μὴ ἐστερημένην δυνάμεως, τὸ ἀπαραβίαστον τῶν ἀρχῶν τῆς θρησκευτικῆς καὶ πολιτικῆς ἐλευθερίας, ἐναντίον ἐκείνων ποὺ εἶχον τὴν πρόθεσιν νὰ τὰς καταπατήσουν.

Ἐπανελθὼν εἰς τὰς εἰρηνικάς του μελέτας, ἔστρεψε τὴν προσοχήν του πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀστρονομικῶν διαθλάσεων, τῆς ὁποίας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ δημιουργός, ἀλλὰ τὸ φθινόπωρον τοῦ 1692 κατελήφθη ἀπὸ κρίσιν νευρασθενείας, τὴν ὁποίαν εὐτυχῶς δὲν ἐβράδυνε νὰ ὑπερνικήσῃ. Ὀλίγον ἔπειτα ὁ λόρδος Halifax, ὑπουργὸς τότε τῶν οἰκονομικῶν τῆς Ἀγγλίας, συνέλαβε τὴν ἰδέαν μιᾶς ριζικῆς μεταρρυθμίσεως τοῦ ἐν χρήσει νομισματικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον παρουσίαζε τὴν ἐποχὴν ἐκείνην σοβαρώτατα μειονεκτήματα. Ἀφοῦ ἔλαβε τὴν εὐνοϊκὴν γνώμην καὶ τὴν συγκατάθεσιν τῶν ἁρμοδίων, ἤρχισε τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ σχεδίου του μὲ τὸν διορισμὸν τοῦ Newton (19 Μαρτίου 1695) ὡς ἐπιθεωρητοῦ τοῦ Νομισματοκοπείου τοῦ Λονδίνου. Αἱ προσδοκίαι τῆς Κυβερνήσεως δὲν διεψεύσθησαν. Αἱ ὑπηρεσίαι, τὰς ὁποίας ὁ Newton προσέφερεν εἰς τὸν τομέα τοῦτον τῆς δραστηριότητός του ὑπῆρξαν τοιαύτης σπουδαιότητος (ὁ ἐπιθυμῶν νὰ λάβῃ ἰδέαν δὲν ἔχει παρὰ νὰ μελετήσῃ τὰς ὑπ' αὐτοῦ γραφείσας ἐκθέσεις, δοθείσας ἤδη ἀπὸ καιροῦ εἰς τὴν δημοσιότητα), ὥστε, κενωθείσης τῆς θέσεως τοῦ διευθυντοῦ τοῦ περιφήμου ἐκείνου Κρατικοῦ Ἱδρύματος, ἐκλήθη ὁ Newton νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ διευθυντοῦ, τὴν ὁποίαν καὶ διετήρησε μέχρι τέλους τοῦ βίου του. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης (1699) χρονολογεῖται ἡ ἀπόσπασις τοῦ κορυφαίου ἐρευνητοῦ ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιον, τοῦ ὁποίου ἐπὶ μακρὸν ὑπῆρξε πηγὴ λαμπρότητος καὶ ὑπόδειγμα κοσμιότητος. Τὸ αὐτὸ ἔτος (1699) ἡ Ἀκαδημία τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων τὸν ἐκάλει νὰ καταλάβῃ μίαν τῶν ὀκτῶν ἑδρῶν, ποὺ προεβλέποντο εἰς αὐτὴν δι' ἐξέχοντας ἐπιστήμονας ἄλλων χωρῶν. Τὸ 1703 ἐξελέγη πρόεδρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου, ἄλλο λειτούργημα ποὺ διετήρησε μέχρι τοῦ θανάτου του. Τέλος, τὸ 1705, ἐπ' εὐκαιρίᾳ μιᾶς ἐπισκέψεως τῆς Βασιλίσσης Ἄννης εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge, τοῦ ἀπενεμήθη τὸ τίτλος τοῦ Sir, μὲ τὸν ὁποῖον ἔκτοτε ἠρέσκετο νὰ συνοδεύῃ τὸ ὄνομά του.

432. Αἱ βαρεῖαι φροντίδες, ποὺ ἦσαν συναφεῖς μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Νομισματοκοπείου, ἀπερρόφησαν τόσον μέγα μέρος τῆς δραστηριότητος τοῦ Newton, ὥστε δὲν ἀποτελεῖ ὑπερβολὴν τὸ λεχθὲν ὅτι ἡ ἀπασχόλησίς του εἰς τὸ Νομισματοκοπεῖον προεκάλεσε καθυστέρησιν ἑνὸς τοὐλάχιστον αἰῶνος εἰς τὴν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν. Παρὰ ταῦτα ἡ συμμετοχή του εἰς τὴν ἐκτύπωσιν καὶ ἐπανεκτύπωσιν τῶν ἔργων του, τὸ ἐνεργὸν ἐνδιαφέρον του εἰς τὴν παρακολούθησιν τῆς πολεμικῆς, τὴν ὁποίαν προεκάλεσαν μερικὰ ἔργα του καί, διὰ νὰ μὴ παραλείψωμεν τίποτε, αἱ χρονολογικαί, ἱστορικαὶ καὶ θεολογικαί του μελέται, ἀρκοῦν διὰ νὰ καταδείξουν ὅτι δὲν εἶχε τελείως παραιτηθῆ τῆς ἐρευνητικῆς του δραστηριότητος.

Ὁ Newton, ὁ ὁποῖος εἰς νεανικὴν ἡλικίαν ἦτο ἀσθενοῦς κράσεως, μὲ τὴν πάροδον τῶν ἐτῶν κατέστη εὐρωστότερος, ὅπως δύναται νὰ διαπιστώσῃ οἱοσδήποτε ἀπὸ πολυαρίθμους εἰκόνας του, διατηρουμένας εἰς πινακοθήκας ἢ ἀναδημοσιευομένας εἰς συγγράμματα. Τὸ 1722, ὅταν ἤγγιζε τὴν ἡλικίαν τῶν 80 ἐτῶν, ὑπέστη μίαν κρίσιν λιθιάσεως, τὴν ὁποίαν κατόρθωσε νὰ ὑπερνικήσῃ. Τρία ἔτη βραδύτερον ἐπάλαισε νικηφόρως ἐναντίον μιᾶς βαρείας πνευμονίας· νέα ὅμως κρίσις τοῦ κακοῦ ἐπέφερε τὸν θάνατον τὴν 20ὴν Μαρτίου 1727, ρίπτουσα εἰς τὸ πένθος τὴν Ἀγγλίαν, ἡ ὁποία τὸν ἐτίμα δικαίως ὡς μίαν ἐθνικὴν δόξαν. Ἡ κηδεία του ὑπῆρξε πάνδημος καὶ ἐγένετο μὲ ἐπισημότητα ἁρμόζουσαν εἰς μέλη τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας. Δι' ὁμοφώνου ἀποφάσεως ἠγέρθη πρὸς τιμήν του μνημεῖον πολυτελέστατον εἰς τὸ ἀββαεῖον τοῦ Westminster, τὸ ὁποῖον ὑφίσταται μέχρι σήμερον καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐτέθη λαμπρὰ ἐπιγραφή, κλείουσα μὲ αὐτάς, τὰς τοσάκις ἐπαναληφθείσας λέξεις:

«Sibi gratulentur mortales,
tale tantumque existisse
humani generis decus»[35]

Ἡ Ἀγγλία ἀποδίδουσα τοιαύτας τιμὰς εἰς τὸν Newton ἐδείχθη ἀξία μήτηρ τοιούτου τέκνου *.

* Τὰ πολυάριθμα χειρόγραφά του περιῆλθον εἰς χεῖρας τῆς προσφιλοῦς του ἀνεψιᾶς Cathrin Barton (εὐαρμόστου συζύγου τοῦ John Conduitt, διαδεχθέντος τὸν Newton εἰς τὴν Διοίκησιν τοῦ Νομισματοκοπείου τοῦ Λονδίνου) καὶ ἐν συνεχείᾳ τῆς κόρης της, συζύγου τοῦ ὑποκόμητος τοῦ Lymington, υἱοῦ τοῦ πρώτου λόρδου Portsmouth. Ἕνας ἄλλος εὐγενής, φέρων τὸ αὐτὸ ὄνομα, ἔκαμε πρὸ 60 ἐτῶν τὰ χειρόγραφα αὐτὰ δῶρον εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge, τὸ ὁποῖον μὲ τὴν σειράν του συνέστησε τὸ 1872 μίαν πενταμελῆ ἐπιτροπὴν (μεταξὺ τῶν μελῶν ἦτο καὶ ὁ ἀστρονόμος Adams καὶ ὁ φυσικομαθηματικὸς Stokes), διὰ νὰ μελετήσῃ τὸ περιεχόμενον τῶν ὅσων προήρχοντο ἀπὸ τὸν κάλαμον τοῦ συγγραφέως τῶν Principia. Τὸ 1888 ἐδημοσιεύθη ἡ ἔκθεσις τῆς ἐπιτροπῆς ἐκείνης, ἔκθεσις, ἡ ὁποία ἐν ἀναμονῇ μιᾶς νέας ἀληθῶς πλήρους ἐκδόσεως τῶν Ἁπάντων τοῦ μεγάλου στοχαστοῦ, ἀποτελεῖ μίαν ἀρίστην προπαρασκευὴν αὐτῆς.

Ροὴ καὶ ρέουσα

433. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὰς συμβολὰς τοῦ Newton εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀπείρου, εἶναι σκόπιμον ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὰς μνημονευθείσας ἤδη μικρὰς πραγματείας, τὰς ὁποίας ἔγραψε μὲν εἰς νεαρὰν ἡλικίαν, ἐδημοσίευσεν ὅμως μόνον ὅταν τὰ Principia ἀνεβίβασαν τὸ ὄνομά του εἰς τὰ αἰθέρια ὕψη τῆς δόξης.

Τὸ ἀρχαιότερον ἔργον του φέρει τὸν τίτλον Analysis per aequationes numero terminorum infinitas[33]. Τὸ ἔργον αὐτὸ συνεγράφη κατὰ τὸ 1666 καὶ ἀνεκοινώθη μετὰ τριετίαν εἰς τὸν Barrow, ὁ ὁποῖος τὸ μετέδωκεν εἰς τὸν Collins καὶ εἰς τὸν λόρδον Brouncker, ἐδόθη δὲ εἰς τὸν τύπον τὸ 1712. Ἀφετηρία τῆς ἐργασίας του εἶναι ἡ πρότασις — τῆς ὁποίας ἀπόδειξις δίδεται εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔργου — ὅτι τὸ ἐμβαδὸν E μιᾶς καμπύλης ἐχούσης ἐξίσωσιν:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}, \tag{1}$$

ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου:

$$E = \frac{n}{m+n}\, ax^{\frac{m+n}{n}}. \tag{2}$$

Σύρων τὰ βήματά του ἐπὶ ἐδάφους ἀγνώστου, ὁ νεαρὸς ἐπιστήμων ἐσκόνταψε καὶ περιέπεσεν εἰς τὸ σφάλμα νὰ θεωρήσῃ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ὀρθὸν ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν $m + n = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας θ' ἀπέρρεεν καὶ ἡ ἐσφαλμένη γραφή:

$$\int \frac{dx}{x} = \infty .$$

Ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως μιᾶς καμπύλης $y = f(x)$ εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς (1), ὁ τετραγωνισμὸς αὐτῆς προκύπτει διὰ προσθέσεως ἰσαρίθμων ὅρων τῆς μορφῆς (2).

Ἂς προσέξῃ ὁ ἀναγνώστης τὴν εὐχέρειαν μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Newton, ἀπὸ νεαρᾶς ἡλικίας, ἐχειρίζετο δυνάμεις μὲ ἐκθέτας μὴ ἀκεραίους καὶ θετικούς, πρᾶγμα πιστοποιούμενον ἄλλωστε καὶ ἀπὸ ἄλλας ἐργασίας του.

Ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχῃ κλάσματα ἢ δυνάμεις μὲ ὅρους πολυωνύμων, ὁ Newton διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν τετραγωνισμὸν καταφεύγει εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναπτύξεως εἰς σειράν, μέθοδον τὴν ὁποίαν ἀποκαθιστᾷ γενικεύων τὰς μεθόδους ποὺ διδάσκει ἡ ἀριθμητικὴ διὰ τὴν ἀλγεβρικὴν διαίρεσιν ἢ τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ρίζης. Ἡ εὐφυὴς αὕτη ἐπέκτασις τοῦ ἐπέτρεψε νὰ τετραγωνίσῃ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὸν κύκλον δι' ἀναπτύξεως εἰς σειρὰς μὲ δυνάμεις ἀκεραίας καὶ θετικὰς τῶν παραστάσεων $\sqrt{a^2 \pm x^2}$. Πρέπει νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ Newton ἠσχολήθη ἐπί-

σης μὲ τὴν εὐθειοποίησιν τῆς περιφερείας. Ὑποθέτοντες αὐτὴν παριστωμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - x + y^2 = 0,$$

δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν σήμερον τὸ τόξον διὰ τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{(x-x^2)}\cdot dx,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου γίνεται φανερὸν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ προβῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμόν, ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν εἰς σειράν.

Ἡ αὐτὴ ἰδέα ἐφαρμοσθεῖσα εἰς τὴν ὑπερβολήν:

$$y(1 + x) = 1,$$

ὡδήγησε τὸν Newton, ὄχι μόνον εἰς τὴν ἐπανεύρεσιν τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ Mercator:

$$z = ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

ἀλλά, δι' ἀντιστροφῆς, εἰς τὸν τύπον:

$$1+x = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots,$$

ἤτοι εἰς τὴν ἐκθετικὴν σειράν, ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως ἔκαμε τὴν εἴσοδόν της εἰς τὴν ἐπιστήμην.

434. Τὰ συμπεράσματα αὐτὰ καθὼς καὶ ἄλλα ἀκόμη, ἐξ ἐκείνων ποὺ ἐκτίθενται εἰς τὸ προαναφερθὲν ἔργον, καταχωροῦνται ἐπίσης εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον του, φέρον ὡς τίτλον Methodus fluxionum et serierum infinitarum (Μέθοδος τῶν ροῶν καὶ τῶν ἀπείρων σειρῶν) ἑτοιμασθὲν πρὸς ἐκτύπωσιν ἀπὸ τοῦ 1671, ἀλλὰ παραμεῖναν ἀνέκδοτον μέχρι τοῦ 1736. Τὸ σύγγραμμα εἶχε διδακτικὸν σκοπὸν καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἐκτενέστερον τοῦ προηγουμένου καὶ περιέχει πλοῦτον παραδειγμάτων καὶ ἐνδιαφερόντων προβλημάτων. Ὁ διατρέχων τὸ κείμενον δοκιμάζει αὐτομάτως λύπην διὰ τὴν μεγάλην καθυστέρησιν τῆς δημοσιεύσεώς του, διότι ἂν αὕτη ἐγίνετο ἐπικαίρως θ' ἀπεφεύγοντο αἱ παρεξηγήσεις ποὺ ἔδωσαν λαβὴν εἰς λυπηρὰ ἐπεισόδια καί, ὅπερ σπουδαιότερον, θὰ εἶχεν ἐπιταχυνθῆ ἡ πορεία τῆς ἐξελίξεως τῶν νέων λογισμῶν.

Καὶ εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ὁ Newton ἐκκινεῖ ἀπὸ τὴν ἰδέαν τῆς ἐπεκτάσεως εἰς τὴν ἄλγεβραν τῶν λογιστικῶν μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς. Οὕτω διὰ ν' ἀναπτύξῃ εἰς σειρὰν τὸ πηλίκον:

$$y = \frac{a^2}{b + x},$$

ἐφαρμόζει mutatis mutandis τὸν κανόνα μετατροπῆς εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, καὶ διὰ νὰ λάβῃ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως:

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

χρησιμοποιεῖ μίαν μέθοδον ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Προτιθέμενος ἔπειτα νὰ ὑπολογίσῃ κατὰ προσέγγισιν τὴν ρίζαν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς λαμβάνει ὡς παράδειγμα τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

παράδειγμα παραμεῖναν ἔκτοτε ὡς κλασσικόν. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἐκκινεῖ ἀπὸ τὴν προσεγγιστικὴν τιμὴν $x = 2$ καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ x διὰ τοῦ $y + 2$, εἰς δὲ τὸ ἐξαγόμενον διαγράφει τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις τοῦ y.

Λαμβάνει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μίαν τιμὴν ἀκριβεστέραν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐργάζεται ὁμοίως. Ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος παρέμεινε μέχρι σήμερον εἰς τὴν ἄλγεβραν. Ζητῶν νὰ ἐφαρμόσῃ τὸ ἀνάπτυγμα εἰς σειρὰν τοῦ y συναρτήσει τοῦ x, ὅταν αἱ δύο ποσότητες συνδέονται μεταξύ των δι' ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, κατέληξεν εἰς μίαν ἄλλην μέθοδον, ἡ ὁποία ἐπίσης ἔλαβε μόνιμον θέσιν εἰς τὴν ἄλγεβραν· ἐννοοῦμεν τὸ περίφημον «παραλληλόγραμμον τοῦ Newton».

Αἱ ἀνωτέρω γενικότητες ἐπὶ τῶν ἀναπτυγμάτων εἰς σειρὰς προσφέρουν εἰς τὸν κορυφαῖον μαθηματικὸν τὰ βοηθητικὰ μέσα, τὰ ὁποῖα ἐν συνεχείᾳ θὰ χρησιμοποιήσῃ εἰς τὸ βιβλίον του. Ἀφοῦ ὁρίσῃ πράγματι τὰς ἐννοίας τῆς ροῆς (fluxion) καὶ τῆς ρεούσης (fluent) προβαίνει εἰς σαφῆ διατύπωσιν τῶν δύο θεμελιωδῶν προβλημάτων τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως, ὧν ἕκαστον ἀντίστροφον τοῦ ἄλλου, τουτέστι τῆς εὑρέσεως τῶν ροῶν καὶ τῶν ρεουσῶν (Σ.Μτ.: σήμερον λέγομεν: παραγώγων καὶ παραγουσῶν). Δίδει κανόνας διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου, τὸ ὁποῖον ἀντιστρέφει πρὸς λύσιν τοῦ δευτέρου, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ κάμῃ μνείαν τῶν περιπτώσεων, εἰς τὰς ὁποίας οἱ προκύπτοντες κανόνες ἀστοχοῦν. Εἰς ἀπόδειξιν ὅτι ὑπάρχουν τοιαῦται περιπτώσεις ἀρκοῦν αἱ ἀκόλουθοι σκέψεις: ὅταν ἔχωμεν μίαν σχέσιν τῆς μορφῆς:

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

ἡ ἀνάπτυξις εἰς σειρὰν τοῦ δευτέρου μέλους ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τοῦ y. Ὅταν ὅμως τὸ δεύτερον μέλος ἔχῃ τὴν μορφὴν $f(x,y)$, δὲν προκύπτει σαφῶς ἐκ τῶν διατυπώσεων τοῦ Newton πῶς τὸ αὐτὸ τέχνασμα θὰ ἠδύνατο νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὸν σκοπὸν (καὶ ἂν ἠδύνατο, πᾶσα διαφορικὴ ἐξίσωσις

πρώτης τάξεως θὰ ἦτο βεβαίως ὁλοκληρώσιμος). Ὁ Newton ἐξετάζει ἐπίσης τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἐξισώσεως μεταξὺ ροῶν τριῶν ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ἀποδεικνύων ὅτι εἶχε σαφῆ γνῶσιν τοῦ πῶς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἦτο δυνατὸν ν' ἀποκατασταθοῦν μεταξὺ τῶν ἰδίων μεταβλητῶν μία ἢ περισσότεραι αὐθαίρετοι σχέσεις.

Ὁ Newton προχωρεῖ κατόπιν εἰς ἐφαρμογὰς τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα μέχρι τότε ἐθεωροῦντο θεμελιώδους σημασίας: προσδιορισμὸς τῶν ἀκροτάτων τιμῶν τῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς (χωρὶς ὅμως ἔνδειξιν κριτηρίων διὰ τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα), μέτρον τῆς καμπυλότητος καὶ συναφὴς ὑπολογισμὸς τῶν βελῶν, τετραγωνισμοὶ καὶ εὐθειοποιήσεις. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀποδεικνύει ὅτι, ὅταν λυθοῦν τὰ προαναφερθέντα θεμελιώδη προβλήματα, αὐτομάτως εὑρίσκουν τὴν λύσιν των καὶ ὅλα τ' ἀνωτέρω ζητήματα. Μὴ δυνάμενοι νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἀριθμοῦντες ὅλας τὰς ἰδιαιτέρας περιπτώσεις ποὺ πραγματεύεται, θὰ παρατηρήσωμεν γενικῶς, ὅτι αὗται ἀφοροῦν ὅλας τὰς εἰδικὰς καμπύλας ποὺ ἦσαν γνωσταὶ κατὰ τὸ τελευταῖον τέταρτον τοῦ XVII αἰῶνος. Θὰ ἐξάρωμεν τέλος τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Newton πρῶτος ἠσχολήθη μὲ τὴν ἔρευναν τῶν καμπύλων ἐκείνων, τῶν ὁποίων ὁ τετραγωνισμὸς καὶ ἡ εὐθειοποίησις δύνανται νὰ ἐπιτευχθοῦν στοιχειωδῶς, ὡς καὶ ἐκείνων τῶν ὁποίων ἡ εὐθειοποίησις δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ μέσῳ τόξων γνωστῶν καμπύλων. Ἡ δόξα ὅμως τῆς ὁλοσχεροῦς ἐξονυχίσεως τοῦ ὡραίου τούτου ζητήματος ἐπεφυλάσσετο εἰς τὸν Euler καὶ τοὺς ὀπαδούς.

435. Εἰς καμμίαν ἀπὸ τὰς προαναφερθείσας ἐργασίας δὲν ᾐσθάνθη ὁ Newton τὴν ἀνάγκην εἰσαγωγῆς ἑνὸς συμβολικοῦ συστήματος, ἁρμόζοντος εἰς τὰς νέας μεθόδους ποὺ ἐδημιούργησε. Τὴν ἀνάγκην αὐτὴν ἐξεδήλωσε πράγματι καὶ ἱκανοποίησε τὸ πρῶτον εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον του Tractatus de quadratura curvarum (Πραγματεία περὶ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων), γραφὲν κατὰ τὴν περίοδον 1665 - 1666 (ὡς δηλοῖ ὁ συγγραφεὺς καὶ ὡς συνάγεται ἐκ χειρογράφων ὑφισταμένων μέχρι σήμερον καὶ φερόντων χρονολογίαν 20 Μαΐου 1665) καὶ δημοσιευθὲν τὸ 1704 ὡς παράρτημα εἰς τὴν Ὀ π τ ι κ ή ν. Ἐν προοιμίῳ παρέχεται ἡ δήλωσις, ὅτι ὅλαι αἱ καμπύλαι γεννῶνται ὡς τροχιαὶ κινητοῦ σημείου. Ἐὰν ἡ ταχύτης τούτου ἀναλυθῇ εἰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας ἀναφορᾶς τῆς ὑπ' αὐτοῦ διαγραφομένης καμπύλης, λαμβάνονται αἱ «ροαὶ» τῶν συντεταγμένων τοῦ κινητοῦ σημείου, ἐνῷ ἡ ταχύτης αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν εἶναι ἡ «ροὴ» τοῦ διαγραφομένου τόξου. Ἀντιστρόφως τὸ τόξον εἶναι ἡ «ρέουσα» τῆς ταχύτητος, ἐνῷ αἱ συντεταγμέναι τοῦ πέρατος αὐτοῦ εἶναι αἱ «ρέουσαι» τῶν συντεταγμένων ταύτης.

Αἱ ἐν λόγῳ ἔννοιαι ἀποτελοῦν τὴν βάσιν τῆς «μεθόδου τῶν ροῶν» (Methodus fluxionum), τῆς ὁποίας ὁ Newton δὲν παρέλειψε νὰ ἐπισημάνῃ

τὴν συγγένειαν μὲ τὴν «γεωμετρίαν τῶν ἀδιαιρέτων» καὶ μὲ τὴν «μέθοδον τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων», τὴν ὁποίαν θὰ ἴδωμεν ἐφαρμοζομένην εἰς τὰ Principia (§ 438). Ἡ βάσις τοῦ περιεχομένου τοῦ Tractatus, περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, ἔγκειται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ροῆς τοῦ x^n διὰ x ἀκέραιον καὶ θετικόν. Ἡ ἀντίστοιχος ἔκφρασις λαμβάνεται κατόπιν ὑπολογισμοῦ μέσῳ τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου τῆς τιμῆς τοῦ λόγου :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

καὶ ἀπαλοιφῆς εἰς τὸ ἀποτέλεσμα ὅλων τῶν δυνάμεων τοῦ h. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ Newton εἰσάγει τοὺς συμβολισμούς

$$\dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},\ \ddddot{x},\ldots$$

διὰ νὰ δηλώσῃ τὰς διαδοχικὰς ροὰς τοῦ x καὶ διδάσκει τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς ροῆς τοῦ πρώτου μέλους μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ περισσοτέρας μεταβλητάς· τοιαύτη μέθοδος ἐκτίθεται ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἐπίσης εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Collins ἀπὸ 10 Δεκεμβρίου 1672 ἐπὶ μιᾶς συγκεκριμένης ἐξισώσεως :

$$x^3 - 2x^2y - bx^2 + by^2 - y^3 = 0.$$

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ρητὴ ἀκεραία, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἀποτέλεσμα ἀρκεῖ ἐπανειλημμένη ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ροῆς τοῦ x^n. Ἂν ὅμως ἡ ἐξίσωσις περιέχῃ ἀρρήτους ὅρους, ἡ ἀντίστοιχος διαδικασία γίνεται κατὰ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἔστω

$$z = \sqrt{ax - y^2}$$

ἡ πρὸς παραγώγισιν ἔκφρασις. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$z^2 - ax + y^2 = 0$$

καὶ συνεπῶς :

$$2\,z\dot{z} - a\dot{x} + 2\,\dot{x}y = 0.$$

Ἐπαναφέροντες τὴν τιμὴν τοῦ z λαμβάνομεν :

$$\dot{z} = \frac{a\dot{x} - 2\,y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}},$$

ἤτοι τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Μέσῳ τοιούτων τεχνασμάτων, συνοδευομένων ὑπὸ καταλλήλων ἀλλαγῶν μεταβλητῆς, ὁ Newton ἐπέτυχε νὰ ὑπολογίσῃ μέγαν ἀριθμὸν ὁλοκληρωμάτων συναρτήσεων, τὰ ὁποῖα σήμερον θεωροῦνται ἀναγόμενα εἰς τὴν τάξιν τῶν διωνύμων διαφορικῶν.

Τὰ αὐτὰ μέσα ἐπιτρέπουν τὸν προσδιορισμὸν καμπύλων ἐπιδεκτικῶν

τετραγωνισμοῦ διὰ στοιχειωδῶν μέσων. Πράγματι, τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καμπύλης διδομένου ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$E = \int y \cdot dx \, ,$$

ἂν θέσωμεν :

$$\int y dx = f(x) \, ,$$

ὅπου f(x) ὑποτίθεται ἀκέραιον πολυώνυμον (ἀκόμη καὶ μὴ ρητόν), ἡ ἐξίσωσις $y = \dot{f}(x)$ θὰ παριστᾷ μίαν καμπύλην τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους.

Τὰ πολυάριθμα παραδείγματα ποὺ ἔδωσεν ὁ Newton πρὸς διασάφησιν τῆς ὑποδειχθείσης ὑπ' αὐτοῦ μεθόδου καὶ οἱ ἐκτεταμένοι πίνακες, τοὺς ὁποίους ὁ ἴδιος ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν τῶν ἐπιθυμούντων ν' ἀσχοληθοῦν μὲ παρόμοια ζητήματα, ἀποδεικνύουν τὴν σπουδαιότητα, τὴν ὁποίαν οὗτος δικαίως ἀπέδιδεν εἰς αὐτά, αἱ δὲ λέξεις, μὲ τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ σύγγραμμά του «καὶ μὲ τὰς ἀρχὰς αὐτὰς ἡ ὁδὸς ἀνοίγεται πρὸς σπουδαιοτέρας κατακτήσεις» (et his principiis via ad majora sternitur) ἀποδεικνύουν τὴν πίστιν του εἰς τὴν γονιμότητα τῶν ἐκτιθεμένων μεθόδων.

436. Ὁ τετραγωνισμὸς τῶν καμπύλων ἐξηκολούθησε ν' ἀπασχολῇ τὸν διάσημον μαθηματικὸν καὶ εἰς μερικὰ χειρόγραφα ποὺ ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1712 ὑπὸ τὸν τίτλον Methodus differentialis (Διαφορικὴ μέθοδος) ἐκτίθεται τὸ πρόβλημα τοῦ κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάγονται εἰς καμμίαν ἀπὸ τὰς μορφὰς ποὺ εἶχεν ἐξετάσει προηγουμένως. Τὸ τέχνασμα τὸ ὁποῖον ἐπρότεινε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος :

$$\int f(x) dx$$

συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῆς καμπύλης $y = f(x)$ διὰ μιᾶς παραβολικῆς καμπύλης διερχομένης δι' ἀριθμοῦ τινος σημείων τῆς $y = f(x)$. Ἀνάγεται οὕτω τὸ ζήτημα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν σταθερῶν συντελεστῶν $a_0, a_1, \ldots, a_n$ εἰς μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \, ,$$

ὅταν δίδωνται $n + 1$ τιμαὶ τοῦ y ἀντιστοιχοῦσαι εἰς $n + 1$ δεδομένας τιμὰς τοῦ x. Τὸ ἀποτέλεσμα ἔχει παραμείνει εἰς τὴν ἐπιστήμην ὑπὸ τὸ ὄνομα «τύπος παρεμβολῆς τοῦ Newton»*

Εἰς τὸ αὐτὸ ζήτημα ἀφιερώνει καὶ ἄλλας σελίδας ὑπὸ τὸν τίτλον Regula differentiarum (Κανὼν τῶν διαφορῶν), αἱ ὁποῖαι ἐγράφησαν ἀπὸ τοῦ

---

* Ἐπ' αὐτοῦ τὰ πρῶτα δημοσιεύματα ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Newton εἰς τὸ Λῆμμα 5 τοῦ III Βιβλίου τῶν Principia, τὸ ὁποῖον δικαίως θεωρεῖται ὡς τὸ σπέρμα, ἐξ' οὗ ἀνεβλάστησαν αἱ θεωρίαι τῶν πεπερασμένων διαφορῶν.

1665 μὲ πηγὴν ἐμπνεύσεως ὡρισμένας ἐργασίας τοῦ Briggs. Ἐπ' αὐτῶν ἐδόθησαν προσφάτως εὐρεῖαι πληροφορίαι καὶ ἐν συνεχείᾳ αὗται ἐξεδόθησαν διὰ τοῦ τύπου*.

437. Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ γνωρίσῃ εἰς τὸ σύνολον τὰς συμβολὰς τοῦ Newton εἰς τὴν ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν δὲν δύναται ν' ἀμελήσῃ τὴν ἐπιστημονικήν του ἀλληλογραφίαν, εἰς ἣν ἔκτασιν φυσικὰ ἔχει γίνει γνωστὴ διὰ τοῦ τύπου μέχρι σήμερον. Μεταξὺ τῶν ἐπιστολῶν του ἐξέχουσαν σημασίαν ἔχουν αἱ δύο ἀπευθυνόμεναι πρὸς τὸν Oldenburg ὑπὸ χρονολογίας 13 Ἰουνίου καὶ 24 Αὐγούστου 1676 πρὸς τὸν σκοπὸν ν' ἀνακοινωθοῦν εἰς τὸν Leibniz. Λόγῳ τῆς ἐκτάσεως καὶ τῆς εὐρείας γνωστοποιήσεως τοῦ περιεχομένου των αἱ ἐν λόγῳ ἐπιστολαὶ τοποθετοῦνται εἰς ἐπίπεδον πραγματικῶν καὶ σπουδαίων ἐπιστημονικῶν ἐργασιῶν. Ἡ μία ἔχει ὡς κύριον θέμα τὰς σειράς, ἡ ἄλλη τὰς ροάς. Θὰ θίξωμεν ἐδῶ τὰ οὐσιώδη μόνον σημεῖα.

Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν Πρώτην πρὸς Leibniz ἐπιστολήν.

α) Ἀπαντᾶται κυρίως εἰς αὐτὴν τὸ θεώρημα τοῦ διωνύμου μὲ ἐκθέτας τυχόντας ρητούς, συμπέρασμα μεγίστης ἀξίας, τὸ ὁποῖον ἐπιβεβαιώνει τὴν οἰκειότητα τοῦ ἐφευρέτου μὲ τὴν χρῆσιν κλασματικῶν ἢ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν.

β) Ἀκολουθοῦν δύο πίνακες, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας διδάσκει τὴν πορείαν τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς: $x = 2{,}09455184$ τῆς θετικῆς ρίζης τῆς ἐξισώσεως:

$$y^3 - 2y - 5 = 0,$$

(§ 434), ὁ δὲ ἄλλος τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκ τῆς πεπλεγμένης ἐξισώσεως:

$$y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$$

λαμβάνεται ἡ τιμὴ τοῦ y συναρτήσει τοῦ x μέσῳ μιᾶς σειρᾶς:

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64\,a} + \frac{131\,x^3}{512\,a^2} + \frac{509\,x^4}{16384\,a^3} + \ldots$$

γ) Δίδονται ἀναπτύγματα εἰς σειρὰς τῶν συναρτήσεων τοξ ημ x, τοξ παρημ x, ημx, ἑνὸς ἐλλειπτικοῦ τόξου, ἤτοι τοῦ

$$\int \frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 + bx^2}}\,dx,$$

* Παραπέμπομεν εἰς τὰ ἄρθρα τοῦ Duncan C. Fraser, α) Newton and interpolation, δημοσιευθὲν εἰς τὸν ἀναμνηστικὸν τόμον Isaac Newton 1642 - 1727 (London, 1927) καὶ β) Newton's interpolation formulas εἰς τὸ Νο 292 τῆς «Journal of the Institute of Actuaries», ἔτι δὲ παραπέμπομεν εἰς τὸν τόμον τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, τὸν ἀναφερόμενον εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν τοῦ Κεφαλαίου τούτου.

τοῦ ἐλλειπτικοῦ ἐμβαδοῦ καὶ ἄλλων συναρτήσεων χρησίμων εἰς τὸν λογαριθμικὸν λογισμόν. δ) Δίδεται ὑπὸ μορφὴν σειρᾶς ἡ ἔκφρασις τοῦ ὄγκου ἑνὸς ἐλλειψοειδοῦς.

Ἡ Δευτέρα πρὸς Leibniz ἐπιστολὴ διαπνέεται ὁλόκληρος ἀπὸ αἰσθήματα δυσπιστίας, διότι τ' ἀποτελέσματα ποὺ ἐκτίθενται ἐφαρμόζονται εἰς τὸ πρόβλημα: «Data aeqvatione qvotcvmqve flventes qvantitates involvente, flvxiones invenire et vice versa» (δηλαδή: Δοθείσης τυχούσης ἐξισώσεως μὲ ρεούσας περισσοτέρας, εὑρεῖν τὰς ροὰς καὶ ἀντιστρόφως), τοῦ ὁποίου τὴν ἐκφώνησιν ἐκάλυψεν ὁ Newton ὑπὸ κρυπτογραφικὴν διατύπωσιν, περιλαμβάνουσαν τὸ πλῆθος τῶν εἰς τὴν λατινικὴν ἐκφώνησιν περιεχομένων γραμμάτων ἐξ ἑκάστου εἴδους, ὡς ἑξῆς:

6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12vx *

Εἰς τὴν ἐν λόγῳ ἐπιστολὴν ἀπαντῶνται πολλὰ συμπεράσματα σχετικὰ πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν καμπύλων, λαμβανόμενα σήμερον μέσῳ ὁλοκληρώσεων ρητῶν ἢ ρητολύτων συναρτήσεων. Προχωρῶν ὁ Newton σημειώνει τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ παραβολῆς διερχομένης δι' ἐπαρκοῦς ἀριθμοῦ σημείων (§ 436), διὰ νὰ ἐφαρμόσῃ κατόπιν τὸ ἀποτέλεσμα εἰς τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Τοῦ προσφέρει δὲ τοῦτο τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐξάρῃ τὸ γεγονός, ὅτι αἱ ὑπ' αὐτοῦ ἐπινοηθεῖσαι μέθοδοι ἐπιτρέπουν τὸν ὑπολογισμὸν προσεγγιστικῶν τιμῶν τοῦ π μὲ ταχύτητα συγκλίσεως εἰς τὴν προσέγγισιν πολὺ μεγαλυτέραν τῆς παρεχομένης ἀπὸ τὴν σειρὰν τοῦ Leibniz (§ 445):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Παρασιωπῶντες ἄλλα ζητήματα μικροτέρας σημασίας, θὰ μνημονεύσωμεν ἕνα δεύτερον αἴνιγμα, ἀκόμη πολυπλοκώτερον τοῦ προαναφερθέντος, ἔχον, μετὰ τὴν ἀποκρυπτογράφησιν, τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν: «Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus. Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendaes terminas assumptae seriei»[39].

---

* Ἂς μὴν ἐκπλαγῇ ὁ ἀναγνώστης ἀπὸ τὴν μέθοδον αὐτὴν συνεννοήσεως. Ἀπετέλει συνήθειαν τῆς ἐποχῆς λίαν ἐν χρήσει. Τὴν ἐχρησιμοποίησεν ἤδη ὁ Huygens τὸ 1669, ὅταν ἀνεκάλυψεν ἕνα δορυφόρον τοῦ Κρόνου, ὑπάρχουν δὲ τὰ ἴχνη αὐτῆς καὶ εἰς ἐπιστολὴν τοῦ ἰδίου πρὸς τὸν Leibniz τὴν 26 Μαρτίου 1691. Δὲν εἶναι δὲ αὐτὰ τὰ μόνα παραδείγματα ποὺ θὰ ἠδυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν. Καὶ αὐτὸς ὁ Γαλιλαῖος δὲν ἔκαμε μικρὰν χρῆσιν τῆς μεθόδου.

Τὸ κλειδὶ διὰ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ πρώτου αἰνίγματος ἐδόθη τελικῶς ἀπὸ τὸν Newton (καὶ φυσικὰ μόνον ἐκεῖνος ἦτο δυνατὸν νὰ τὸ δώσῃ!) εἰς ἐπιστολὰς του πρὸς τὸν Wallis ὑπὸ χρονολογίας 27 Αὐγούστου καὶ 17 Σεπτεμβρίου 1692, δημοσιευθείσας ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸν Τόμον II τῶν Ἀπάντων του. Αἱ ἐν λόγῳ ἐπιστολαὶ εἶναι μεγάλης σπουδαιότητος, διότι δι' αὐτῶν ἀπεκαλύφθησαν τὸ πρῶτον εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τοῦ νέου «λογισμοῦ τῶν ροῶν» καὶ πολλαὶ ἐκ τῶν ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐσημειώσαμεν ἤδη εἰς ἄλλα προγενέστερα ἔργα του. Ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδίων μεθόδων ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ Newton εἰς τὴν λύσιν μερικῶν σημαντικῶν ζητημάτων, προταθέντων, ὑπὸ μορφὴν προκλήσεως, ὑπὸ διαφόρων μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του.

Ἡ μέθοδος τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων

438. Πρῶτος καὶ κύριος σκοπὸς εἰς τὸν ὁποῖον ἀποβλέπει τὸ opus magnum τοῦ Newton, δηλαδὴ τὰ περίφημα Principia, εἶναι ν' ἀποδείξῃ ὅτι οἱ διέποντες τὰς κινήσεις τῶν ἄστρων νόμοι τοῦ Kepler ἀντιστοιχοῦν εἰς κινήσεις παραγομένας ὑπὸ ὑλικοῦ σημείου ἑλκομένου ὑπὸ σταθεροῦ ὑλικοῦ κέντρου μὲ δύναμιν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Ἐκ τῶν τριῶν Βιβλίων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ περιεχόμενον, τὸ I ἔχει ὡς θέμα τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἐντὸς μέσων μὴ ἀνθισταμένων, τὸ II ἔχει ὡς θέμα τὸ αὐτό, ἀλλ' ἐντὸς μέσων ἀνθισταμένων, τὸ δὲ III πραγματεύεται τὸ σύστημα τοῦ Κόσμου.

Λεπτομερὴς ἀνάλυσις τοῦ περιεχομένου τῶν Principia εἶναι ξένη πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦ ἔργου μας. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ σχετικαὶ ἔρευναι ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ Newton μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀλγοριθμικῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν ὁ ἴδιος. Ἐκ φόβου ὅμως μήπως διακινδυνεύσῃ τὴν γενικὴν ἀποδοχὴν τῶν συμπερασμάτων του, ἐὰν παρουσίαζεν αὐτὰ ὡς ἐφαρμογὰς μεθόδων ἀγνώστων τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, ἔλαβε τὴν ἀπόφασιν νὰ ἐκθέσῃ τὰς ἀνακαλύψεις του ὑπὸ μορφὴν ἀνταποκρινομένην εἰς τὰ καθαρὰ πρότυπα τῶν μεγάλων γεωμετρῶν τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος. Κατ' ἀκολουθίαν, εἰς τὰ Principia οὐδεμίαν θέσιν καταλαμβάνουν αἱ ροαὶ (ἀκόμη καὶ ἡ λέξις ροὴ μίαν μόνον φορὰν ἀπαντᾶται καὶ ὅλως τυχαίως), αἱ δὲ ἔρευναι, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεισέρχεται τὸ ἄπειρον, διεξάγονται μὲ τὴν «μέθοδον τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων», ἡ ὁποία κατὰ βάθος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν «μέθοδον τῶν ὁρίων» ποὺ γνωρίζομεν καὶ χρησιμοποιοῦμεν σήμερον.

Ἡ «μέθοδος τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων» στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀκολούθου λήμματος: «Δύο ποσότητες, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά, εἰς χρόνον τινὰ πεπερασμένον, γίνεται μικροτέρα πάσης ποσότητος ὁσονδήποτε μικρᾶς, καταντοῦν εἰς τὸ τέλος νὰ γίνουν μεταξύ των ἴσαι».

Τὸ κλειδὶ διὰ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ πρώτου αἰνίγματος ἐδόθη τελικῶς ἀπὸ τὸν Newton (καὶ φυσικὰ μόνον ἐκεῖνος ἦτο δυνατὸν νὰ τὸ δώσῃ!) εἰς ἐπιστολὰς του πρὸς τὸν Wallis ὑπὸ χρονολογίας 27 Αὐγούστου καὶ 17 Σεπτεμβρίου 1692, δημοσιευθείσας ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸν Τόμον II τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν του. Αἱ ἐν λόγῳ ἐπιστολαὶ εἶναι μεγάλης σπουδαιότητος, διότι δι' αὐτῶν ἀπεκαλύφθησαν τὸ πρῶτον εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τοῦ νέου «λογισμοῦ τῶν ροῶν» καὶ πολλαὶ ἐκ τῶν ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐσημειώσαμεν ἤδη εἰς ἄλλα προγενέστερα ἔργα του. Ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδίων μεθόδων ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ Newton εἰς τὴν λύσιν μερικῶν σημαντικῶν ζητημάτων, προταθέντων, ὑπὸ μορφὴν προκλήσεως, ὑπὸ διαφόρων μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του.

Ἡ μέθοδος τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων

438. Πρῶτος καὶ κύριος σκοπὸς εἰς τὸν ὁποῖον ἀποβλέπει τὸ opus magnum τοῦ Newton, δηλαδὴ τὰ περίφημα P r i n c i p i a, εἶναι ν' ἀποδείξῃ ὅτι οἱ διέποντες τὰς κινήσεις τῶν ἄστρων νόμοι τοῦ Kepler ἀντιστοιχοῦν εἰς κινήσεις παραγομένας ὑπὸ ὑλικοῦ σημείου ἑλκομένου ὑπὸ σταθεροῦ ὑλικοῦ κέντρου μὲ δύναμιν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Ἐκ τῶν τριῶν Βιβλίων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ περιεχόμενον, τὸ I ἔχει ὡς θέμα τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἐντὸς μέσων μὴ ἀνθισταμένων, τὸ II ἔχει ὡς θέμα τὸ αὐτό, ἀλλ' ἐντὸς μέσων ἀνθισταμένων, τὸ δὲ III πραγματεύεται τὸ σύστημα τοῦ Κόσμου.

Λεπτομερὴς ἀνάλυσις τοῦ περιεχομένου τῶν Principia εἶναι ξένη πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦ ἔργου μας. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ σχετικαὶ ἔρευναι ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ Newton μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀλγοριθμικῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν ὁ ἴδιος. Ἐκ φόβου ὅμως μήπως διακινδυνεύσῃ τὴν γενικὴν ἀποδοχὴν τῶν συμπερασμάτων του, ἐὰν παρουσίαζεν αὐτὰ ὡς ἐφαρμογὰς μεθόδων ἀγνώστων τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, ἔλαβε τὴν ἀπόφασιν νὰ ἐκθέσῃ τὰς ἀνακαλύψεις του ὑπὸ μορφὴν ἀνταποκρινομένην εἰς τὰ καθαρὰ πρότυπα τῶν μεγάλων γεωμετρῶν τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος. Κατ' ἀκολουθίαν, εἰς τὰ P r i n c i p i a οὐδεμίαν θέσιν καταλαμβάνουν αἱ ροαὶ (ἀκόμη καὶ ἡ λέξις ροὴ μίαν μόνον φορὰν ἀπαντᾶται καὶ ὅλως τυχαίως), αἱ δὲ ἔρευναι, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεισέρχεται τὸ ἄπειρον, διεξάγονται μὲ τὴν «μέθοδον τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων», ἡ ὁποία κατὰ βάθος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν «μέθοδον τῶν ὁρίων» ποὺ γνωρίζομεν καὶ χρησιμοποιοῦμεν σήμερον.

Ἡ «μέθοδος τῶν πρώτων καὶ ἐσχάτων λόγων» στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀκολούθου λ ή μ μ α τ ο ς: «Δύο ποσότητες, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά, εἰς χρόνον τινὰ πεπερασμένον, γίνεται μικροτέρα πάσης ποσότητος ὁσονδήποτε μικρᾶς, καταντοῦν εἰς τὸ τέλος νὰ γίνουν μεταξύ των ἴσαι».

Ἂς σημειωθῇ ὅτι δὲν διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ Newton (καὶ τὸ ἐσημείωσεν ὁ ἴδιος) ἡ ὑφισταμένη κατὰ βάθος συγγένεια μεταξὺ τῆς ὁδοῦ ποὺ ἐχάραξεν ὁ ἴδιος καὶ ἐκείνης ποὺ ἐχάραξεν ὁ Cavalieri μὲ τὴν Γεωμετρίαν τῶν ἀδιαιρέτων.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀφθάστου δεξιότητος, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Newton ἐχειρίζετο μεθόδους ἀπειροστικοῦ χαρακτῆρος, ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὴν ὑπ' αὐτοῦ εὕρεσιν τῆς καμπύλης, ἡ ὁποία διὰ περιστροφῆς παράγει τὸ στερεὸν τὸ παρουσιάζον τὴν μικροτέραν ἀντίστασιν κατὰ τὴν ἐντὸς ρευστοῦ κίνησίν του. Τοιουτοτρόπως, ἔλυσεν ἕνα πρόβλημα ποὺ θεωρεῖται σήμερον ὡς ἀνῆκον εἰς τὸν λογισμὸν τῶν μεταβολῶν. Χωρὶς νὰ μειοῦται ὁ θαυμασμός μας, δὲν δυνάμεθα παρὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύπην μας, διότι ἐκάλυψε μὲ σιωπὴν τὴν πορείαν ποὺ ἠκολούθησε διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα συμπέρασμα τοιαύτης σπουδαιότητος*.

Ἡ θεωρία τῶν κωνικῶν τομῶν εἰς τὰ Principia

439. Τὰ Κεφάλαια IV καὶ V τοῦ Βιβλίου I τῶν Principia ἀνήκουν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων ἐκείνων, τὰς ὁποίας ὁ Kepler ἀνεκάλυψεν ὡς τροχιὰς τῶν ἄστρων τοῦ πλανητικοῦ μας συστήματος, ἀφοῦ ἀσχολοῦνται μὲ τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν μιᾶς κωνικῆς τομῆς πρῶτον (Κεφ. IV) ὅταν δίδωνται αἱ ἑστίαι της καὶ δεύτερον (Κεφ. V) ὅταν δίδεται ἐπαρκὴς ἀριθμὸς σημείων καὶ ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης.

Εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ὁ Newton δέχεται ὅτι τὰ λοιπὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι διαδοχικῶς: I. Τὸ μῆκος a τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος, ἕνα σημεῖον καὶ μία ἐφαπτομένη· ἢ δύο σημεῖα καὶ δύο ἐφαπτόμεναι, μὲ ἐξέτασιν τῆς περιπτώσεως ($a = \infty$), καθ' ἣν ἡ κωνικὴ εἶναι παραβολή. II. Ὁ λόγος τῶν ἀξόνων καὶ ἕνα σημεῖον καὶ μία ἐφαπτομένη· δύο ἐφαπτόμεναι, δύο σημεῖα ἢ τέλος μία ἐφαπτομένη καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ταύτης. III. Τρία στοιχεῖα μεταξὺ σημείων καὶ ἐφαπτομένων.

Εἰς τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν, τὰ δεδομένα εἶναι πέντε μεταξὺ σημείων καὶ ἐφαπτομένων.

Αἱ σχετικαὶ κατασκευαὶ στηρίζονται ἐν μέρει ἐπὶ θεωρημάτων ἀπαντωμένων εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀλλὰ κατὰ ἀρκετὰ μεγαλύτερον μέρος ἐπὶ πρωτοτύπων προτάσεων. Μία ἐξ αὐτῶν διδάσκει τὴν ἀκόλουθον «ὀργανικὴν γένεσιν τῶν κωνικῶν»: «Ἐὰν δύο γωνίαι ab, a'b' σταθεραὶ κατὰ μέγεθος στρέφονται περὶ τὰς κορυφὰς των V καὶ V' οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον

* Μία ἐμπεριστατωμένη κριτικὴ τῆς λύσεως τοῦ Newton ἀπαντᾶται εἰς ἄρθρον τοῦ A.R. Forsyth ὑπὸ τὸν τίτλον Newton's problem of the solid of least resistance, περιληφθὲν εἰς τὸν ἀναμνηστικὸν τόμον, ποὺ μνημονεύεται εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦτο τῆς ἱστορίας μας.

Ἂς σημειωθῇ ὅτι δὲν διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ Newton (καὶ τὸ ἐσημείωσεν ὁ ἴδιος) ἡ ὑφισταμένη κατὰ βάθος συγγένεια μεταξὺ τῆς ὁδοῦ ποὺ ἐχάραξεν ὁ ἴδιος καὶ ἐκείνης ποὺ ἐχάραξεν ὁ Cavalieri μὲ τὴν Γεωμετρίαν τῶν ἀδιαιρέτων.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀφθάστου δεξιότητος, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Newton ἐχειρίζετο μεθόδους ἀπειροστικοῦ χαρακτῆρος, ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὴν ὑπ' αὐτοῦ εὕρεσιν τῆς καμπύλης, ἡ ὁποία διὰ περιστροφῆς παράγει τὸ στερεὸν τὸ παρουσιάζον τὴν μικροτέραν ἀντίστασιν κατὰ τὴν ἐντὸς ρευστοῦ κίνησίν του. Τοιουτοτρόπως, ἔλυσεν ἕνα πρόβλημα ποὺ θεωρεῖται σήμερον ὡς ἀνῆκον εἰς τὸν λογισμὸν τῶν μεταβολῶν. Χωρὶς νὰ μειοῦται ὁ θαυμασμός μας, δὲν δυνάμεθα παρὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύπην μας, διότι ἐκάλυψε μὲ σιωπὴν τὴν πορείαν ποὺ ἠκολούθησε διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα συμπέρασμα τοιαύτης σπουδαιότητος*.

Ἡ θεωρία τῶν κωνικῶν τομῶν εἰς τὰ Principia

439. Τὰ Κεφάλαια IV καὶ V τοῦ Βιβλίου I τῶν Principia ἀνήκουν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων ἐκείνων, τὰς ὁποίας ὁ Kepler ἀνεκάλυψεν ὡς τροχιὰς τῶν ἄστρων τοῦ πλανητικοῦ μας συστήματος, ἀφοῦ ἀσχολοῦνται μὲ τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν μιᾶς κωνικῆς τομῆς πρῶτον (Κεφ. IV) ὅταν δίδωνται αἱ ἑστίαι της καὶ δεύτερον (Κεφ. V) ὅταν δίδεται ἐπαρκὴς ἀριθμὸς σημείων καὶ ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης.

Εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ὁ Newton δέχεται ὅτι τὰ λοιπὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι διαδοχικῶς: I. Τὸ μῆκος a τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος, ἕνα σημεῖον καὶ μία ἐφαπτομένη· ἢ δύο σημεῖα καὶ δύο ἐφαπτόμεναι, μὲ ἐξέτασιν τῆς περιπτώσεως ($a = \infty$), καθ' ἣν ἡ κωνικὴ εἶναι παραβολή. II. Ὁ λόγος τῶν ἀξόνων καὶ ἕνα σημεῖον καὶ μία ἐφαπτομένη· δύο ἐφαπτόμεναι, δύο σημεῖα ἢ τέλος μία ἐφαπτομένη καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ταύτης. III. Τρία στοιχεῖα μεταξὺ σημείων καὶ ἐφαπτομένων.

Εἰς τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν, τὰ δεδομένα εἶναι πέντε μεταξὺ σημείων καὶ ἐφαπτομένων.

Αἱ σχετικαὶ κατασκευαὶ στηρίζονται ἐν μέρει ἐπὶ θεωρημάτων ἀπαντωμένων εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀλλὰ κατὰ ἀρκετὰ μεγαλύτερον μέρος ἐπὶ πρωτοτύπων προτάσεων. Μία ἐξ αὐτῶν διδάσκει τὴν ἀκόλουθον «ὀργανικὴν γένεσιν τῶν κωνικῶν»: «Ἐὰν δύο γωνίαι ab, a'b' σταθεραὶ κατὰ μέγεθος στρέφονται περὶ τὰς κορυφὰς των V καὶ V' οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον

* Μία ἐμπεριστατωμένη κριτικὴ τῆς λύσεως τοῦ Newton ἀπαντᾶται εἰς ἄρθρον τοῦ A.R. Forsyth ὑπὸ τὸν τίτλον Newton's problem of the solid of least resistance, περιληφθὲν εἰς τὸν ἀναμνηστικὸν τόμον, ποὺ μνημονεύεται εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦτο τῆς στορίας μας.

aa' νὰ διαγράφῃ μίαν εὐθεῖαν, τότε τὸ σημεῖον bb' θὰ γράψῃ κωνικὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων V καὶ V'. Ἐὰν ἀντιστρόφως τὸ σημεῖον aa' διαγράφῃ κωνικὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων V, V', τὸ σημεῖον bb' θὰ γράψῃ εὐθεῖαν».

Ἀλλαχοῦ ὁ Newton κατέφυγε, πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν, εἰς ἕνα γεωμετρικὸν μετασχηματισμόν, ὁ ὁποῖος σήμερον ἑρμηνεύεται ὡς εἰδικὴ προβολικότης μεταξὺ δύο ἐπιπέδων. Καὶ διὰ νὰ προσδιορίσῃ μίαν κωνικὴν ὁριζομένην ὑπὸ πέντε ἐφαπτομένων, ἀπεκατέστησε μερικὰ λήμματα, τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν ὁποίων διδάσκει, ὑπὸ εἰδικὰς προϋποθέσεις, τὴν γένεσιν μιᾶς κωνικῆς ὡς περιβαλλούσης τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τ' ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν.

Θεωροῦμεν περιττὸν νὰ ἐξάρωμεν τὴν σημαντικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία ἐσημειώθη διὰ τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν. Παρατηροῦμεν μόνον ὅτι ὁ Newton εἶχε πλήρη συνείδησιν τῆς ἀξίας τῶν σελίδων τούτων τοῦ μεγάλου του ἔργου, διότι, ἀφοῦ ἐξέθεσε τὸν τρόπον κατασκευῆς μιᾶς κωνικῆς διὰ πέντε δοθέντων σημείων, προσθέτει : «Τοιουτοτρόπως ἐδώσαμεν μίαν λύσιν εἰς τὸ περίφημον πρόβλημα τῶν τριῶν ἢ τεσσάρων εὐθειῶν, τοῦ ὁποίου τὴν μελέτην ἤρχισεν ὁ Εὐκλείδης, ἔφερε δὲ εἰς πέρας ὁ Ἀπολλώνιος· λύσιν χωρὶς τὴν μεσολάβησιν λογισμοῦ» (προφανὴς ὑπαινιγμὸς διὰ τὸν Descartes, § 345) «ἀλλὰ διὰ καθαρῶς γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ὅπως ἀκριβῶς ἀπήτουν οἱ ἀρχαῖοι».

Ἀρχὴ τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων

440. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Descartes, ὅπως καὶ εἰς τὰ ὅσα ἔγραψαν οἱ σχολιασταὶ καὶ οἱ ὀπαδοί του, αἱ καμπύλαι τοῦ ἐπιπέδου ἐξετάζονται ἀποκλειστικῶς ὡς βοηθητικὰ μέσα πρὸς λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Θὰ ἴδωμεν τώρα πῶς ὁ Newton ἀπέδειξε πρῶτος, ὅτι αἱ καμπύλαι ἀποτελοῦν γεωμετρικὰς ὀντότητας, αἱ ὁποῖαι βρίθουν ἀξιολόγων ἰδιοτήτων, γράψας τοιουτοτρόπως τὰς πρώτας σελίδας μιᾶς ἐκ τῶν τελειοτέρων καὶ λαμπροτέρων θεωριῶν τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν.

Τὸ ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκθέτει τὰς σχετικὰς ἐρεύνας του, ἔχει τὸν τίτλον : Enumeratio linearum tertii ordinis (Ἀπαρίθμησις τῶν καμπύλων τρίτου βαθμοῦ). Τὸ ἔργον ἤρχισε τὸ 1676, ἐπερατώθη τὸ 1695 καὶ ἐδημοσιεύθη τὸ 1704 ὡς παράρτημα εἰς τὴν Ὀπτικήν. Πρὸ τοῦ Newton αἱ συντεταγμέναι ἐχρησιμοποιοῦντο μόνον πρὸς ἔκθεσιν τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ νεωτεριστικὸν τρόπον. Ὁ Newton προσέφερε τὸ παράδειγμα τῆς μεθοδικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν μελέτην καὶ ταξινόμησιν μιᾶς νέας κατηγορίας γεωμετρικῶν σχημάτων, ἀγνοουμένων προηγουμένως εἰς τὴν γενικότητά των. Πρὸς ἐπιτυχίαν δὲ

aa' νὰ διαγράφῃ μίαν εὐθεῖαν, τότε τὸ σημεῖον bb' θὰ γράψῃ κωνικὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων V καὶ V'. Ἐὰν ἀντιστρόφως τὸ σημεῖον aa' διαγράφῃ κωνικὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων V, V', τὸ σημεῖον bb' θὰ γράψῃ εὐθεῖαν».

Ἀλλαχοῦ ὁ Newton κατέφυγε, πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν, εἰς ἕνα γεωμετρικὸν μετασχηματισμόν, ὁ ὁποῖος σήμερον ἑρμηνεύεται ὡς εἰδικὴ προβολικότης μεταξὺ δύο ἐπιπέδων. Καὶ διὰ νὰ προσδιορίσῃ μίαν κωνικὴν ὁριζομένην ὑπὸ πέντε ἐφαπτομένων, ἀπεκατέστησε μερικὰ λήμματα, τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν ὁποίων διδάσκει, ὑπὸ εἰδικὰς προϋποθέσεις, τὴν γένεσιν μιᾶς κωνικῆς ὡς περιβαλλούσης τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τ' ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν.

Θεωροῦμεν περιττὸν νὰ ἐξάρωμεν τὴν σημαντικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία ἐσημειώθη διὰ τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν. Παρατηροῦμεν μόνον ὅτι ὁ Newton εἶχε πλήρη συνείδησιν τῆς ἀξίας τῶν σελίδων τούτων τοῦ μεγάλου του ἔργου, διότι, ἀφοῦ ἐξέθεσε τὸν τρόπον κατασκευῆς μιᾶς κωνικῆς διὰ πέντε δοθέντων σημείων, προσθέτει: «Τοιουτοτρόπως ἐδώσαμεν μίαν λύσιν εἰς τὸ περίφημον πρόβλημα τῶν τριῶν ἢ τεσσάρων εὐθειῶν, τοῦ ὁποίου τὴν μελέτην ἤρχισεν ὁ Εὐκλείδης, ἔφερε δὲ εἰς πέρας ὁ Ἀπολλώνιος· λύσιν χωρὶς τὴν μεσολάβησιν λογισμοῦ» (προφανὴς ὑπαινιγμὸς διὰ τὸν Descartes, § 345) «ἀλλὰ διὰ καθαρῶς γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ὅπως ἀκριβῶς ἀπήτουν οἱ ἀρχαῖοι».

Ἀρχὴ τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων

440. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Descartes, ὅπως καὶ εἰς τὰ ὅσα ἔγραψαν οἱ σχολιασταὶ καὶ οἱ ὀπαδοί του, αἱ καμπύλαι τοῦ ἐπιπέδου ἐξετάζονται ἀποκλειστικῶς ὡς βοηθητικὰ μέσα πρὸς λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Θὰ ἴδωμεν τώρα πῶς ὁ Newton ἀπέδειξε πρῶτος, ὅτι αἱ καμπύλαι ἀποτελοῦν γεωμετρικὰς ὀντότητας, αἱ ὁποῖαι βρίθουν ἀξιολόγων ἰδιοτήτων, γράψας τοιουτοτρόπως τὰς πρώτας σελίδας μιᾶς ἐκ τῶν τελειοτέρων καὶ λαμπροτέρων θεωριῶν τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν.

Τὸ ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκθέτει τὰς σχετικὰς ἐρεύνας του, ἔχει τὸν τίτλον: Enumeratio linearum tertii ordinis (Ἀπαρίθμησις τῶν καμπύλων τρίτου βαθμοῦ). Τὸ ἔργον ἤρχισε τὸ 1676, ἐπερατώθη τὸ 1695 καὶ ἐδημοσιεύθη τὸ 1704 ὡς παράρτημα εἰς τὴν Ὀπτικήν. Πρὸ τοῦ Newton αἱ συντεταγμέναι ἐχρησιμοποιοῦντο μόνον πρὸς ἔκθεσιν τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ νεωτεριστικὸν τρόπον. Ὁ Newton προσέφερε τὸ παράδειγμα τῆς μεθοδικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν μελέτην καὶ ταξινόμησιν μιᾶς νέας κατηγορίας γεωμετρικῶν σχημάτων, ἀγνοουμένων προηγουμένως εἰς τὴν γενικότητά των. Πρὸς ἐπιτυχίαν δὲ

τοῦ σκοποῦ του, κατέφυγεν εἰς τὸ γόνιμον τέχνασμα τῆς ἀναγωγῆς τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τῶν θεωρουμένων καμπύλων εἰς μερικὰς τυπικὰς μορφάς, μέσῳ καταλλήλων ἀλλαγῶν συντεταγμένων.

Ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ Κεφαλαίου I τοῦ ἔργου του, προκύπτει ὅτι ἐθεώρει προφανὲς ἢ γνωστὸν ἤδη τὸ γεγονός, ὅτι ὁ βαθμὸς μιᾶς ἐξισώσεως εἰς x, y ἀποτελεῖ ἀ ν α λ λ ο ί ω τ ο ν κατὰ τὰς ἀλλαγὰς τῶν συντεταγμένων. Ἐκ τούτου ἀπορρέει ἡ ἔννοια τοῦ β α θ μ ο ῦ ἢ τῆς τ ά ξ ε ω ς (ordre) μιᾶς ἀλγεβρικῆς καμπύλης καὶ ἡ ἰδέα τῆς ταξινομήσεως ὅλων τῶν μὴ ὑπερβατικῶν καμπύλων τοῦ ἐπιπέδου μὲ βάσιν τὴν ἔννοιαν αὐτήν.

Μεγαλυτέρου ἐνδιαφέροντος εἶναι τὸ Κεφάλαιον II, διότι εἰς αὐτὸ ὁ Newton κατορθώνει νὰ ἐπεκτείνῃ εἰς ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς καμπύλας τοῦ ἐπιπέδου μερικὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν κωνικῶν, διατυπώσας τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

α) Δοθείσης μιᾶς ἐπιπέδου ἀλγεβρικῆς καμπύλης διατεμνομένης ὑπὸ δέσμης παραλλήλων χορδῶν, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τούτων εἶναι εὐθεῖα (καλουμένη δ ι ά μ ε τ ρ ο ς).

β) Ἐὰν μία ἀλγεβρικὴ καμπύλη ἔχῃ πλῆθος ἀσυμπτώτων ἴσον πρὸς τὴν τάξιν αὐτῆς, πᾶσα διατέμνουσα καθορίζει ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων δύο σύνολα σημείων τοῦ αὐτοῦ πλήθους ἔχοντα κοινὸν κέντρον.

γ) Ἐὰν ἔκ τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἀλγεβρικῆς καμπύλης ἀχθοῦν δύο διατέμνουσαι παραλλήλως πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας, τὰ γινόμενα τῶν τμημάτων ἑκάστης διατεμνούσης ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς καμπύλης ἔχουν μεταξύ των λόγον ἀποκλειστικῶς ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου.

441. Εἰς τὸ Κεφάλαιον III ὁ Newton ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς κωνικῆς δύναται πάντοτε ν' ἀναχθῇ εἰς μίαν μορφὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ δεύτερον μέλος της νὰ εἶναι:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ἐνῷ τὸ πρῶτον δύναται νὰ ἔχῃ μίαν τῶν ἀκολούθων ἐκφράσεων:

$$xy^2 + cy, \quad xy, \quad y^2, \quad y.$$

Ἰδιαιτέραν δὲ σπουδαιότητα ἔχουν αἱ καμπύλαι:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

αἱ καλούμεναι «ἀποκλίνουσαι παραβολαί», διότι ἀναφορικῶς πρὸς αὐτὰς ἀνεκάλυψε τὸ ἀκόλουθον θεμελιῶδες θεώρημα: «Ὅπως ὅλαι αἱ κωνικαὶ δύνανται νὰ ληφθοῦν διὰ προβολῶν (per umbras) ἐκ τοῦ κύκλου, αὗται

καὶ πᾶσαι αἱ κυβικαὶ καμπύλαι τοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ ληφθοῦν διὰ προβολῆς μιᾶς ἐκ τῶν ἀποκλινουσῶν παραβολῶν».

Μολονότι ὁ Newton δὲν ἀποδεικνύει τὸ ὡραῖον αὐτὸ συμπέρασμα, δὲν πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρίσκετο εἰς ἀδυναμίαν νὰ τὸ κάμῃ, διότι ἔχει ἤδη διδάξει εἰς τὸ ἔργον του Arithmetica Universalis (§ 442) πῶς προσδιορίζεται ἡ ἐξίσωσις μιᾶς τομῆς παραγομένης ἐπὶ κώνου ἢ ἑνὸς ἐκ περιστροφῆς ὑπερβολοειδοῦς ὑπό τινος ἐπιπέδου. Μὲ τὸ θεώρημα αὐτὸ ἔφερεν εἰς φῶς τὴν ἀλήθειαν, ὅτι ἡ προβολὴ ἀποτελεῖ μέθοδον ἀνακαλύψεως πολὺ γονιμωτέραν τῆς εἰς τὰ ἔργα τῶν Desargues καὶ Pascal ἀπαντωμένης (Κεφ. XXV).

Ὁ Newton δὲν ἐσταμάτησεν εἰς τὴν προαναφερθεῖσαν κατάταξιν τῶν κυβικῶν καμπύλων τοῦ ἐπιπέδου εἰς πέντε ὁμάδας, ἀλλὰ τὰς ὑποδιήρεσεν εἰς 72 τάξεις, εἰσηγούμενος μάλιστα καὶ κατάλληλον ὀνοματολογίαν*.

Εἰς τὴν μελέτην οἱουδήποτε γεωμετρικοῦ σχήματος, τὸ ζήτημα τῆς γενέσεώς του δὲν ἔχει σημασίαν μικροτέραν τῆς ταξινομήσεως· διὰ τοῦτο ὁ Newton ἐστράφη πρὸς αὐτό, ἀφοῦ πρῶτον ὑπέμνησε τὴν ὀργανικὴν γένεσιν τῶν κωνικῶν τομῶν, τὴν ὁποίαν συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τὰ Principia (§ 439). Προκειμένου νὰ κάμῃ γενίκευσιν αὐτῆς ἐκκινεῖ πάλιν ἀπὸ δύο γωνίας ab, a′b′, σταθεροῦ μεγέθους, μὲ κορυφὰς V, V′ σταθερὰς καὶ εὑρίσκει ὅτι, ἂν τὸ σημεῖον aa′ διαγράφῃ κωνικὴν διερχομένην διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν V, V′, τὸ σημεῖον bb′ θὰ διαγράψῃ μίαν καμπύλην τρίτου ἢ τετάρτου βαθμοῦ, τὴν μίαν μὲ ἕνα, τὴν ἄλλην μὲ τρία διπλᾶ σημεῖα.

Ἐκ τούτου συνάγει ὁ Newton τὴν κατασκευὴν μιᾶς κυβικῆς (ρητῆς) καμπύλης διὰ ἑπτὰ δεδομένων σημείων. Προσθέτει δὲ ὅτι ἐντελῶς ἀναλόγως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλας καμπύλας ὑψηλοτέρου βαθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ εἶναι προικισμέναι μὲ ἰδιάζοντα σημεῖα, ὀρθῶς παρατηρῶν, ὅτι πολὺ δυσχερέστερον εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς μιᾶς καμπύλης ἐστερημένης διπλῶν σημείων.

Τέλος, ὁ κορυφαῖος ἐπιστήμων, παρεμβάλλων εἰς τὴν μονογραφίαν του ἕνα Κεφάλαιον ἀφιερωμένον εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων τῶν βαθμῶν 9—12, μέσῳ καμπύλων τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ, συνεπλήρωσεν ἐπὶ τὸ τελειότερον μερικὰς σελίδας τῆς Γεωμετρίας τοῦ Descartes. Εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτὸ ὁ Newton ἐφαρμόζει τὴν ἔννοιαν τοῦ «ὑπερβολισμοῦ», ποὺ εἶχεν εἰσαγάγει προηγουμένως· π.χ. ἡ καμπύλη :

$$x \cdot xy = 1$$

* Ἡ λέξις π.χ. cuspida (λογχοειδής) εἶναι ἀκόμη ἐν χρήσει. Ἡ περίφρασις ὅμως «quae conjugatam habet ovalem infinite parvam, id est punctum», τὴν ὁποίαν μετεχειρίζετο διὰ νὰ δηλώσῃ καμπύλην ἔχουσαν σημεῖον μεμονωμένον, ἔχει ἐξαφανισθῆ ὡς ὑπὲρ τὸ δέον μακρά.

ἀποτελεῖ ἕνα «ὑπερβολισμὸν» τῆς καμπύλης

$$xy = 1$$

Διὰ νὰ δείξωμεν πῶς ἡ ἔννοια αὐτὴ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ λύσῃ γραφικῶς μίαν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν, ἃς θεωρήσωμεν, ὅπως ἔκαμε καὶ ὁ Newton, τὴν ἐξίσωσιν:

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0. \qquad (1)$$

Διαιροῦντες αὐτὴν διὰ x^6 λαμβάνομεν:

$$\frac{a}{x^6} + \frac{c}{x^4} + \frac{dx}{x^4} + \frac{e}{x^2} + \frac{fx}{x^2} + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0. \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τώρα τὸν «ὑπερβολισμόν», τουτέστι γράφοντες y εἰς τὴν θέσιν τοῦ $1/x^2$, λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0. \qquad (3)$$

Τοιουτοτρόπως ἐφθάσαμεν εἰς μίαν κυβικὴν καμπύλην, ἡ ὁποία τεμνομένη ὑπὸ τῆς

$$x^2y = 1 \qquad (4)$$

παρέχει τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1) ὡς τετμημένας τῶν σημείων ἀλληλοτομίας τῶν δύο καμπύλων.

Ἡ μεγάλη σπουδαιότης τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Newton ἀνεγνωρίσθη εὐθὺς ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεώς του, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ μίαν ἀνάλυσιν δημοσιευθεῖσαν τὸν Ἰανουάριον 1705 εἰς τὰ Acta Eruditorum· τὸ ἄρθρον δὲν φέρει καμμίαν ὑπογραφήν, εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι ἀνήκει εἰς τὸν Leibniz.

«Arithmetica Universalis»

442. Ἐκ τῆς δράσεως τοῦ Newton ὡς διδασκάλου κατέχομεν δύο τεκμήρια· τὰ μαθήματά του τῆς Ὀπτικῆς, τὰ ὁποῖα δὲν εἰσέρχονται εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς ἱστορίας μας, καὶ τὸ ἔργον του Arithmetica Universalis (Γενικὴ ἀριθμητική), τὸ ὁποῖον ἀντιθέτως ἀπαιτεῖ ἐκ μέρους μας λεπτομερῆ ἀνάλυσιν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν πρόκειται περὶ ἔργου, τὸ ὁποῖον ἔγραψεν ὁ ἴδιος, ἀλλὰ κάποιος μαθητής του καὶ τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη τὸ 1707 ὑπὸ τοῦ διαδόχου του εἰς τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τοῦ Πανεπιστημίου, χωρὶς μάλιστα νὰ γνωρίζωμεν, ἂν τοῦτο ἐγένετο μὲ τὴν συγκατάθεσιν τοῦ ἰδίου τοῦ Newton.

Τὸ γεγονὸς ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διακεκριμένα μέρη, ἕνα προωρισμένον κυρίως εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν μεθόδων ἀλγεβρικῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ ἄλλο ἀφιερωμένον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν

ἀποτελεῖ ἕνα «ὑπερβολισμὸν» τῆς καμπύλης

$$xy = 1$$

Διὰ νὰ δείξωμεν πῶς ἡ ἔννοια αὐτὴ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ λύσῃ γραφικῶς μίαν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν, ἄς θεωρήσωμεν, ὅπως ἔκαμε καὶ ὁ Newton, τὴν ἐξίσωσιν:

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0. \qquad (1)$$

Διαιροῦντες αὐτὴν διὰ x^6 λαμβάνομεν:

$$\frac{a}{x^6} + \frac{c}{x^4} + \frac{dx}{x^4} + \frac{e}{x^2} + \frac{fx}{x^2} + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0. \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τώρα τὸν «ὑπερβολισμόν», τουτέστι γράφοντες y εἰς τὴν θέσιν τοῦ $1/x^2$, λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0. \qquad (3)$$

Τοιουτοτρόπως ἐφθάσαμεν εἰς μίαν κυβικὴν καμπύλην, ἡ ὁποία τεμνομένη ὑπὸ τῆς

$$x^2y = 1 \qquad (4)$$

παρέχει τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1) ὡς τετμημένας τῶν σημείων ἀλληλοτομίας τῶν δύο καμπύλων.

Ἡ μεγάλη σπουδαιότης τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Newton ἀνεγνωρίσθη εὐθὺς ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεώς του, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ μίαν ἀνάλυσιν δημοσιευθεῖσαν τὸν Ἰανουάριον 1705 εἰς τὰ Acta Eruditorum· τὸ ἄρθρον δὲν φέρει καμμίαν ὑπογραφήν, εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι ἀνήκει εἰς τὸν Leibniz.

«Arithmetica Universalis»

442. Ἐκ τῆς δράσεως τοῦ Newton ὡς διδασκάλου κατέχομεν δύο τεκμήρια· τὰ μαθήματά του τῆς Ὀ π τ ι κ ῆ ς, τὰ ὁποῖα δὲν εἰσέρχονται εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς ἱστορίας μας, καὶ τὸ ἔργον του Arithmetica Universalis (Γενικὴ ἀριθμητική), τὸ ὁποῖον ἀντιθέτως ἀπαιτεῖ ἐκ μέρους μας λεπτομερῆ ἀνάλυσιν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν πρόκειται περὶ ἔργου, τὸ ὁποῖον ἔγραψεν ὁ ἴδιος, ἀλλὰ κάποιος μαθητής του καὶ τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη τὸ 1707 ὑπὸ τοῦ διαδόχου του εἰς τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τοῦ Πανεπιστημίου, χωρὶς μάλιστα νὰ γνωρίζωμεν, ἂν τοῦτο ἐγένετο μὲ τὴν συγκατάθεσιν τοῦ ἰδίου τοῦ Newton.

Τὸ γεγονὸς ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διακεκριμένα μέρη, ἕνα προωρισμένον κυρίως εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν μεθόδων ἀλγεβρικῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ ἄλλο ἀφιερωμένον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν

ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, προδίδει μίαν ἐξάρτησιν, μὴ ὁμολογουμένην ἀλλὰ προφανῆ, ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Descartes, ἔργον γνωστὸν πλέον εἰς πάντας καὶ πιθανῶς εὑρισκόμενον συνεχῶς ὑπὸ τὰ ὄμματα τῶν μαθητῶν πρὸς τοὺς ὁποίους ἀπηυθύνετο ὁ μέγας διδάσκαλος.

Χάριν αὐτῶν προπάντων παρέχει μίαν σύντομον ἔκθεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, τόσον μὲ ἀριθμοὺς ὅσον καὶ μὲ γράμματα, χρησιμοποιῶν συμβολικὸν σύστημα ὄχι διάφορον τοῦ καρτεσιανοῦ, ἀλλὰ τελειότερον ὡς πρὸς τὴν σταθερὰν χρῆσιν ἐκθετῶν. Ἡ ἐν λόγῳ ἔκθεσις φθάνει τὴν ὑψηλοτέραν βαθμίδα της μὲ τὴν ἀνάλυσιν τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενον ρητῶν παραγόντων.

Μεταβαίνων κατόπιν εἰς τὴν μελέτην τῶν ἐξισώσεων, ὁ συγγραφεὺς συνοψίζει εἰς ἑπτὰ κανόνας τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι δύνανται καὶ ὀφείλουν νὰ ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων προτοῦ ἐπιχειρηθῇ ἡ λύσις των. Δὲν λείπουν σελίδες ἀφιερωμέναι εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους, εἰδικῶς μάλιστα σχετικαὶ πρὸς τὴν πρᾶξιν ποὺ ὀνομάζομεν σήμερον «ἀπαλοιφήν», ἡ ὁποία εἶχεν ἀπασχολήσει καὶ τὸν Fermat (§ 357). Σχετικῶς ὁ Newton παρατηρεῖ ὅτι αὕτη ἐκτελεῖται εὐκόλως μέσῳ ἀντικαταστάσεων, ὅταν ἕνας ἐκ τῶν ἀγνώστων εἰσέρχεται γραμμικῶς εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ ἀκόμη ὅταν, διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ τούτων, δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ εἴδους τούτου. Μὲ τοιούτου εἴδους τεχνάσματα ἐπέτυχε πρῶτος νὰ δώσῃ τ' ἀποτελέσματα τῶν ἀπαλοιφῶν μεταξὺ δύο ἐξισώσεων μὲ βαθμοὺς 2 καὶ 2, 3 καὶ 2, 4 καὶ 2, 3 καὶ 3.

Αἱ διδακτικοῦ χαρακτῆρος γενικότητες ἐφαρμόζονται εἰς 61 προβλήματα πλήρως λελυμένα. Εἶναι δὲ τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα τοιαύτης ποικιλίας καὶ κομψότητος, ὥστε δὲν θὰ ἦτο δύσκολον νὰ ὑποκύψωμεν εἰς τὸν πειρασμὸν τῆς ἀντιγραφῆς τῶν ἐκφωνήσεων. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο ποιοῦντες, θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας μίαν ἐπαρκῆ ἰδέαν τῆς ἐκλεπτυσμένης διδακτικῆς μαεστρίας τοῦ συγγραφέως. Ἄλλοτε ἐφαρμόζει πιστῶς τοὺς γενικοὺς κανόνας, ἄλλοτε ὅμως διανοίγει νέους δρόμους, ἐνίοτε περιορίζεται εἰς μίαν λύσιν τοῦ προβλήματος, ποὺ ἐξετάζει, ἄλλοτε ὅμως διδάσκει περισσοτέρας καὶ ὅταν λύῃ ἀλγεβρικῶς ἕνα πρόβλημα δὲν παραλείπει νὰ δώσῃ γεωμετρικὴν κατασκευὴν ἀπορρέουσαν ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος.

Μερικὰ ἐκ τῶν ἐξεταζομένων προβλημάτων ἔχουν χαρακτῆρα ἀριθμητικόν, πολλὰ ὅμως εἶναι τὰ ἀναγόμενα εἰς «νεύσεις» (Τόμος Ι, § 45) καὶ ἀποσκοποῦν εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίων ἢ μὴ τριγώνων καὶ ἄλλων σχημάτων, ἐνίοτε δὲ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν συμπερασμάτων γενικοῦ ἐνδιαφέροντος. Μεταξὺ τῶν ἀπαντωμένων προβλημάτων γεωμετρικῶν τόπων σημειώνομεν ἐκεῖνο ποὺ ὁδηγεῖ εἰς τὸν γνωστότατον «ἀπολλώνειον κύκλον», τὸ πρόβλημα τῶν 3 ἢ 4 εὐθειῶν καὶ τὴν ὀργανικὴν γένεσιν τῶν

κωνικῶν τομῶν, τῶν ὁποίων μερικαὶ κατασκευαὶ περιελήφθησαν ἤδη, ὡς εἴδομεν, καὶ εἰς τὰ Principia.

Εἰδικώτερον, εἰς τὸν κύκλον ἀναφέρονται πολλὰ ἐκ τῶν προβλημάτων ἐπαφῆς, τὰ ὁποῖα ἔλυσεν ὁ Viète εἰς τὸ ἔργον του Apollonius Gallus (§ 265). Μεγαλυτέραν καινοτομίαν παρουσιάζει μία μέθοδος κατασκευῆς τῆς κισσοειδοῦς τοῦ Διοκλέους (Τόμος I, § 53) μὲ τὴν κίνησιν ἑνὸς γνώμονος (ὀρθογωνίου τριγώνου), ὁ ὁποῖος ἐπιτρέπει νὰ γράψωμεν τὴν καμπύλην διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Ἄξια μνείας εἶναι ἐπίσης μερικὰ προβλήματα μηχανικῆς καὶ ὀπτικῆς, μάλιστα δὲ τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ μιᾶς κομητικῆς τροχιᾶς μέσῳ τριῶν ἢ τεσσάρων παρατηρήσεων, δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ εἰσέλθωμεν ἐδῶ εἰς λεπτομερείας.

443. Προχωροῦντες εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ νευτωνείου κειμένου, διαπιστοῦμεν μίαν ἀνύψωσιν τῆς γενικῆς στάθμης, ἐκ τοῦ λόγου ὅτι εἰσέρχεται εἰς τὴν ἔρευναν γενικῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Ὁ κορυφαῖος ἐπιστήμων ἐξηγεῖ προπάντων, ἐπικαλούμενος γεωμετρικὰ σχήματα, τὴν πολλαπλότητα τῶν ριζῶν καὶ τὴν παρουσίαν φανταστικῶν ριζῶν, καταλήγων εἰς τὴν διαβεβαίωσιν, ὅτι μία ἐξίσωσις βαθμοῦ n δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ρίζας περισσοτέρας τοῦ ἀριθμοῦ n. Χωρὶς νὰ ἀναφέρῃ τὸν Descartes, διδάσκει τὸν κανόνα εὑρέσεως τοῦ πλήθους τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν π α ρ α λ λ α γ ῶ ν (variences) καὶ τῶν τ η ρ ή σ ε ω ν (permanences) τὰς ὁποίας παρουσιάζουν οἱ διαδοχικοὶ ὅροι αὐτῆς. Ἐπειδὴ ὅμως, ὡς εἶναι γνωστόν, ἡ μέθοδος δὲν ἄγει εἰς ἀποτελέσματα ἀσφαλῆ ὅταν ὑπάρχουν ρίζαι φανταστικαί, ὁ Newton ἐπινοεῖ ἄλλον κανόνα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκρίβεια συγχωρεῖ τὴν περιπλοκότητα· τοῦ ἐν λόγῳ κανόνος ἐδόθη ἀπόδειξις μετὰ πάροδον δύο αἰώνων *.

Ἀκολουθοῦν: ὁ μετασχηματισμὸς τῶν ἐξισώσεων εἰς τὰς κλασσικὰς περιπτώσεις, αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν καὶ — μόνον κατ' ἐκφώνησιν — αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀθροισμάτων ὁμοίων δυνάμεων τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν (εἰς τὴν ἀνακάλυψιν αὐτὴν εἶχε προηγηθῆ ὁ Girard, ὡς εἴδομεν ἤδη ἐν § 328). Ἐκ τῶν προκυπτόντων τύπων συνάγει κανόνας προσδιορισμοῦ τῶν ὁρίων διὰ τὰς ρίζας ἀριθμητικῆς ἐξισώσεως· τελευταῖαι ἀναφέρονται αἱ μέθοδοι λύσεως τῶν ἐξισώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ.

Τὸ τελευταῖον μέρος τῆς Arithmetica Universalis πραγματεύεται τὴν γραφικὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, θέμα τὸ ὁποῖον, ὅπως γνωρί-

---

* Ἐκφώνησις καὶ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος, ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ Newton, εὑρίσκονται εἰς ἕνα βιβλίον εὐρύτατα διαδεδομένον εἰς τὴν Ἰταλίαν, κατὰ μετάφρασιν τοῦ G. Battaglini ὑπὸ τὸν τίτλον: Teoria delle equazioni del Todhunter (Δευτέρα ἔκδοσις, Νεάπολις 1875, σ. 218 - 231).

ζομεν, εὑρίσκετο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰς τὸ κέντρον τοῦ γενικοῦ ἐνδιαφέροντος. Ἐπὶ τοῦ θέματος ὅμως αὐτοῦ ὁ Newton ἔλαβε θέσιν ἐντελῶς διάφορον τῆς υἱοθετηθείσης ὑπὸ τῶν ἀρχαίων προδρόμων του. Ἐνῷ ἐκεῖνοι ἐθεώρουν ἀποδεκτὴν μίαν κατασκευὴν τοῦ εἴδους τούτου μόνον ὅταν εἰσήρχοντο εἰς τὴν λύσιν καμπύλαι τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ, ὁ Newton ἐπέμεινε νὰ δίδῃ προτίμησιν εἰς καμπύλας δυναμένας νὰ χαραχθοῦν μὲ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν εὐκολίαν, συνεπὴς πρὸς τὴν πεποίθησίν του ὅτι μία γεωμετρικὴ θεωρία εἶναι κομψὴ μόνον ὅταν εἶναι ἁπλῆ καὶ ὅτι μία κατασκευὴ ἔχει ἀξίαν μόνον ὅταν εἶναι χρήσιμος. Ἐγένετο λοιπὸν ὑπέρμαχος τῆς ἰδέας ὅτι εἰς τὴν γεωμετρίαν, πλησίον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἔπρεπε νὰ γίνῃ δεκτὴ καὶ ἡ κογχοειδὴς τοῦ Νικομήδους (Τόμος Ι, § 53), τῆς ὁποίας τυγχάνει γνωστὴ ἡ εὐκολία τῆς χαράξεως καὶ ἡ δυνατότης ἀνέτου ἐφαρμογῆς της εἰς προβλήματα νεύσεως μεταξὺ εὐθείας καὶ καμπύλης *.

Εἰς ὑποστήριξιν τῆς θέσεώς του ἐκθέτει νέας λύσεις προβλημάτων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ, ἐπὶ τῇ βάσει ἀκριβῶς τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς, διατρίβων μάλιστα ἰδιαιτέρως ἐπὶ τοῦ δηλίου προβλήματος καὶ ἐκείνου τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας. Δὲν πρέπει νὰ παρασιωπηθῇ ἡ συμπλήρωσις, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ τοῦ πρώτου προβλήματος, χρησιμοποιῶν τὴν προαναφερθεῖσαν (§ 442) γένεσιν τῆς κισσοειδοῦς διὰ συνεχοῦς κινήσεως, οὔτε ἡ λύσις τῶν προβλημάτων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ διὰ τῆς χρήσεως μόνον εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι ἔχει ἤδη μονίμως χαραχθῆ εἰς τὸ ἐπίπεδον μία πλήρης κωνική.

Μολονότι δὲν τρέφομεν τὴν αὐταπάτην ὅτι, μὲ ὅσα ἐλέχθησαν, ἐξηντλήσαμεν ὅλα τὰ ἐνδιαφέροντα καὶ σπουδαῖα πράγματα, ποὺ περιέχονται εἰς τὸ ἐν λόγῳ μνημειῶδες κείμενον, φρονοῦμεν ὅτι καὶ μόνον ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Newton, ἀκόμη καὶ κατὰ τὸν χειρισμὸν θεμάτων οὐχὶ νέων, ἐγνώριζε ν' ἀποθέτῃ ἐπ' αὐτῶν νέον φῶς μὲ σπουδαίας πρωτοτύπους ἀπόψεις, προσφέρων τοιουτοτρόπως νέαν φαεινὴν ἐπιβεβαίωσιν τῆς γνώμης, ὅτι δὲν ὑφίσταται πεδίον τοῦ ἐπιστητοῦ, ὅσον δήποτε καλλιεργημένον, ποὺ νὰ μὴ δύναται ν' ἀνταμείψῃ τοὺς κόπους ἐκείνου, ὁ ὁποῖος τὸ καλλιεργεῖ μὲ μεθόδους ποὺ τοῦ ὑπαγορεύει ἡ μεγαλοφυΐα.

---

* Εἴπομεν ἤδη (§ 255) ὅτι ὁ Viète ὑπεστήριξεν ἐπίσης τὴν σκοπιμότητα τῆς ἀποδοχῆς τῆς νεύσεως ὡς νομίμου γεωμετρικῆς πράξεως.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ: LEIBNIZ

Βιογραφία

444. Ὁ Gottfried Wilhelm von Leibniz ἐγεννήθη εἰς Λειψίαν τὴν 1ην Ἰουλίου (κατὰ τὸ παλαιὸν ἡμερολόγιον 21 Ἰουνίου) 1646 εἰς περιβάλλον κατ' ἐξοχὴν ἀκαδημαϊκὸν καὶ νομικόν, ἀφοῦ ὁ πατήρ του, κατὰ τὴν τελευταίαν περίοδον τῆς ζωῆς του (1640 - 1652), διετέλεσε καθηγητὴς τῆς ἠθικῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Λειψίας, ὁ δ' ἐκ μητρὸς πάππος του ὑπῆρξε καθηγητὴς τοῦ δικαίου εἰς τὸ αὐτὸ Πανεπιστήμιον. Δὲν ἦτο ἀκόμη ἡλικίας 6 ἐτῶν, ὅταν ἔχασε τὸν πατέρα του· καὶ δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι εἰς τὴν τρυφερὰν αὐτὴν ἡλικίαν ἀνέλαβεν ὁ ἴδιος τὴν πρωτοβουλίαν τῆς κατευθύνσεως τῶν σπουδῶν του. Μὲ ἀγάπην ἐπεδίδετο εἰς τὴν μελέτην (καὶ παρέμεινε ἀκούραστος ἀναγνώστης ἐφ' ὅρου ζωῆς) παραμένων ἐπὶ πολλὰς ὥρας εἰς τὴν πατρικὴν βιβλιοθήκην, ἐκλέγων κατὰ βούλησιν τοὺς τόμους ποὺ τοῦ ἐφαίνοντο ἐνδιαφέροντες. Εἰς ἕνα αὐτοβιογραφικὸν σχεδίασμα, ποὺ ἔγραψεν ὁ ἴδιος εἰς ὥριμον ἡλικίαν, ἀπέδιδε τὴν ἐκλογὴν τῶν τόμων εἰς ἕνα φιλικὸν πνεῦμα, ποὺ τοῦ ὑπεδείκνυε ποῖα ἔργα ἔπρεπε νὰ ἐκλέξῃ μὲ τὰς λέξεις: tolle, lege (πάρε, διάβασε). Δὲν πρέπει λοιπὸν νὰ προκαλέσῃ ἔκπληξιν τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὸ δημοτικὸν σχολεῖον ποὺ ἐφοίτα, ἐθεωρεῖτο ὡς ἕνα θαῦμα εὐρυμαθείας.

Εἰς ἡλικίαν 12 ἐτῶν ἦτο εἰς θέσιν νὰ διαβάζῃ ἐλευθέρως τὰ λατινικὰ καὶ ἀπὸ τότε ἐνδιεφέρετο ζωηρῶς διὰ τὴν λογικὴν ὡς μέσον ἐρεύνης τῆς ἀληθείας*. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐνδιαφέρον του πρὸς τὴν λογικὴν ἐξηκολούθησε ἀμείωτον ἐφ' ὅρου ζωῆς, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἕνα πλῆθος ἀνεκδότων σελίδων, δικαίως θεωρεῖται ὡς ὁ ἱδρυτὴς τῆς μαθηματικῆς λογικῆς. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τότε ἔτρεφε τὸν πόθον νὰ δημιουργήσῃ μίαν οἰκουμενικὴν γλῶσσαν (πασιγραφίαν), μὲ τὴν ὁποίαν νὰ δώσῃ ζωὴν εἰς μίαν παγκόσμιον ἐπιστήμην, ἀπηλλαγμένην πλανῶν.

Οἱ διδάσκαλοί του, οἱ ὁποῖοι εἶχον ἐναποθέσει εἰς αὐτὸν τὰς καλυτέρας ἐλπίδας των, ἐθορυβήθησαν κάποτε, ὅταν ἀντελήφθησαν ὅτι ὁ τρόφιμός των ἐλάμβανε προσανατολισμοὺς πρὸς τὴν ποίησιν. Ἔσπευσεν ὅμως νὰ τοὺς διαβεβαιώσῃ, ὅτι τὸ πνεῦμα του δὲν εὕρισκεν ἱκανοποίησιν μὲ τροφὴν ἑνὸς καὶ μόνον εἴδους, ἀλλ' εἶχεν ἀνάγκην ποικιλίας.

Ἀπὸ τοῦ θερινοῦ ἑξαμήνου τοῦ 1661 ἐνεγράφη εἰς τὸ πάτριον Πανεπιστήμιον, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ παρέμεινε πιστὸς καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς

---

* Ἀπὸ μερικὰς σελίδας, μέχρι σήμερον ἀνεκδότους, συνάγεται ὅτι πολὺ πρὸ τοῦ Euler ὁ Leibniz εἶχε στοιχειοθετήσει τὴν παράστασιν τοῦ συλλογισμοῦ μέσῳ κύκλων, τῆς ὁποίας εἶναι γνωστοτάτη ἡ χρησιμότης.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

πανεπιστημιακῆς του σταδιοδρομίας, ἐξαιρουμένου τοῦ χειμερινοῦ ἑξαμήνου τοῦ 1663, ὅτε μετέβη εἰς Ἰέναν διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν μαθηματικὸν Eduard Weigel (1625 - 1699). Εἰς τὴν Λειψίαν ἔλαβε διαδοχικῶς τοὺς τίτλους τοῦ Bachelor (30 Μαΐου 1663) καὶ τοῦ Master πρῶτα εἰς τὴν φιλοσοφίαν (26 Ἰανουαρίου 1664) καὶ κατόπιν εἰς τὰ νομικὰ (12 Ἰουλίου 1664). Μία ἐχθρότης, τῆς ὁποίας τὰ αἴτια δὲν ἔχουν διαπιστωθῆ, τὸν ἀπέτρεψε νὰ παρουσιασθῇ ἐκεῖ διὰ τὸν τίτλον τοῦ διδάκτορος, ὁ ὁποῖος τοῦ ἀπενεμήθη ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Altdorf τὴν 5ην Νοεμβρίου 1666, κατόπιν τῆς διατριβῆς του Dissertatio de arte combinatoria (Διατριβὴ ἐπὶ τοῦ συνδυαστικοῦ λογισμοῦ). Ἡ ἐν λόγῳ διατριβή, ἀνατυπωθεῖσα ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ συγγραφέως τὸ 1690, προεκάλεσε τὰς διαμαρτυρίας τοῦ ἰδίου, αἱ ὁποῖαι ἰσοδυναμοῦν πρὸς ὁμολογίαν, ὅτι τὸ ἔργον του ἐγράφη, ὅταν ἀκόμη ἦτο ἐστερημένος μαθηματικῆς πανοπλίας. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης ὁ Leibniz ἐγκατέλειψε τὴν γενέθλιον πόλιν, διὰ νὰ μὴ ἐπιστρέψῃ πλέον εἰς αὐτήν.

445. Εἰς Νυρεμβέργην, ὅπου μετέβη κατὰ τοὺς πρώτους μῆνας τοῦ 1667, περιῆλθον εἰς χεῖρας του ἡ Γεωμετρία τοῦ Cavalieri, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν ἀπεκόμισε κανένα ὄφελος, καὶ ἡ Γεωμετρικὴ σύνοψις (Synopsis geometrica, Λυὼν 1669) τοῦ γάλλου Ἰησουΐτου Honoré Fabri (1606-1688), τὴν ὁποῖον ἀντιθέτως διετήρει πάντοτε μὲ εὐχαρίστησιν εἰς τὴν μνήμην του εἰς ὥριμον ἡλικίαν. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν ἐγνωρίσθη μὲ τὸν ἐξέχοντα πολιτικὸν ἄνδρα G. C. von Boineburg, ὁ ὁποῖος ἐξετίμησεν ἀμέσως τὰ διακεκριμένα πνευματικά του χαρίσματα. Κατόπιν προσκλήσεως, τὸν ἠκολούθησεν εἰς Φρανκφούρτην καί, κατὰ συμβουλήν του, ἐδημοσίευσεν ἕνα ἔργον μὲ πρωτοτύπους καὶ ἐνδιαφερούσας ἰδέας ἐν σχέσει πρὸς τὴν διδασκαλίαν τῆς ἐπιστήμης τοῦ δικαίου. Τὸν συνεβούλευσε κατόπιν νὰ ὑποβάλῃ τὰ σέβη του εἰς τὸν ἐκλέκτορα πρίγκηπα, ὁ ὁποῖος διέμενεν εἰς Μαγεντίαν καὶ ὁ ὁποῖος τοῦ ἐνεπιστεύθη μίαν θέσιν εἰς τὴν διοίκησιν τοῦ Κράτους. Τὸ ὑπούργημα τοῦτο δὲν πρέπει νὰ ἦτο πολὺ βαρύ, ἀφοῦ ἐπέτρεψεν εἰς τὸν Leibniz νὰ συνεχίσῃ τὰς φιλοσοφικὰς καὶ πολιτικάς του σπουδάς. Τοῦτο τεκμαίρεται ἀπὸ τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων, αἱ ὁποῖαι ἀπετέλεσαν τὸ περιεχόμενον τοῦ ἔργου του Hypothesis physica, τοῦ ὁποίου τὸ Μέρος I ὑπεβλήθη εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν τοῦ Λονδίνου, ἐνῷ τὸ Μέρος II ὑπεβλήθη ἐπίσης καὶ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων.

Ἕνα σχέδιόν του περὶ εἰσβολῆς εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐκ μέρους τῶν εὐρωπαϊκῶν δυνάμεων ἐπεκροτήθη ὑπὸ τοῦ ἀνακτορικοῦ ἐκλέκτορος, ἔλαβε δὲ ὁ Leibniz τὴν ἄδειαν τοῦ ἡγεμόνος νὰ μεταβῇ εἰς Παρισίους καὶ νὰ παρουσιάσῃ εἰς τὸν Λουδοβῖκον XIV τὸ σχετικὸν ὑπόμνημα. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἀνεχώρησε διὰ τὴν Γαλλίαν τὸν Μάρτιον τοῦ 1672. Τὸ τολμηρὸν ὅμως σχέδιον δὲν εἶχε συνέχειαν, διότι οἱ ὑπουργοὶ τοῦ βασιλέως Ἡλίου

ἐθεώρησαν ὅτι, ἔπειτα ἀπὸ τὸν Λουδοβῖκον IX, δὲν ἦτο πλέον δυνατὸν νὰ γίνεται λόγος περὶ νέων σταυροφοριῶν.

Παρὰ ταῦτα ὁ Leibniz ὄχι μόνον παρέμεινεν εἰς Παρισίους ὑπὸ τὴν ἰδιότητα πρεσβευτικοῦ ἀκολούθου, ἀλλ' ἀπεστάλη ἐκεῖθεν εἰς Λονδῖνον (Ἰανουάριος-Μάρτιος 1673), ἐπιφορτισμένος μὲ εἰδικὴν ἀποστολήν. Τότε, τοῦ ἐδόθη ἡ εὐκαιρία νὰ συνάψῃ φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν Oldenburg, ὁ ὁποῖος ἐφρόντισε νὰ τὸν ἐγγράψῃ μέλος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου (9 Ἀπριλίου 1673).

Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ ἐκλέκτωρ πρίγκηψ τῆς Μαγεντίας ἀπέθανε, τὸν διαδέχθη δὲ ὁ δοὺξ Ἐρνέστος Αὔγουστος, ὁ ὁποῖος δὲν συνεμερίζετο τὰς ἰδέας τοῦ Leibniz. Κατόπιν αὐτοῦ ὁ νεαρὸς διπλωμάτης ἔπαυσε νὰ κατέχῃ ἐπίσημον θέσιν. Ἐπωφελήθη λοιπὸν τῆς ἐλευθερίας του συνάπτων φιλικὰς σχέσεις μὲ τοὺς ἐξοχωτέρους γάλλους διανοουμένους τῆς ἐποχῆς του. Ἔκαμεν ἐπίσης τὴν γνωριμίαν τοῦ Huygens, ὁ ὁποῖος, συνιστῶν εἰς τὸν Leibniz τὴν μελέτην τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Pascal κλπ., συνετέλεσεν ὥστε νὰ προσανατολισθῇ ὁριστικῶς ὁ νεαρὸς ἐπιστήμων πρὸς τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν καὶ νὰ παρακάμψῃ τὴν πνευματικὴν ἐκείνην κατάστασιν, τὴν ὁποίαν ἐχαρακτήριζεν ἀργότερα ὁ ἴδιος ὡς

«superba mathesis ignorantia»,

δηλαδὴ «ὑπέροχον τῶν μαθηματικῶν ἄγνοιαν».

Τότε ἔλαβεν ἀκόμη γνῶσιν τῆς ἀριθμομηχανῆς τοῦ Pascal καὶ δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐφεύρῃ ἄλλην μηχανήν, «strumentum arithmeticum», τελειοτέραν κατὰ τοῦτο ὅτι, ἐνῷ ἡ τοῦ Pascal ἐξετέλει ἀποκλειστικῶς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις, ἡ ἰδική του ἠδύνατο ἐπὶ πλέον νὰ ἐκτελῇ πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις καὶ ἐξαγωγὰς ῥιζῶν *.

Συνεχίζων τὰς μελέτας του ὁ Leibniz ἔλαβε γνῶσιν τῶν ἔργων τοῦ Descartes καὶ τῶν ἄλλων μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι εἶχον ἀσχοληθῇ μὲ ἀπειροστικὰ ζητήματα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVII αἰῶνος (μὴ ἐξαιρουμένου τοῦ Mengoli, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ Oldenburg ἐφείλκυσε τὴν προσοχήν του, καὶ τοῦ Mercator, τὸν ὁποῖον τοῦ εἶχεν ὑποδείξει ὁ Pell). Κατὰ δήλωσιν τοῦ ἰδίου, ὁ Pascal ὑπῆρξεν ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἤσκησεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν βαθυτέραν καὶ μονιμωτέραν ἐπίδρασιν.

Αἱ ἀνωτέρω μελέται ἀφύπνισαν εἰς τὸ πνεῦμα του πρωτοτύπους σκέψεις, χάρις εἰς τὰς ὁποίας ἀπὸ τοῦ 1673 ὡδηγήθη εἰς τὴν ἀνακάλυψιν νέων μεθόδων χαράξεως τῶν ἐφαπτομένων καὶ εἰς τὴν ἀποκάλυψιν τοῦ στενοῦ συν-

* Μία περιγραφὴ τοῦ strumentum arithmeticum εὑρίσκεται εἰς τὰ Miscellanea Berolinensia, τοῦ 1710. Ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀργάνου ἐστοίχισεν, ὡς ἀναφέρεται, πλέον τῶν 24 χιλιάδων ταλλήρων. Ὑπόδειγμα τούτου ἀνεκαλύφθη τὸ 1876 εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Γοττίγγης, ἐκεῖθεν δὲ μετεφέρθη εἰς Ἀννόβερον, ὅπου καὶ εὑρίσκεται σήμερον.

δέσμου μεταξὺ τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων καὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ μιᾶς καμπύλης. Λαβὼν γνῶσιν μέσῳ τοῦ Oldenburg τῶν σχετικῶν ἐργασιῶν τοῦ Newton, ἠδυνήθη νὰ διαπιστώσῃ ὅτι ἔφθασεν εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα μὲ ἰδικήν του ἀνεξάρτητον ἐργασίαν καὶ μὲ διαφορετικὰ μέσα.

Περὶ τῆς σπουδαιότητος τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐπενόησεν, εἶχε πλήρη συνείδησιν, διότι ὅπως τοῦ ἐδόθη εὐκαιρία νὰ δηλώσῃ, αὗται δὲν ἀποτελοῦν μόνον ἐπέκτασιν ὅλων τῶν μέχρι τότε γνωστῶν μεθόδων, ἀλλὰ συγχρόνως καὶ τὸν σπόρον, ἐκ τοῦ ὁποίου θὰ ἐκκολαφθοῦν ὅλαι αἱ μεταγενέστεραι ἐξελίξεις εἰς τὴν ἀνωτέραν ἀνάλυσιν. Ἐνισχύετο δὲ εἰς αὐτήν του τὴν πεποίθησιν μὲ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ἐνδόξου σήμερον τύπου:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

ὁ ὁποῖος δίδει καινοφανῆ ἀναλυτικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Σκόπιμον εἶναι ἐπίσης νὰ μνημονεύσωμεν, ὅτι μία ὤθησις πρὸς συνέχισιν τῶν μελετῶν αὐτοῦ τοῦ εἴδους τοῦ ἐδόθη ἀπὸ ἕνα συμπατριώτην του, τὸν E. W. von Tschirnhausen (βλ. ἑπόμενον Κεφάλαιον), ὁ ὁποῖος εἶχε μεταβῆ μαζύ του εἰς Παρισίους κατὰ τὴν περίοδον ἀπὸ τοῦ Σεπτεμβρίου 1675 μέχρι τοῦ Νοεμβρίου 1676.

446. Ἡ διαμονὴ τοῦ Leibniz εἰς Παρισίους, ἡ ὁποία τόσον ἀποφασιστικῆς σημασίας ἀπέβη διὰ τὴν σταδιοδρομίαν του καὶ τόσον γόνιμος ὑπῆρξε διὰ τὴν ἐπιστήμην, ἔβαινε πλέον εἰς τὸ τέλος της. Ἀπὸ τοῦ Ἀπριλίου 1673 ὁ δοὺξ τοῦ Brunswick Ἰωάννης Φρειδερῖκος τοῦ προσέφερε τιμητικὴν θέσιν εἰς τὴν Αὐλήν του. Ὁ Leibniz ἐχρονοτρίβει νὰ δώσῃ ἀπάντησιν, ἐπειδὴ ἤλπιζεν ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀββᾶ Gallois θὰ ἐπετύγχανε μίαν θέσιν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων. Ἡ ἀποτυχία ἐκείνης τῆς προσπαθείας (ὀφειλομένη εἰς ἄρνησιν τοῦ Leibniz ν' ἀσπασθῇ τὸν καθολικισμὸν) τὸν ἠνάγκασε νὰ δεχθῇ τὸ ὑπούργημα τοῦ βιβλιοθηκαρίου καὶ αὐλικοῦ συμβούλου τοῦ ἡγεμόνος. Ἐγκατέλειψε λοιπὸν τοὺς Παρισίους τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1675, μετέβη εἰς Λονδῖνον (ὅπου ὁ Collins τοῦ ἔδειξε τὴν ἀλληλογραφίαν του μὲ τοὺς ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς), εἰς τὸ Ἄμστερνταμ (ὅπου συνδιελέχθη μὲ τὸν Hudde), εἰς τὴν Χάγην (ὅπου ἐγνώρισε τὸν Σπινόζαν) καὶ τέλος, τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1676, μετέβη εἰς τὴν ὁριστικήν του ἐπίσημον ἕδραν.

Τὰ καθήκοντα τῆς ὑπηρεσίας του δὲν τὸν ἠμπόδισαν νὰ στρέφῃ τὸ πνεῦμα του πρὸς τὴν ἐπιστήμην, ὅπως ἀποδεικνύουν ἡ ἀλληλογραφία του

* Μὲ τὴν δημοσίευσιν τῆς ἀνακαλύψεως αὐτῆς εἶχεν ἐπιφορτισθῆ κάποιος Soundry, ὁ ὁποῖος ἀπέθανεν αἰφνιδίως ἐκ συγκοπῆς, ὁμιλεῖ δὲ περὶ αὐτοῦ ὁ Leibniz εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Gallois, τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1678.

μὲ τὸν Oldenburg καὶ τὰ ἔργα του: α) Methode générale pour mener les touchantes des lignes courbes (Γενικὴ μέθοδος χαράξεως τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας), β) Nova algebrae promotio (Νέον βῆμα προόδου εἰς τὴν ἄλγεβραν — ὅπου ὑπάρχουν τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν ὁριζουσῶν) καὶ ἄλλα ἀκόμη. Εἰς τὴν δημοσίευσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν παλαιῶν καὶ νεωτέρων του ἐρευνῶν παρεκινήθη ἀπὸ τὸν καθιερωθέντα θεσμὸν (1682) τῶν Acta Eruditorum (A. E.), ὅπου κατεχώρησεν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν μαθηματικῶν του ὑπομνημάτων.

447. Εἰς τὸν Leibniz ἀνετέθη τὸ ἔργον τῆς συγγραφῆς μιᾶς ἱστορίας τοῦ Οἴκου Brunswick — Lüneburg, ἔργον τὸ ὁποῖον ἀπήτει ἐκ μέρους του ἐκτεταμένας ἐρεύνας τῶν διαφόρων ἀρχείων, ὄχι μόνον τῆς Γερμανίας, ἀλλὰ καὶ τῆς Αὐστρίας καὶ Ἰταλίας. Ἐπὶ μίαν τετραετίαν εὑρίσκομεν τὸν Leibniz περιπλανώμενον ἀπὸ ἀρχείου εἰς ἀρχεῖον. Πρῶτα εἰς Βιέννην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχώρησε περὶ τὸ τέλος Φεβρουαρίου 1689, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Ρώμην τὴν 14ην Ἀπριλίου τοῦ ἰδίου ἔτους, ἀφοῦ ἐπεσκέφθη ἐν τῷ μεταξὺ τὴν Βενετίαν, Φερράραν, Μοδέναν, Βολωνίαν καὶ Λορέτο. Εἰς τὴν αἰωνίαν πόλιν διέμεινεν ἐπὶ ἕνα ἑξάμηνον, ἐγένετο μέλος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Ἀκαδημίας, ποὺ εἶχεν ἱδρύσει ὁ Ciampini, καὶ ἐκεῖ ἐγνώρισε τὸν Giordano (§ 415), ὁ ὁποῖος δὲν παρέλειψε νὰ τοῦ ἀποστείλῃ τιμῆς ἕνεκεν τὸ ἔργον του Euclides restitutus. Κατόπιν μετέβη εἰς Νεάπολιν, ὁπόθεν ἔλαβε τὸν δρόμον τῆς ἐπιστροφῆς. Εἰς Φλωρεντίαν συνδιελέχθη μὲ τοὺς Magliabecchi καὶ Viviani, εἰς Βολωνίαν ἐγνώρισε τὸν D. Guglielmini, εἰς Μοδέναν παρέμεινε δύο μῆνας ἐπιδιδόμενος εἰς ἱστορικὰς ἀναδιφήσεις μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Tiraboschi. Τέλος ἐπέστρεψεν εἰς Brunswick διὰ νὰ θέσῃ ὑπὸ ἐκμετάλλευσιν τὸ συγκεντρωθὲν τεράστιον ἱστορικὸν ὑλικόν.

Πνεῦμα κατ' ἐξοχὴν ὀργανωτικόν, παρεκίνησε τὸν ἐκλέκτορα τοῦ Βρανδεμβούργου, μέλλοντα βασιλέα τῆς Πρωσσίας, νὰ ἱδρύσῃ εἰς τὸ Βερολῖνον (1700) τὴν Ἑταιρείαν τῶν Ἐπιστημῶν, τῆς ὁποίας ὁ ἴδιος συνέταξε τὸ πρῶτον Καταστατικόν, καὶ ἡ ὁποία ἐπέπρωτο νὰ καταστῇ ἀργότερα (1744) ἡ Ἀκαδημία τῆς Πρωσσίας. Ἐλθὼν κατόπιν εἰς σχέσεις μὲ τὸν Μέγαν Πέτρον εὗρε τὴν εὐκαιρίαν νὰ πείσῃ τὸν μονάρχην νὰ ἱδρύσῃ παρόμοιον ἵδρυμα εἰς Πετρούπολιν. Ἀνάλογον δραστηριότητα ἀνέπτυξεν ἐν συνεχείᾳ εἰς Δρέσδην καὶ Βιέννην.

Ἡ συμμετοχή του εἰς τὰς διαπραγματεύσεις ποὺ κατέληξαν εἰς τὸ νὰ φέρουν μίαν δυναστείαν τοῦ Ἀννοβέρου εἰς τὸν θρόνον τῆς Ἀγγλίας, τὸν κατέστησε μισητὸν εἰς τὸ κόμμα τῶν Τόρεων. Ὑπῆρξε δὲ τοῦτο ἀσφαλῶς μία ἀπὸ τὰς αἰτίας, διὰ τὰς ὁποίας τὴν στιγμὴν τοῦ θανάτου του (14 Νοεμβρίου 1716) δὲν ἔλαβε χώραν ἡ καθιερωμένη ἐπιμνημόσυνος τελετὴ εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν τοῦ Λονδίνου, τῆς ὁποίας ἀναμφιβόλως ὑπῆρξεν

ἕνα ἀπὸ τὰ ἐνδοξότερα μέλη. Ἀλλ' ἐξ ἴσου ἄδικος ὑπῆρξεν ἡ ἀπουσία ἐκπροσώπων τῆς Αὐλῆς τοῦ Brunswick κατὰ τὴν ἐπικήδειον τελετήν, ὡς καὶ ἡ σιωπή, τὴν ὁποίαν ἐτήρησεν ἀπέναντί του ἡ Ἑταιρεία τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, τῆς ὁποίας ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος πρόεδρος. Εἰς τιμητικὴν ἐπανόρθωσιν, τρόπον τινά, αὐτῆς τῆς μὴ τυχαίας λησμοσύνης, ἡ Ἀκαδημία τῆς Πρωσσίας καθιέρωσεν ἔκτοτε νὰ γίνεται εἰς τιμὴν τοῦ ὀνόματός του ἡ ἐπίσημος αὐτῆς ἐτησία συνεδρίασις. Ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων τοὐναντίον, διὰ τοῦ εὐγλώττου στόματος τοῦ γενικοῦ γραμματέως αὐτῆς Fontenelle (13 Νοεμβρίου 1717), ἔπλεξε τὸ ἁρμόζον εἰς τὸν μεγάλον ἄνδρα ἐγκώμιον.

Συνδυαστικὴ ἀνάλυσις καὶ χαρακτηριολογικὴ γεωμετρία

448. Ἀπὸ τὴν βιογραφίαν τοῦ συγγραφέως μεταβαίνομεν τώρα εἰς τὰ ἔργα του, ἀρχίζοντες ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἂν καὶ ἐμφανίζονται ὀλιγώτερον σημαντικὰ τῶν ὅσων θὰ ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ, ἐν τούτοις εἶναι χρησιμώτατα εἰς τὸ νὰ μᾶς δώσουν μίαν εἰκόνα τοῦ φιλοσοφικοῦ προσανατολισμοῦ τῆς σκέψεώς του, ὁ ὁποῖος ἐκδηλωθεὶς ἀπὸ τῆς παιδικῆς ἡλικίας, διετηρήθη σταθερὸς ἐφ' ὅρου ζωῆς.

Αἱ πρῶται συμβολαὶ τοῦ Leibniz εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας ἀπαντῶνται εἰς τὸ μνημονευθὲν ἤδη ἔργον του Dissertatio de arte combinatoria, προωρισμένον, ὅπως συνάγεται ἐκ τοῦ τίτλου του, εἰς τὴν μελέτην τῶν μεταθέσεων (variationes) καὶ συνδυασμῶν (complexiones), ποὺ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἀντικειμένων. Τὸ ἔργον εἶναι βεβαίως μικρᾶς σημασίας, ἀφοῦ περιέχονται εἰς αὐτὸ προτάσεις προφανεῖς καὶ πίναξ τῶν τιμῶν $n! = 1.2\ldots n$ διὰ $n = 1,2,\ldots,24$. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ μορφώσῃ γνώμην ἐκ τῶν ἀκολούθων τύπων, ποὺ ἐκφράζουν τὰς προτάσεις του εἰς σύγχρονον γλῶσσαν:

$$n! \equiv 0 \pmod 2, \quad \text{διὰ} \quad n>1$$

$$n! \equiv 0 \pmod{10}, \quad \text{διὰ} \quad n>4$$

$$\sum_1^n k! \equiv 1 \pmod 2, \quad \sum_1^n k! \equiv 3 \pmod{10}, \quad \text{διὰ } n > 3$$

$$n! \equiv 0 \pmod{m!}, \quad \text{διὰ} \quad m<n$$

$$2\cdot n! - (n-1)\cdot(n-1)! = n! + (n-1)!$$

$$\frac{n!^2}{(n-1)!} = (n+1)! - n!$$

Ἀτυχῶς δὲν λείπουν καὶ σφάλματα, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ βεβαίωσις ὅτι αἱ μετα-

ἕνα ἀπὸ τὰ ἐνδοξότερα μέλη. Ἀλλ' ἐξ ἴσου ἄδικος ὑπῆρξεν ἡ ἀπουσία ἐκπροσώπων τῆς Αὐλῆς τοῦ Brunswick κατὰ τὴν ἐπικήδειον τελετήν, ὡς καὶ ἡ σιωπή, τὴν ὁποίαν ἐτήρησεν ἀπέναντί του ἡ Ἑταιρεία τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, τῆς ὁποίας ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος πρόεδρος. Εἰς τιμητικὴν ἐπανόρθωσιν, τρόπον τινά, αὐτῆς τῆς μὴ τυχαίας λησμοσύνης, ἡ Ἀκαδημία τῆς Πρωσσίας καθιέρωσεν ἔκτοτε νὰ γίνεται εἰς τιμὴν τοῦ ὀνόματός του ἡ ἐπίσημος αὐτῆς ἐτησία συνεδρίασις. Ἡ Ἀκαδημία τῶν Παρισίων τοὐναντίον, διὰ τοῦ εὐγλώττου στόματος τοῦ γενικοῦ γραμματέως αὐτῆς Fontenelle (13 Νοεμβρίου 1717), ἔπλεξε τὸ ἁρμόζον εἰς τὸν μεγάλον ἄνδρα ἐγκώμιον.

Συνδυαστικὴ ἀνάλυσις καὶ χαρακτηριολογικὴ γεωμετρία

448. Ἀπὸ τὴν βιογραφίαν τοῦ συγγραφέως μεταβαίνομεν τώρα εἰς τὰ ἔργα του, ἀρχίζοντες ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἂν καὶ ἐμφανίζονται ὀλιγώτερον σημαντικὰ τῶν ὅσων θὰ ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ, ἐν τούτοις εἶναι χρησιμώτατα εἰς τὸ νὰ μᾶς δώσουν μίαν εἰκόνα τοῦ φιλοσοφικοῦ προσανατολισμοῦ τῆς σκέψεώς του, ὁ ὁποῖος ἐκδηλωθεὶς ἀπὸ τῆς παιδικῆς ἡλικίας, διετηρήθη σταθερὸς ἐφ' ὅρου ζωῆς.

Αἱ πρῶται συμβολαὶ τοῦ Leibniz εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας ἀπαντῶνται εἰς τὸ μνημονευθὲν ἤδη ἔργον του Dissertatio de arte combinatoria, προωρισμένον, ὅπως συνάγεται ἐκ τοῦ τίτλου του, εἰς τὴν μελέτην τῶν μεταθέσεων (variationes) καὶ συνδυασμῶν (complexiones), ποὺ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἀντικειμένων. Τὸ ἔργον εἶναι βεβαίως μικρᾶς σημασίας, ἀφοῦ περιέχονται εἰς αὐτὸ προτάσεις προφανεῖς καὶ πίναξ τῶν τιμῶν $n! = 1.2...n$ διὰ $n = 1,2,...,24$. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ μορφώσῃ γνώμην ἐκ τῶν ἀκολούθων τύπων, ποὺ ἐκφράζουν τὰς προτάσεις του εἰς σύγχρονον γλῶσσαν:

$$n! \equiv 0 \pmod 2, \quad \text{διὰ } n>1$$

$$n! \equiv 0 \pmod{10}, \quad \text{διὰ } n>4$$

$$\sum_1^n k! \equiv 1 \pmod 2, \quad \sum_1^n k! \equiv 3 \pmod{10}, \quad \text{διὰ } n>3$$

$$n! \equiv 0 \pmod{m!}, \quad \text{διὰ } m<n$$

$$2\cdot n! - (n-1)\cdot(n-1)! = n! + (n-1)!$$

$$\frac{n!^2}{(n-1)!} = (n+1)! - n!$$

Ἀτυχῶς δὲν λείπουν καὶ σφάλματα, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ βεβαίωσις ὅτι αἱ μετα-

θέσεις τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν μὲ τοὺς μουσικοὺς φθόγγους:

do, do, re, mi, fa, sol,

εἶναι 600, ἐνῷ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι μόνον 360*.

Ἂν καὶ ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως τὸ ἔργον αὐτὸ κρίνεται μικρᾶς ἀξίας, δὲν δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἰδίαν κρίσιν ἐξετάζοντες τοῦτο ὡς σύνολον. Διότι ἀπαντᾶται ἐκεῖ ἡ πρωτότυπος ἰδέα ὅτι, ἐὰν ἦτο δυνατὸν ν' ἀναλύσωμεν ὅλας τὰς συνθέτους ἐννοίας εἰς ἁπλᾶ στοιχεῖα καὶ νὰ παραστήσωμεν αὐτὰ μὲ ὀλίγα σύμβολα, θὰ εἴχομεν μορφώσει, «ipso facto», μίαν μέθοδον ὄχι μόνον νὰ ἐκφράζωμεν κατὰ τρόπον σαφῆ τὰς ἤδη γνωστὰς ἀληθείας, ἀλλὰ ν' ἀνακαλύπτωμεν ἐπὶ πλέον καὶ νέας. Εἰς πραγματοποίησιν ἑνὸς τόσον γοητευτικοῦ προγράμματος τείνουν σήμερον αἱ προσπάθειαι τῆς μαθηματικῆς λογικῆς.

449. Εἰς Παρισίους ὁ Leibniz ἔμαθεν ὅσα ἔκαμαν ὁ Descartes καὶ ὁ Pascal διὰ νὰ δώσουν νέαν μορφὴν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν. Πνεῦμα ἐπιρρεπὲς πρὸς τὰς γενικεύσεις ἐνεπνεύσθη ἀμέσως τὴν δυνατότητα ἑνὸς νέου λογισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐκάλεσε Caracteristica geometrica (ἂς εἴπωμεν: γεωμετρικὴ χαρακτηριολογία) καὶ διὰ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ οἱαδήποτε ἔρευνα εἰς τοὺς χώρους τῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν.

Ἐπιστρέψας εἰς τὴν πατρίδα δὲν ἔπαυσε νὰ στρέφῃ τὴν σκέψιν του πρὸς τὸ ζήτημα τοῦτο, ἐπεχείρησε μάλιστα τὴν 10ην Αὐγούστου 1679 μίαν πρώτην ἔκθεσιν καὶ ὀλίγον ἔπειτα (8 Σεπτεμβρίου 1679) κατέστησε γνωστὰς τὰς ἰδέας του εἰς τὸν σεβαστόν του διδάσκαλον Huygens, ὁ ὁποῖος ὅμως δὲν ἔδειξε δι' αὐτὰς μέγα ἐνδιαφέρον, ὀλίγον μάλιστα ἔπειτα (22 Νοεμβρίου 1679) τοῦ ἐξεμυστηρεύετο, ὅτι δὲν ἔτρεφε μεγάλην ἐμπιστοσύνη εἰς τὴν γονιμότητα τῆς ὑποθετικῆς ἀκόμη γεωμετρικῆς ἀναλύσεως καὶ τὸν παρώτρυνε νὰ μὴ ἐγκαταλείψῃ τὰς ἀπειροστικὰς ἐρεύνας, ὅπου εἶχεν ἤδη δρέψει τόσους εὐχύμους καρπούς. Ἐντεῦθεν ἐξηγεῖται διατί ὁ Leibniz δὲν ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα τὰς ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ἐργασίας του. Ἀναδιφῶντες ὅμως σήμερον τὰ χειρόγραφά του, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν προσφάτως εἰς τὸν τύπον, δὲν εἶναι δύσκολον νὰ σχηματίσωμεν μίαν γνώμην ἐπὶ τῶν σχετικῶν ἰδεῶν του.

Μὲ τὸν ὅρον χαρακτὴρ ἐννοεῖ κατ' ἀρχὴν ὁ Leibniz κάθε πρᾶγμα ἱκανὸν νὰ ἐκφράσῃ μίαν σχέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται ἕνα ὡρισμένον ἀντικείμενον, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ εὐκολύνῃ τὸν χειρισμόν της. Π.χ. «σχῆμα» εἶναι ὁ χαρακτὴρ ἑνὸς ἀντικειμένου τριῶν διαστάσεων. Κατ'

* Εἰς τὴν ἰδίαν ἴσως ἐποχὴν ἀνάγεται ἕνα ἀπόσπασμα, δημοσιευθὲν μετὰ θάνατον τοῦ Leibniz, φέρον τὸν τίτλον De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria, ὅπου ἀναγράφεται ἡ παρατήρησις ὅτι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ a, τὸ γινόμενον $(a+1)(a+2)\ldots(a+n)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $1, 2, \ldots, n$.

αὐτόν, σημαντικὸν εἶναι τὸ ἀπολαμβανόμενον πλεονέκτημα ἐκ τῆς διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παραστάσεως τῶν γεωμετρικῶν ὀντοτήτων, διότι τοιουτοτρόπως ἀπαλλασσόμεθα τῆς ἀνάγκης νὰ καταφεύγωμεν πάντοτε εἰς τὸν «γραφικισμὸν» (graficismus).

Εἰς μερικὰς ἁπλᾶς περιπτώσεις τὸ πρᾶγμα εἶναι δυνατόν, διότι π.χ., γράφοντες $BC = CA = AB$ δὲν ἐκφράζομεν τίποτε ἄλλο παρὰ ὅτι τὸ τρίγωνον ABC εἶναι ἰσόπλευρον, ἐνῷ μὲ τὴν γραφὴν

$$AB + BC = AC$$

ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ τρία σημεῖα A, B, C κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διὰ νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν δυναμικότητα τῶν σκέψεών του, ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου, ὡς στοιχείου παράγοντος τὰς γραμμάς· αὗται μὲ τὴν σειράν των παράγουν τὰς ἐπιφανείας καὶ αὗται πάλιν τὰ στερεά. Μεταξὺ τῶν γραμμῶν ἀναδύεται ἡ εὐθεῖα, χαρακτηριζομένη ὑπὸ τῆς ἰδιότητος νὰ ταυτίζεται πρὸς ἑαυτήν, ὅταν περιστραφῇ περὶ δύο σταθερά της σημεῖα. Ἀκολουθοῦν οἱ ὁρισμοὶ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὡς καὶ ἡ θέσπισις νέων συμβόλων δηλούντων ὅτι ἕνα σημεῖον διαγράφει μίαν γραμμήν, μίαν ἐπιφάνειαν ἢ ἕνα στερεὸν ἢ σημαινόντων τὴν ταυτότητα δύο σχημάτων, τουτέστι τὴν δυνατότητα ταυτίσεώς των δι' ἐπιθέσεως τοῦ μὲν ἐπὶ τοῦ δέ.

Τὰ σύμβολα αὐτὰ ἐν τούτοις δὲν ἐχρησιμοποιήθησαν συστηματικῶς ὑπὸ τοῦ Leibniz, οὔτε καὶ ὑπὸ ἄλλων. Διὰ νὰ δείξῃ πῶς δύναται νὰ γίνῃ ἐπωφελῶς ὁ χειρισμὸς τῶν λογικῶν τούτων βοηθητικῶν μέσων, ἀποδεικνύει ὅτι κάθε ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας εἶναι κύκλος. Ἱστορικὴ ὅμως ἀμεροληψία ἐπιβάλλει ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι δὲν κατορθώνει νὰ μετοχετεύσῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν ἰδικήν του πίστιν ὡς πρὸς τὴν πραγματικὴν ὠφελιμότητα τῆς νέας μεθόδου ἐρεύνης καὶ ἐκθέσεως τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν. Παρὰ ταῦτα, δύο περίπου αἰῶνας ἀργότερα, ὁ H. Grassmann ἀπεδείκνυεν ἐμπράκτως ὅτι ὁ μέγας φιλόσοφος εἶχε καταθέσει τὸν σπόρον μιᾶς ἰδέας οὐχὶ μικρᾶς γονιμότητος.

Ἀπειροστικὴ ἀνάλυσις

450. Ἡ ἱστορία τῆς ἐκβλαστήσεως τῶν ἰδεῶν, αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν τὸν Leibniz εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, δὲν θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ γραφῇ παρὰ μόνον ὅταν δοθοῦν εἰς τὴν δημοσιότητα τὰ πολυάριθμα χειρόγραφα, ποὺ παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα. Ὅ,τι δυνάμεθα σήμερον νὰ σημειώσωμεν εἶναι τὸ ὀλίγον ἐκεῖνο φῶς, ποὺ ἐκπορεύεται ἀπὸ τὴν ἀλληλογραφίαν του καὶ ἀπὸ τὰς σελίδας, ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὴν δημοσιότητα, βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν ἀξιέπαινον συνήθειάν του ν' ἀποθέτῃ μίαν χρονολογίαν σχεδὸν εἰς πᾶσαν σελίδα ἐξερχομένην τῶν χειρῶν του. Προτοῦ ὅμως εἰσέλθωμεν εἰς τεχνικὰς λεπτομερείας, σκόπιμον εἶναι νὰ παρατηρήσωμεν

αὐτόν, σημαντικὸν εἶναι τὸ ἀπολαμβανόμενον πλεονέκτημα ἐκ τῆς διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παραστάσεως τῶν γεωμετρικῶν ὀντοτήτων, διότι τοιουτοτρόπως ἀπαλλασσόμεθα τῆς ἀνάγκης νὰ καταφεύγωμεν πάντοτε εἰς τὸν «γραφικισμὸν» (graficismus).

Εἰς μερικὰς ἁπλᾶς περιπτώσεις τὸ πρᾶγμα εἶναι δυνατόν, διότι π.χ., γράφοντες BC = CA = AB δὲν ἐκφράζομεν τίποτε ἄλλο παρὰ ὅτι τὸ τρίγωνον ABC εἶναι ἰσόπλευρον, ἐνῷ μὲ τὴν γραφὴν

$$AB + BC = AC$$

ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ τρία σημεῖα A, B, C κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διὰ νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν δυναμικότητα τῶν σκέψεών του, ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου, ὡς στοιχείου παράγοντος τὰς γραμμάς· αὐταὶ μὲ τὴν σειράν των παράγουν τὰς ἐπιφανείας καὶ αὐταὶ πάλιν τὰ στερεά. Μεταξὺ τῶν γραμμῶν ἀναδύεται ἡ εὐθεῖα, χαρακτηριζομένη ὑπὸ τῆς ἰδιότητος νὰ ταυτίζεται πρὸς ἑαυτήν, ὅταν περιστραφῇ περὶ δύο σταθερά της σημεῖα. Ἀκολουθοῦν οἱ ὁρισμοὶ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὡς καὶ ἡ θέσπισις νέων συμβόλων δηλούντων ὅτι ἕνα σημεῖον διαγράφει μίαν γραμμήν, μίαν ἐπιφάνειαν ἢ ἕνα στερεὸν ἢ σημαινόντων τὴν ταυτότητα δύο σχημάτων, τουτέστι τὴν δυνατότητα ταυτίσεώς των δι' ἐπιθέσεως τοῦ μὲν ἐπὶ τοῦ δέ.

Τὰ σύμβολα αὐτὰ ἐν τούτοις δὲν ἐχρησιμοποιήθησαν συστηματικῶς ὑπὸ τοῦ Leibniz, οὔτε καὶ ὑπὸ ἄλλων. Διὰ νὰ δείξῃ πῶς δύναται νὰ γίνῃ ἐπωφελῶς ὁ χειρισμὸς τῶν λογικῶν τούτων βοηθητικῶν μέσων, ἀποδεικνύει ὅτι κάθε ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας εἶναι κύκλος. Ἱστορικὴ ὅμως ἀμεροληψία ἐπιβάλλει ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι δὲν κατορθώνει νὰ μετοχετεύσῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν ἰδικήν του πίστιν ὡς πρὸς τὴν πραγματικὴν ὠφελιμότητα τῆς νέας μεθόδου ἐρεύνης καὶ ἐκθέσεως τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν. Παρὰ ταῦτα, δύο περίπου αἰῶνας ἀργότερα, ὁ H. Grassmann ἀπεδείκνυεν ἐμπράκτως ὅτι ὁ μέγας φιλόσοφος εἶχε καταθέσει τὸν σπόρον μιᾶς ἰδέας οὐχὶ μικρᾶς γονιμότητος.

Ἀπειροστικὴ ἀνάλυσις

450. Ἡ ἱστορία τῆς ἐκβλαστήσεως τῶν ἰδεῶν, αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν τὸν Leibniz εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, δὲν θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ γραφῇ παρὰ μόνον ὅταν δοθοῦν εἰς τὴν δημοσιότητα τὰ πολυάριθμα χειρόγραφα, ποὺ παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα. Ὅ,τι δυνάμεθα σήμερον νὰ σημειώσωμεν εἶναι τὸ ὀλίγον ἐκεῖνο φῶς, ποὺ ἐκπορεύεται ἀπὸ τὴν ἀλληλογραφίαν του καὶ ἀπὸ τὰς σελίδας, ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὴν δημοσιότητα, βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν ἀξιέπαινον συνήθειάν του ν' ἀποθέτῃ μίαν χρονολογίαν σχεδὸν εἰς πᾶσαν σελίδα ἐξερχομένην τῶν χειρῶν του. Προτοῦ ὅμως εἰσέλθωμεν εἰς τεχνικὰς λεπτομερείας, σκόπιμον εἶναι νὰ παρατηρήσωμεν

ὅτι, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς φιλονικίας του μὲ τοὺς Καρτεσιανούς, ἀρχηγευομένους ὑπὸ τῶν Catalau καὶ Papin, ὁ Leibniz κατέστησε γνωστὰς (Nouvelles de la république des lettres, 1684) μερικὰς γενικότητας, αἱ ὁποῖαι προσφέρουν χρησίμους ἐνδείξεις γύρω ἀπὸ τὰς κατευθύνσεις, πρὸς τὰς ὁποίας ἐστρέφοντο αἱ ἔρευναί του, καθ' ὅσον περιέχουν μίαν σαφῆ διατύπωσιν τῆς «ἀρχῆς τῆς συνεχείας».

Πρόκειται περὶ μιᾶς γενικῆς κατευθυντηρίου γραμμῆς, ἡ ὁποία, κατὰ ἰδικήν του ὁμολογίαν, τοῦ ἐχρησίμευσεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Ἔχει τὴν ἀρχήν της εἰς τὸ ἄπειρον καὶ κατ' αὐτὸν εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὴν γεωμετρίαν, δύναται δὲ νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: «Ὅταν ἡ διαφορὰ δύο μεταβλητῶν δύναται νὰ ἐλαττωθῇ κάτω πάσης δεδομένης ποσότητος, in datis, αὕτη πρέπει νὰ δύναται ἐπίσης νὰ ἐλαττωθῇ κάτω παντὸς μεγέθους in quaesitis»· ἁπλούστερα, ὅπως λέγει ὁ Leibniz : «ὅταν τὰ δεδομένα προσεγγίζουν ἄλληλα ἀπεριορίστως καὶ καταλήγουν εἰς σύμπτωσιν, κατ' ἀνάγκην καὶ αἱ συνέπειαι τούτων ἢ τ' ἀποτελέσματα (ἤτοι αὐτὸ ποὺ ζητεῖται) πράττουν τὸ αὐτό».

Κατὰ τὸν Leibniz τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ μίαν ἀκόμη γενικωτέραν ἀρχήν, τὴν ὁποίαν διατυπώνει ὡς ἑξῆς:

«datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata».

(ἤτοι: εἰς εὔτακτα δεδομένα ἀντιστοιχοῦν εὔτακτα ζητούμενα). Τὴν ἀρχὴν αὐτὴν αἰσθητοποιεῖ μὲ τὸ παράδειγμα τῆς παραβολῆς, θεωρουμένης ὡς ὁριακῆς μορφῆς τῆς ἐλλείψεως καὶ μὲ τὸ παράδειγμα τῆς ἠρεμίας, θεωρουμένης ὡς κινήσεως ἀπειροστῆς ταχύτητος.

451. Πλησιάζοντες τώρα εἰς ὅ,τι εὑρίσκεται ἀκόμη ἐγγύτερα πρὸς τὸν ἀπειροστικὸν λογισμόν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν ὁ Leibniz, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς Παρισίους, ἐμελέτησε τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Descartes, ἡ προσοχή του βεβαίως ἐστράφη πρὸς τὸ πρόβλημα τῶν ἐφαπτομένων καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του, εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ὁποίων καὶ μόνον εἶχε δώσει λύσιν ὁ Descartes καὶ μάλιστα ἐπὶ εἰδικῆς περιπτώσεως. Τότε ὁ Leibniz ἀποδύεται εἰς τὴν προσπάθειαν νὰ λύσῃ καὶ τὰς δύο μορφὰς προβλημάτων ἀνατρέχων εἰς τὸ «χαρακτηριστικὸν τρίγωνον», σχῆμα τοῦ ὁποίου ἐγνώριζεν ἤδη ὁποίαν ἐπωφελῆ χρῆσιν εἶχον κάμει προηγουμένως ὁ Barrow καὶ πρὸ πάντων ὁ Pascal. Τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὅμοιον τόσον πρὸς ἐκεῖνο ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην, ὑφαπτομένην, καὶ τεταγμένην, ὅσον καὶ πρὸς τὸ ἀνάλογον ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον, ὑποκάθετον καὶ τεταγμένην. Ἐκ τῆς διαπιστώσεως αὐτῆς ἤχθη εἰς τὴν θεμελιώδη ἀνακάλυψιν τῆς οὐσιαστικῆς ταυτότητος μεταξὺ τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων καὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων. Χρονολογεῖται δὲ ἡ ἐν λόγῳ ἀνακάλυψις ἀπὸ τοῦ

1673, ὡς προκύπτει ἀπὸ αὐθεντικὰ τεκμήρια ὑφιστάμενα μέχρι σήμερον.

Κατόπιν ἐνεβάθυνεν εἰς τὴν μελέτην τῶν μεθόδων, ποὺ εἶχον προταθῆ ἕως τότε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιπέδων καμπύλων καὶ δὲν ἐβράδυνε νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν ἔνδοξον σειράν, ποὺ παρέχει τὴν τιμὴν $\pi/4$ (§ 445). Ἡ ἀκριβὴς χρονολογία τοῦ σημαντικοῦ τούτου εὑρήματος δὲν εἶναι γνωστή, ἀλλ' ἐξ ὅλων τῶν δεδομένων τεκμαίρεται, ὅτι ἀνάγεται εἰς τὸ ἔτος 1674, ἂν μὴ καὶ προγενεστέρως, ἀφοῦ γίνεται μνεία τούτου εἰς ἐπιστολὴν τοῦ Huygens, ἀπὸ 7ης Νοεμβρίου τοῦ ἔτους τούτου, εἰς ἀπάντησιν προγενεστέρας (ἀπολεσθείσης) ἐπιστολῆς τοῦ Leibniz πρὸς αὐτόν. Καὶ εἶναι ἄξιον σημειώσεως, ὅτι ὁ διάσημος ὀλλανδὸς μαθηματικός, καταληφθεὶς ἀπὸ εὔλογον ἐνθουσιασμόν, προεφήτευσεν ὅτι ὁ τύπος ἐκεῖνος «ἦτο προωρισμένος νὰ γίνῃ ἔνδοξος εἰς τοὺς κύκλους τῶν γεωμετρῶν».

Ὅταν ὁ Leibniz συνεπλήρωσε τὸ ὑπόμνημα, διὰ τοῦ ὁποίου ἐσκόπει νὰ καταστήσῃ γνωστὴν τὴν νέαν ἀναλυτικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου (πρώτη διαμόρφωσις ἑνὸς ἔργου δημοσιευθέντος τὸ 1682 εἰς τὰ A.E.), ἐστράφη πάλιν πρὸς τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων καί, ἐνῷ ἐμελέτα μίαν ἀπόδειξιν τοῦ Pascal, τοῦ ἦρθεν εἰς τὸν νοῦν, ὡς ἀστραπή, ἡ ἀλήθεια τῆς σχέσεως:

$$N \cdot dx = y \cdot ds,$$

ἔνθα N τὸ μῆκος τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον, ὅπου ἔχει τὴν ἕδραν του τὸ ἀπειροστὸν τόξον ds. Ἐξ ἀφορμῆς τῶν σκέψεων τούτων, εἰσήγαγε τότε ὁ Leibniz τὸ νέον σύμβολον τοῦ ὁλοκληρώματος (τεταμένον τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Summa = ἄθροισμα), παριστῶν διὰ τοῦ συμβόλου $\int y$ τὴν ἰδίαν ποσότητα ποὺ ὁ Cavalieri ἐθεώρει ὡς ἄθροισμα τῶν τεταγμένων καὶ παρίστανε διὰ τοῦ συμβόλου Omn y (δηλαδὴ : ὅλα τὰ y). Ὁ Leibniz ἐξάγει ἀμέσως ὅτι εἶναι :

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}, \quad \int \frac{a}{b}\, y = \frac{a}{b} \int y \quad (a,\ b \quad \text{σταθεραί}),$$

$$\int y + \int z = \int (y + z).$$

«Πράγματα νέα καὶ ἀξιόλογα», λέγει δικαίως ὁ ἴδιος, «ὁδηγοῦντα εἰς νέον εἶδος λογισμοῦ». Προσθέτει ὅτι ἡ πρᾶξις ἡ δηλουμένη διὰ τοῦ συμβόλου $\int$ αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν διαστάσεων τῆς ποσότητος ἐφ' ἧς ἐφαρμόζεται καὶ ἐξετάζει τὴν ἀντίστροφον πρᾶξιν, ἡ ὁποία τοὐναντίον ἐπιφέρει μείωσιν καὶ τὴν ὁποίαν δηλοῖ διὰ τοῦ συμβόλου d. Ὅλα αὐτὰ ἀπαντῶνται εἰς ἕνα χειρόγραφον ὑπὸ χρονολογίαν 29 Ὀκτωβρίου 1675, χειρόγραφον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς π ο λ ύ τ ι μ ο ς λ ί θ ο ς εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν.

Φυσικὸν ἦτο νὰ ζητήσῃ ὁ Leibniz νὰ θέσῃ εἰς ἐφαρμογὴν τοὺς νέους ἀλγορίθμους ποὺ ἐνεπνεύσθη εἰς προβλήματα τρεχούσης ἐπικαιρότητος

διὰ τὴν ἐποχήν του. Καὶ πράγματι εἰς μερικὰς σελίδας ποὺ ἐγράφησαν τὴν 11ην Νοεμβρίου 1675 ἀπαντᾶται, μεταξὺ ἄλλων, καὶ ἡ λύσις τοῦ ἑξῆς προβλήματος: «Νὰ προσδιορισθῇ καμπύλη τοιαύτη, ὥστε ἡ ὑποκάθετος νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τεταγμένης». Πρόκειται περὶ ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{y}, \tag{1}$$

κατόπιν τῆς ὁποίας προκύπτει:

$$y^3 = 3a^2(x - x_0). \tag{2}$$

ἤτοι, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Leibniz, ἡ ζητουμένη καμπύλη εἶναι μία κυβικὴ παραβολή. Ἐν τῇ ρύμῃ τῆς ἐρεύνης του, ὁ γερμανὸς φιλόσοφος, ἀντικαθιστᾷ τὸ ἀρχικὸν σύμβολον x/d διὰ τοῦ dx, τὸ ὁποῖον καὶ ἐπέπρωτο νὰ παραμείνῃ μονίμως εἰς τὴν ἐπιστήμην μετὰ τοῦ ὁλοκληρώματος. «Τὸ αὐτὸ εἶναι», γράφει, «dx καὶ x/d, ἤτοι διαφορὰ μεταξὺ δύο γειτονικῶν x». Ἀντιμετωπίζει κατόπιν τὸ ζήτημα κατὰ πόσον τὸ d(xy) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $dx \cdot dy$ καὶ τὸ $d(x/y)$ ἴσον πρὸς τὸ dx/dy. Εἰς ἕνα χειρόγραφον τῆς 21ης Νοεμβρίου 1675 λύει ἀρνητικῶς τὸ πρῶτον διὰ τῆς σχέσεως :

$$ydx = d(xy) - xdy,$$

ἡ δὲ βαθυτάτη χαρά, τὴν ὁποίαν αἰσθάνεται διὰ τὰ εὑρεθέντα ἀποτελέσματα, διαφαίνεται εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Oldenburg ὑπὸ χρονολογίαν 29 Δεκεμβρίου 1675.

Ὅτι ἡ μέθοδός του ἦτο ἱκανὴ νὰ ὁδηγήσῃ ἐπίσης εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων καὶ τοῦ ἀντιστρόφου, δηλοῦται εἰς μερικὰς σελίδας, ποὺ ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν ἴδιον, κατὰ Ἰούνιον καὶ Ἰούλιον τοῦ 1676, καὶ εἰς τὰς ὁποίας γίνεται νύξις περὶ τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε προτείνει ὁ Debeaune εἰς τὸν Descartes (§ 347). Ἡ λύσις τοῦ ἁπλουστέρου εὑρίσκεται εἰς τὸ ὑπόμνημα Nova methodus, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω. Τὸ ἄλλο συνίσταται εἰς τὸ «νὰ εὑρεθῇ καμπύλη εἰς τὴν ὁποίαν ὁ λόγος τεταγμένης καὶ ὑφαπτομένης νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον δοθέντος μήκους πρὸς τὸ μεταξὺ καμπύλης καὶ δοθείσης εὐθείας περιλαμβανόμενον μέρος τῆς τεταγμένης». Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς γραμμικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν α΄ τάξεως. Ἐὰν ὁ Leibniz ἐπέτυχεν ἀπὸ τότε νὰ τὴν ὁλοκληρώσῃ, ἀσφαλῶς ἡ μέθοδός του δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ διαφέρῃ οὐσιωδῶς ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὑπέδειξεν διὰ μερικῶν νύξεων εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν de l' Hôpital τὴν 27ην Δεκεμβρίου 1694* καὶ τὴν ὁποίαν ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Gabriele Manfredi ὑπὸ χρονολογίαν 10 Ἀπριλίου 1708 (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, T. IX. σελ. 274).

* Λέγεται μάλιστα ἀκόμη ἐκεῖ, ὅτι ὁ Leibniz ἐγνώριζε νὰ ὁλοκληρώνῃ τὰς διαφορικὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις α΄ τάξεως.

Ἐξ ὅλων τούτων συνάγεται, ὅτι ὁ μαθηματικός μας, κατὰ τὴν εἰς Παρισίους διαμονήν του, εἶχε δημιουργήσει ἀπειροστικὰς μεθόδους ἀναμφισβητήτου πρωτοτυπίας καὶ θαυμαστῆς δυνάμεως, εἰς τὰς ὁποίας ἀντικατοπτρίζεται ἡ μεγάλη ροπή του πρὸς τὸν συμβολισμόν, περὶ τοῦ ὁποίου δικαίως ἐκήρυττεν εἰς μίαν δοθεῖσαν εὐκαιρίαν, ὅτι «τὰ σύνθετα πράγματα θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀναλυθοῦν εἰς τὰ στοιχεῖα των ὑπὸ τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως, χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν χαρακτήρων», εἰς ἄλλην δὲ περίστασιν, ὅτι «ἕνα μέρος τοῦ μυστικοῦ τῆς ἀναλύσεως συνίσταται εἰς τὴν χαρακτηριολογίαν, τουτέστι εἰς τὴν τέχνην τῆς καλῆς χρήσεως τῶν ἀπαιτουμένων χαρακτήρων».

Διὰ τοῦτο, ἀπαντῶν (27 Αὐγούστου 1676) εἰς τὴν ἐπιστολὴν τοῦ Oldenburg τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν I ἐπιστολὴν τοῦ Newton (§ 437), ἔκαμε δικαίως τὴν δήλωσιν, ὅτι ἐπρόκειτο περὶ πραγμάτων ἐχόντων ἀνάλογον σκοπόν, ἀλλὰ τῶν ὁποίων ἡ φύσις ἦτο διάφορος τῶν ἰδικῶν του. Τὸ ὁποῖον καὶ ἐπεβεβαίωσε λαμβάνων τὴν II ἐπιστολήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔκαμεν ἀπαρίθμησιν τῶν προβλημάτων ποὺ ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ, ἀλλὰ συμμορφούμενος πρὸς τὴν συνήθειαν τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς νὰ ἐκφωνοῦν τὰ προβλήματα, νὰ δίδουν ἀκόμη καὶ τὰς λύσεις των, ἀλλὰ ν' ἀποκρύπτουν τὰς μεθόδους ποὺ ἐχρησιμοποίησαν, δὲν προέβη καὶ ὁ ἴδιος εἰς ἀνάλυσιν τῶν μεθόδων του *.

Παρὰ ταῦτα ἕνα χειρόγραφόν του, φέρον χρονολογίαν 11 Ἰουλίου 1677 καὶ τίτλον Méthode générale pour mener les touchantes des lignes courbes sans calcul et sans réduction des quantités irrationnelles (Μέθοδος χαράξεως τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας χωρὶς λογισμὸν καὶ μάλιστα ἄνευ ἀναγωγῆς τῶν ἀρρήτων ἐκφράσεων), ἐπιτρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἶχε περάσει τότε ἀπὸ τὸν νοῦν του ἡ ἰδέα, ἔστω καὶ πρὸς στιγμήν, ν' ἀποκαλύψῃ τὸ μυστικόν του. Ὅτι δὲ παρῃτήθη τῆς ἰδέας του, μὲ τὸν σκοπὸν νὰ τελειοποιήσῃ ἔτι μᾶλλον τὴν μέθοδόν του, προκύπτει ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του μὲ τὸν Tschirnhausen κατὰ τὰ ἔτη 1678-1684.

452. Ἡ ἀλληλογραφία του μὲ τὸν Tschirnhausen εἶναι ἀκριβῶς ἡ αἰτία ἡ ὠθήσασα τὸν Leibniz ν' ἀποκαλύψῃ τὰς ὑπ' αὐτοῦ ἐπινοηθείσας μεθόδους. Διότι ὁ Tschirnhausen, μὴ δυνάμενος νὰ κατανοήσῃ τὸ πνεῦμα καὶ τὴν σπουδαιότητα τοῦ νέου ἀλγορίθμου, ἐνόμισεν ὅτι ἐνεπνεύσθη ἰδικόν του τρόπον τετραγωνισμοῦ. Ὁ Leibniz τότε, κατ' ἰδίαν, τοῦ διεφιλονίκησε τὴν πρωτοτυπίαν. Ὅταν ὅμως, παρὰ ταῦτα, ὁ Tschirnhausen ἐδημοσίευσε τὴν μέθοδόν του εἰς τὰ A.E. τοῦ Ὀκτωβρίου 1683, ὁ Leibniz, ἀφοῦ διεπίστωσε τὴν οὐσια-

* Τὸ μοναδικόν του δημοσίευμα τῆς ἐποχῆς ἐκείνης εἶναι ἕνα ἄρθρον καταχωρηθὲν εἰς τὴν J.S. (= Journal des Sçavants) ὅπου ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις ἑνὸς κυκλοειδικοῦ ἐμβαδοῦ τετραγωνισίμου, διαφόρου τοῦ ἀνακαλυφθέντος προτήτερα ἀπὸ τὸν Huygens (§ 408).

στικὴν σύμπτωσιν αὐτῆς μὲ τὴν ἰδικήν του, ἀντελήφθη τὴν ἀνάγκην τῆς κατοχυρώσεως τῶν δικαιωμάτων του διὰ μιᾶς ἐμπεριστατωμένης ἐκθέσεως τῶν ἰδεῶν του. Καὶ οὕτω ἔλαβεν ὑπόστασιν ἕνα ἀπὸ τὰ ἐξοχώτερα κείμενα τῆς μαθηματικῆς γραμματείας ὑπὸ τὸν ἱστορικὸν τίτλον: Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus[37]. Τὸ ἐν λόγῳ ὑπόμνημα ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ A.E. Ὀκτωβρίου 1684.

Διὰ νὰ λάβωμεν ἰδέαν τῆς τεραστίας σπουδαιότητος τοῦ ἐν λόγῳ κειμένου, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν ἕνα πίνακα τῶν περιεχομένων ἀποτελεσμάτων: Τοῦ a ὄντος σταθεροῦ, τῶν δὲ x, y, ... μεταβλητῶν, ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$da = 0, \quad dax = adx \tag{1}$$

$$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx \tag{2}$$

$$dxw = xdw + wdx \tag{3}$$

$$d\,\frac{v}{y} = \frac{\pm\, vdy \mp ydv}{y^2} \tag{4}$$

(ὅπου ἡ ἀοριστία τῶν σημείων ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ὁ Leibniz δὲν εἶχε καθορίσει συμβατικῶς τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων)

$$dx^a = ax^{a-1}\,dx \quad (5), \qquad d\,\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,\sqrt[b]{x^{a-b}\cdot dx} \tag{6}$$

$$d\,\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\,\frac{a\,dx}{b\,\sqrt[b]{x^{a+b}}} \tag{7}$$

(ἐδῶ ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν τὸ σημεῖον : πρὸς δήλωσιν τῆς διαιρέσεως).

Ὁ μέγας μαθηματικὸς παρατηρεῖ ὅτι οἱ δύο τελευταῖοι τύποι περιέχονται εἰς τὸν προηγούμενον, ὅταν ἀποδίδωνται εἰς τὸν ἐκθέτην τιμαὶ μὴ ἀκέραιαι καὶ θετικαί, ἀλλὰ δοθείσης τῆς ἐλλείψεως μεγάλης οἰκειότητος τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς μὲ ἐκθέτας τυχόντας, ἐθεώρησε καλὸν νὰ τοὺς πραγματευθῇ ἰδιαιτέρως.

Ἀποδεικνύει κατόπιν ὅτι ἕνα maximum ἢ ἕνα minimum χαρακτηρίζεται πάντοτε ἀπὸ τὸν μηδενισμὸν τῆς πρώτης παραγώγου, ἐνῷ πρὸς διάκρισιν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τοῦ ἄλλου εἰσάγει τὸ κριτήριον τῆς δευτέρας παραγώγου. Ὁ μηδενισμὸς αὐτῆς διὰ τὴν συνάρτησιν f(x) λαμβάνει χώραν εἰς τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης $y = f(x)$.

Οὐχὶ ἄνευ λόγου ἐπιμένει ὁ Leibniz ἐπὶ τοῦ γεγονότος, ὅτι οἱ κανόνες του διὰ τὴν διαφόρισιν εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἀκόμη καὶ εἰς συναρτήσεις, εἰς

τὰς ὁποίας εἰσέρχονται κλάσματα καὶ ριζικὰ καὶ διὰ νὰ δείξῃ τοῦτο ἐπὶ συνθέτου παραδείγματος διαφορίζει ἐπακριβῶς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + \frac{ax\sqrt{g^2+y^2} + y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} = 0.$$

Διὰ νὰ δείξῃ περαιτέρω πῶς ἐφαρμόζονται οἱ κανόνες του διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀκροτάτων τιμῶν εἰς τὰς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, πραγματεύεται τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα:

«Δοθέντων δύο σημείων E, C ἑκατέρωθεν εὐθείας SS τοῦ ἐπιπέδου, εὑρεῖν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον F τοιοῦτον, ὥστε ἡ ποσότης:

$$h \cdot EF + r \cdot FC$$

(h, r δεδομέναι σταθεραὶ) νὰ γίνεται ἐλαχίστη».

Αὐτὸ εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν, τὸ πρόβλημα τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτός, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασεν ὁ Leibniz εἶναι σύμφωνον πρὸς τὸν νόμον Snellius - Descartes (μὲ τὸν ὁποῖον εἶχεν ἤδη ἀσχοληθῆ ὁ Leibniz εἰς τὰ A.E. τοῦ 1662) καὶ ἐπιβεβαιοῖ τὴν ἀρχὴν ποὺ διεκήρυξεν ὁ Fermat (ἐπιστολὴ πρὸς C. de la Chambre, 1 Ἰανουαρίου 1662), δυνάμει τῆς ὁποίας «ἡ φύσις δρᾷ πάντοτε διὰ τῶν συντομωτέρων ὁδῶν» (La nature agit toujours par les voies les plus courtes).

Εἰς τὸν τίτλον τοῦ ὑπομνήματος, περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, ὁ Leibniz βεβαιώνει ὅτι ἡ νέα μέθοδος εἶναι ἀκόμη ἐφαρμόσιμος εἰς τὴν κατασκευὴν ἐφαπτομένων τυχούσης καμπύλης εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁποίας ὑπεισέρχονται καὶ ἐκφράσεις μὴ ρηταί. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐκλέγει ὡς παράδειγμα τὸ προταθὲν ὑπὸ τοῦ Descartes (εἰς ἐπιστολὴν τοῦ Fermat πρὸς Carcavy ὑπὸ χρονολογίαν 20 Αὐγούστου 1650). Πρόκειται περὶ τῆς καμπύλης - τόπου τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι σταθερὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ ἀριθμόν τινα δεδομένων σταθερῶν σημείων. Ὁ Leibniz ἐπιτυγχάνει τὸν σκοπόν, κατανικῶν οὕτω μίαν δυσκολίαν, τὴν ὁποίαν ὁ διάσημος γάλλος φιλόσοφος ἐθεώρησεν ἀνυπέρβλητον.

Τέλος ἀποδεικνύει ὅτι ἡ καμπύλη ἡ ἔχουσα ἐφαπτομένην σταθερὰν εἶναι λογαριθμικὴ καμπύλη τοῦ γένους:

$$ln\, y = \frac{x}{a} + c', \quad ἢ \quad y = c e^{\frac{x}{a}}.$$

Οὕτω ἔλυσε τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ κατ' ἐπανάληψιν μνημονευθέντα προβλήματα ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Debeaune εἰς τὸν Descartes.

Εἰς τὸν Leibniz ἀνήκουν ἐπίσης τὰ πρῶτα ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως, διότι εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Ἰωάννην Bernoulli (6 - 16 Μαρτίου 1695) ἀπαντᾶται ὁ διάσημος τύπος

ὁ χρησιμεύων εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς nστῆς παραγώγου ἑνὸς γινομένου δύο παραγόντων:

$$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-1} u' v^{(n-1)} + \binom{n}{n} u v^{(n)}.$$

Ἡ μορφολογικὴ συγγένεια μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ διωνύμου δυνάμεως n τὸν ὡδήγησεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι ὑπάρχουν ἀναλογίαι μεταξὺ δυνάμεων καὶ παραγώγων, εἰς εὕρεσιν τῶν ὁποίων παρώτρυνε τὸν νεαρὸν τότε Bernoulli νὰ ἐπιδοθῇ. Δὲν φαίνεται ὅμως ὅτι ἡ πρότασίς του εὗρεν ἀνταπόκρισιν.

453. Θὰ ὁμιλήσωμεν τώρα διὰ τὰ δημοσιεύματα τοῦ Leibniz τὰ ἀφορῶντα τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν. Εἰς ἄρθρα του δημοσιευθέντα κατὰ τὰ ἔτη 1702, 1703 εἰς τὰ A.E., ἀπησχολήθη ἐπιτυχῶς μὲ τὴν διὰ σειρῶν ὁλοκλήρωσιν ὡς καὶ μὲ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ρητῶν συναρτήσεων, εἰς ἣν περίπτωσιν ὁ παρονομαστὴς δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς διώνυμα πρωτοβάθμια, τονίζων τὰς συμφυεῖς δυσκολίας, ὅταν ἡ ἐν λόγῳ συνθήκη δὲν πληροῦται.

Ὅτι ὁ Leibniz ἔστρεψε τὴν σκέψιν του ἐπίσης εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν μὴ ρητῶν συναρτήσεων ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἕνα ἀπόσπασμα, γνωσθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσονται μερικαὶ ἰδέαι σκιαγραφούμεναι ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Ἰωάννην Bernoulli τὸν Ἀπρίλιον τοῦ 1705. Εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἀπόσπασμα ἐξετάζονται τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου:

$$\int f(x)\sqrt[q]{F(x)}\cdot dx,$$

χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ ὑπάρχουν εἰς αὐτὸ ἀποτελέσματα ὁριστικοῦ χαρακτῆρος, πρᾶγμα ἄλλωστε ἀδύνατον ἄνευ προηγουμένης ταξινομήσεως τῶν θεωρουμένων συναρτήσεων. Εἰς αὐτὸν πάντως ἀνήκει ἡ παρατήρησις (A.E., 1686) ὅτι τὰ σύμβολα:

$$d \text{ καὶ } \int$$

ἐπιτρέπουν τὴν ἐξάλειψιν τῶν ὑπερβατικῶν συναρτήσεων εἰς τινας μὴ ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις. Παράδειγμα ἡ συνήθης κυκλοειδὴς ἡ γεννωμένη ὑπὸ κύκλου ἀκτῖνος 1, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Ὁ Leibniz πρῶτος ἐθεώρησεν ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας ὠνόμασεν ὁ ἴδιος *ὑπερβατικὰς* (trascendenti), ὅπου ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται εἰς τὸν

ἐκθέτην (J.S., 1692) καὶ ἀπέδειξεν ὅτι διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς τοὺς λογαρίθμους. Οὕτω, ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$c^x = a \cdot b^{x-1}$$

εὗρε, διὰ λογαρίθμων ἐκπεφρασμένην, τὴν λύσιν:

$$x = \frac{\lambda o\gamma\, a - \lambda o\gamma\, b}{\lambda o\gamma\, c - \lambda o\gamma\, b}.$$

Ἐφείλκυσεν ἐπίσης τὴν προσοχήν του τὸ ζήτημα τῆς «γωνίας συνεπαφῆς» (§ 416), τὸ ὁποῖον οὗτος (A.E., 1686) συνεδύασε μὲ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς ἐγγύτητος ἐπαφῆς (osculazione) καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἐνειλιγμένων τοῦ Huygens (§ 408). Αἱ σειραὶ τῶν ὁποίων εἶχεν ἀποδείξει τὴν χρῆσιν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (A.E., Ἀπρίλιος 1693), ἐμελετήθησαν ὑπ' αὐτοῦ ἐξ ἀφορμῆς τῆς περιέργου ἀκολουθίας:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

ἡ ὁποία, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸν Τόμον III, συνδέεται μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Guido Grandi.

Τίποτε δὲν εἶναι ἀποτελεσματικώτερον διὰ τὴν ἀποδοχὴν τῶν νέων μεθόδων λογισμοῦ ἀπὸ τὴν ἔμπρακτον ἐφαρμογήν των εἰς τὴν λύσιν νέων καὶ ἐνδιαφερόντων προβλημάτων. Ἔχων πλήρη συνείδησιν τούτου ὁ Leibniz, δὲν παρέλειψε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὰς μεθόδους του εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἐπὶ τῆς ἐποχῆς του εὑρίσκοντο εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ ἐνδιαφέροντος τῶν μαθηματικῶν. Ἀναφέρομεν τὰ σπουδαιότερα: α) Προσδιορισμὸς (A.E. 1689) τῆς ἰσοχρόνου τροχιᾶς (τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν διατρέχει ἄνευ ἐπιταχύνσεως), πρόβλημα γνωστότατον εἰς ὅσους γνωρίζουν τὴν φιλονικίαν του μὲ τοὺς Καρτεσιανούς, β) τὸ ἀνάλογον πρόβλημα διὰ τὴν ἁλυσοειδῆ (A.E. 1691, 1692 καὶ 1699), τὴν παράκεντρον ἰσόχρονον (A.E. 1694), τὴν «linea celerrimi descensus» ἤτοι τὴν «βραχιστόχρονον» (τὴν ἔρευναν εἶχε προτείνει ὁ Ἰωάννης Bernoulli, εἰς πρόκλησιν τοῦ ὁποίου ὀφείλεται καὶ ἄλλη ἐργασία τοῦ Leibniz, A.E. 1693), γ) λύσις τοῦ «φλωρεντινοῦ αἰνίγματος» τοῦ προταθέντος ὑπὸ τοῦ V. Viviani (§ 323) (εἰς κείμενον δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατόν του), δ) ἔρευνα ἐπὶ τῆς ἑλκομένης (A.E. 1693), προκληθεῖσα ἐξ ἀφορμῆς ἑνὸς προβλήματος προταθέντος ὑπὸ τοῦ ἰατροῦ Perrault (ἐπιστολὴ πρὸς Huygens, 1 - 11 Ὀκτωβρίου 1693).

Ὁ Leibniz ἔστρεψεν ἐπίσης τὸ ἐνδιαφέρον του πρὸς ἐφαρμογὰς τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰς κοινωνικὰς συναλλαγάς. Εἰς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ τὸ ἄρθρον του Meditatio juridica - mathematica, de interusurio simplice [38] (A.E. Ὀκτωβρίου 1683). Τὸ αὐτὸ θέμα πραγματεύεται μεταγενεστέρως καὶ ὁ Ἰωάννης Bernoulli εἰς ἄρθρον του ὑπὸ τὸν τίτλον Quaestiones nonnullae

de usuris (Προβλήματά τινα τόκων) (A.E. Μαΐου 1690) καὶ πολὺ μετέπειτα ὁ κόμης Girolamo Rinaldi (καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova 1751 - 1769), ὅπως διαπιστοῦται ἐκ τοῦ περιεχομένου τοῦ τρίτου καὶ τελευταίου τόμου τοῦ ἔργου του Opuscula geometrica et analytica (Padova 1769· οἱ ἄλλοι δύο τόμοι πραγματεύονται τὴν κατασκευὴν κωνικῆς ἐκ τῆς καρτεσιανῆς ἐξισώσεώς της καὶ τὴν ἄθροισιν ὡρισμένων σειρῶν).

Ὅπως ἦτο δυνατὸν νὰ προβλεφθῇ, ἡ πρωτοτυπία καὶ ἡ τολμηρότης τῶν μεθόδων τοῦ Leibniz προεκάλεσαν κάποιαν ἀντίδρασιν, ἡ ὁποία ἔπρεπε ταχέως νὰ ὑπερνικηθῇ. Πράγματι δὲ ὁ φιλόσοφος τῆς αἰσιοδοξίας ἐθεώρησεν ὅτι ἤξιζε τὸν κόπον ν' ἀνασκευάσῃ (A.E. 1695) τὰς «ἐπιφυλάξεις ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἀναλύσεως τῶν ἐφαρμοζομένων εἰς ἀπείρως μικρὰς ποσότητας» (Amstelod. 1695), ποὺ διετύπωσεν ὁ Bernard Nieuwentijt, ἰατρὸς καὶ δήμαρχος μιᾶς μικρᾶς ὁλλανδικῆς πόλεως (γενν. 19 Αὐγούστου 1654, ἀποθ. 30 Μαΐου 1718). Αἱ ἀντιρρήσεις τοῦ ἰατροῦ εἶναι δύο εἰδῶν. Αἱ μὲν ἔχουν χαρακτῆρα μᾶλλον φιλοσοφικόν, ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἔννοιαν τῶν ἀπειροστῶν διαφόρων τάξεων. Πρόκειται περὶ δυσκολιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξένισαν πολλοὺς καὶ ὄχι μόνον εἰς τὴν πρώτην φάσιν ἐξελίξεως τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως, ἀλλ' αἱ ὁποῖαι εὐτυχῶς δὲν ἠμπόδισαν τὴν θριαμβευτικὴν πρόοδον αὐτῆς. Αἱ ἄλλαι εἶναι τεχνικοῦ χαρακτῆρος, καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς τὴν διαφόρισιν μιᾶς ἐκφράσεως τῆς μορφῆς u^v. Διὰ ν' ἀποδείξῃ τὸ ἀβάσιμον τῶν ἀντιρρήσεων, ὁ Leibniz ἐχάραξε μίαν ὁδὸν ἡ ὁποία ἀκολουθεῖται μέχρι σήμερον. Ἐκ τῆς σχέσεως:

$$w = u^v \tag{1}$$

λαμβάνει τὴν λογαριθμικὴν ἔκφρασιν:

$$ln\, w = v\, ln\, u \tag{2}$$

καὶ ἐκ ταύτης διαδοχικῶς:

$$\frac{dw}{w} = dv \cdot ln\, u + v \cdot \frac{du}{u} \tag{3}$$

$$dw = u^v\, ln\, u\, dv + vu^{v-1}\, du \tag{4}$$

Τοιουτοτρόπως συνεπλήρωσεν εἰς ἕνα σημαντικὸν σημεῖον τὰς μέχρι τοῦδε συμβολάς του εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν.

Ὁ Leibniz ἠσχολήθη ἐπίσης ἐπιμόνως καὶ ἐπιτυχῶς μὲ τὸν λογισμὸν τῶν πεπερασμένων διαφορῶν, δὲν ἐδημοσίευσεν ὅμως τὰς πολυαρίθμους σελίδας ποὺ εἶχεν ἀφιερώσει ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου. Ἐν ἀναμονῇ τῆς δημοσιεύσεως αὐτῶν εἰς τὴν ὁριστικὴν καὶ πλήρη ἔκδοσιν τῶν Ἁπάντων τοῦ φιλοσόφου, ὁ ἀναγνώστης δύναται ν' ἀντλήσῃ ἐπ' αὐτοῦ σημαν-

τικὰς πληροφορίας εἰς τὸ ὑπόμνημα Die Differenzrechnung bei Leibniz ὑπὸ Jos. E. Hofmann καὶ H. Wieleitner μετὰ προσθηκῶν ὑπὸ D. Mahnke (Πρακτικὰ τῆς Πρωσσικῆς Ἀκαδημίας ἐπιστημῶν, T. XXVI, 1931).

Ἀριθμητικὴ καὶ Ἄλγεβρα

454. Ἡ σύλληψις καὶ ἐπεξεργασία τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἀποτελοῦν θέματα τοιαύτης ἐκτάσεως, ὥστε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ὑποθέσῃ κανεὶς ὅτι αὐτὰ καὶ μόνον ἀπερρόφησαν ὁλόκληρον τὴν μαθηματικὴν δραστηριότητα τοῦ Leibniz, ὅταν μάλιστα ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι πολλαὶ ἐκ τῶν μελετῶν του ἀφοροῦν ζητήματα μηχανικῆς καὶ φυσικῆς (ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ διατρίψωμεν) καὶ ὅτι μέγα μέρος τοῦ χρόνου του ἀπερροφᾶτο ἀπὸ ἐπίσημα καθήκοντα, ἀπὸ ἐρεύνας τῶν ἀρχείων καὶ ἀπὸ ἱστορικοῦ χαρακτῆρος δημοσιεύματα. Ὁ μέγας ὅμως ἐκεῖνος νοῦς, καθ' ὅλην του τὴν ζωήν, διετήρησε τὴν ἀκόρεστον ἰδιοσυγκρασίαν τῆς παιδικῆς ἡλικίας, ἕνεκα τῆς ὁποίας τοῦ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἱκανοποιηθῇ μὲ ἕνα μόνον εἶδος τροφῆς (§ 444). Τὸ ἀνήσυχον πνεῦμα του ἐνδιεφέρετο δι' ὅλα καὶ ἀπετύπωνε μὲ εὐστροφίαν τὴν συμβολήν του ἐφ' ὅλων τῶν θεμάτων, τῶν ὁποίων ἐπελαμβάνετο. Δὲν ὑπάρχει κλάδος τῶν μαθηματικῶν, εἰς τὸν ὁποῖον νὰ μὴ ἔχῃ ἐπιφέρῃ κάποιαν βελτίωσιν ἢ προσθήκην καὶ εἶναι λυπηρὸν τὸ γεγονὸς ὅτι πλεῖσται ἰδέαι του ἔχουν γραφῇ εἰς χιλιάδας χειρογράφων, τὰ ὁποῖα, ταφέντα εἰς τὰς θήκας μιᾶς ἀρχαίας βιβλιοθήκης, παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα, ἐνῷ ἄλλα εἶδον τὸ φῶς, ὅταν τὸ περιεχόμενον αὐτῶν εἶχεν ἤδη γίνει ἀντικείμενον ἐκμεταλλεύσεως καὶ μέσον προωθήσεως τῆς ἐπιστήμης. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν μᾶς ἀπαλλάσῃ φυσικὰ τῆς ὑποχρεώσεως νὰ καταστήσωμεν γνωστὰ εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας ὅσα τοὐλάχιστον περιῆλθον εἰς γνῶσιν μας.

Θὰ σημειώσωμεν προπάντων, ὅτι ὅσον ὁ Leibniz ἐνεβάθυνεν εἰς τὴν μελέτην τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, τόσον περισσότερον ἐπείθετο περὶ τῆς ἀνάγκης αὐστηρᾶς θεμελιώσεως τῶν βάσεων τοῦ ὅλου πνευματικοῦ οἰκοδομήματος. Καὶ ἐθεώρει ὅτι ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα ὄχι μόνον ἡ τελειοτέρα διαμόρφωσις αὐτῶν, ἀλλ' ἐπίσης ἡ ἐπεξεργασία ὁμαλῆς καὶ ἀνέτου ὁδοῦ εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπεθύμουν νὰ καλλιεργήσουν περαιτέρω τὴν ἐπιστήμην. Καὶ μάλιστα προμαχεῖ ὁ ἴδιος ὑπὲρ τῆς ἰδέας μιᾶς «τέχνης τοῦ ἐφευρίσκειν» (Ars inveniendi), ὅπως πιστοποιεῖται ἀπὸ ὡρισμένα χειρόγραφά του φέροντα τὸν τίτλον: Clavis mathematica arcana, Inventarium mathematicum, Thesaurus mathematicus (Μυστικὴ μαθηματικὴ κλείς, μαθηματικὸν ἐφευρηματάριον, μαθηματικὸς θησαυρός). Τὰ χειρόγραφα αὐτὰ εἶναι μεταγενέστερα τῆς ἐπινοήσεως τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ἐκ τούτων δὲ μερικὰ ἀποβλέπουν εἰς μύησιν τῶν ἀρχαρίων, ἄλλα δὲ εἰς ἐξυπηρέτησιν τῶν φιλοδοξούντων νὰ τεθοῦν ἐπὶ τὰ ἴχνη νέων ἀνακαλύψεων.

τικὰς πληροφορίας εἰς τὸ ὑπόμνημα Die Differenzrechnung bei Leibniz ὑπὸ Jos. E. Hofmann καὶ H. Wieleitner μετὰ προσθηκῶν ὑπὸ D. Mahnke (Πρακτικὰ τῆς Πρωσσικῆς Ἀκαδημίας ἐπιστημῶν, T. XXVI, 1931).

Ἀριθμητικὴ καὶ Ἄλγεβρα

454. Ἡ σύλληψις καὶ ἐπεξεργασία τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἀποτελοῦν θέματα τοιαύτης ἐκτάσεως, ὥστε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ὑποθέσῃ κανεὶς ὅτι αὐτὰ καὶ μόνον ἀπερρόφησαν ὁλόκληρον τὴν μαθηματικὴν δραστηριότητα τοῦ Leibniz, ὅταν μάλιστα ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι πολλαὶ ἐκ τῶν μελετῶν του ἀφοροῦν ζητήματα μηχανικῆς καὶ φυσικῆς (ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ διατρίψωμεν) καὶ ὅτι μέγα μέρος τοῦ χρόνου του ἀπερροφᾶτο ἀπὸ ἐπίσημα καθήκοντα, ἀπὸ ἐρεύνας τῶν ἀρχείων καὶ ἀπὸ ἱστορικοῦ χαρακτῆρος δημοσιεύματα. Ὁ μέγας ὅμως ἐκεῖνος νοῦς, καθ' ὅλην του τὴν ζωήν, διετήρησε τὴν ἀκόρεστον ἰδιοσυγκρασίαν τῆς παιδικῆς ἡλικίας, ἕνεκα τῆς ὁποίας τοῦ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἱκανοποιηθῇ μὲ ἕνα μόνον εἶδος τροφῆς (§ 444). Τὸ ἀνήσυχον πνεῦμα του ἐνδιεφέρετο δι' ὅλα καὶ ἀπετύπωνε μὲ εὐστροφίαν τὴν συμβολήν του ἐφ' ὅλων τῶν θεμάτων, τῶν ὁποίων ἐπελαμβάνετο. Δὲν ὑπάρχει κλάδος τῶν μαθηματικῶν, εἰς τὸν ὁποῖον νὰ μὴ ἔχῃ ἐπιφέρῃ κάποιαν βελτίωσιν ἢ προσθήκην καὶ εἶναι λυπηρὸν τὸ γεγονὸς ὅτι πλεῖσται ἰδέαι του ἔχουν γραφῇ εἰς χιλιάδας χειρογράφων, τὰ ὁποῖα, ταφέντα εἰς τὰς θήκας μιᾶς ἀρχαίας βιβλιοθήκης, παραμένουν ἀκόμη ἀνέκδοτα, ἐνῷ ἄλλα εἶδον τὸ φῶς, ὅταν τὸ περιεχόμενον αὐτῶν εἶχεν ἤδη γίνει ἀντικείμενον ἐκμεταλλεύσεως καὶ μέσον προωθήσεως τῆς ἐπιστήμης. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν μᾶς ἀπαλλάσῃ φυσικὰ τῆς ὑποχρεώσεως νὰ καταστήσωμεν γνωστὰ εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας ὅσα τοὐλάχιστον περιῆλθον εἰς γνῶσιν μας.

Θὰ σημειώσωμεν προπάντων, ὅτι ὅσον ὁ Leibniz ἐνεβάθυνεν εἰς τὴν μελέτην τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, τόσον περισσότερον ἐπείθετο περὶ τῆς ἀνάγκης αὐστηρᾶς θεμελιώσεως τῶν βάσεων τοῦ ὅλου πνευματικοῦ οἰκοδομήματος. Καὶ ἐθεώρει ὅτι ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα ὄχι μόνον ἡ τελειοτέρα διαμόρφωσις αὐτῶν, ἀλλ' ἐπίσης ἡ ἐπεξεργασία ὁμαλῆς καὶ ἀνέτου ὁδοῦ εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπεθύμουν νὰ καλλιεργήσουν περαιτέρω τὴν ἐπιστήμην. Καὶ μάλιστα προμαχεῖ ὁ ἴδιος ὑπὲρ τῆς ἰδέας μιᾶς «τέχνης τοῦ ἐφευρίσκειν» (Ars inveniendi), ὅπως πιστοποιεῖται ἀπὸ ὡρισμένα χειρόγραφά του φέροντα τὸν τίτλον: Clavis mathematica arcana, Inventarium mathematicum, Thesaurus mathematicus (Μυστικὴ μαθηματικὴ κλείς, μαθηματικὸν ἐφευρηματάριον, μαθηματικὸς θησαυρός). Τὰ χειρόγραφα αὐτὰ εἶναι μεταγενέστερα τῆς ἐπινοήσεως τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ἐκ τούτων δὲ μερικὰ ἀποβλέπουν εἰς μύησιν τῶν ἀρχαρίων, ἄλλα δὲ εἰς ἐξυπηρέτησιν τῶν φιλοδοξούντων νὰ τεθοῦν ἐπὶ τὰ ἴχνη νέων ἀνακαλύψεων.

Εἶναι σελίδες ἀνωτέρας πνοῆς, τῶν ὁποίων, ἂν δὲν ἀπατώμεθα, δὲν ἔγινεν ἀκόμη ἡ προσήκουσα ἐκμετάλλευσις διὰ συγκομιδῆς ὅλων τῶν καρπῶν ποὺ εἶναι δυνατὸν ν' ἀποκομίσωμεν ἐξ αὐτῶν.

455. Στρέφοντες τώρα τὴν ἔρευναν εἰς τὰ εἰδικὰ θέματα ποὺ ἐμελέτησεν ὁ Leibniz, θὰ κάμωμεν ἁπλῆν μόνον νύξιν διὰ τὰς πολυαρίθμους σελίδας τὰς ἀφιερωμένας εἰς τὴν δυαδικὴν ἀριθμητικήν, ἡ ὁποία ἐφείλκυσε τὴν προσοχήν του ἐξ ἀφορμῆς πληροφοριῶν, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον αὐθεντικῶν, περὶ τῆς καταστάσεως τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Κίναν (§ 116, Τόμος I), θὰ ἐνδιατρίψωμεν δὲ μᾶλλον εἰς τὰς συμβολὰς ποὺ ἔδωσεν ὁ Leibniz εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν*, ἕνα κλάδον, πρὸς τὸν ὁποῖον ἦτο ἀδύνατον νὰ μὴ στρέψῃ τὴν προσοχήν του, ἀφοῦ ἔζησεν εἰς Παρισίους, ὅταν ἀκριβῶς ἐκυριάρχει εἰς τὸ μαθηματικὸν στερέωμα ἡ ἐπίδρασις τοῦ Fermat, καὶ εὑρίσκετο εἰς στενὰς σχέσεις μὲ τὸν Frenicle. Δὲν διέφυγον τῆς προσοχῆς του ἡ σπουδαιότης καὶ αἱ ἀτέλειαι τῆς θεωρίας τῶν πρώτων ἀριθμῶν. «Ἐὰν ἡ πρόοδός των ἦτο καλῶς γνωστή, θὰ μᾶς ἐχρησίμευεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ μυστηρίου τῶν ἀριθμῶν ἐν γένει», ἔγραψεν εἰς ἐπιστολήν του δημοσιευθεῖσαν εἰς τὴν Journal de Sçavants τοῦ Φεβρουαρίου 1678. Ἐκεῖ περιέγραφε τὴν ἐμπειρικήν του διαπίστωσιν (ἐξετάζων ὅλους τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς μὴ ὑπερβαίνοντας 510511), ὅτι ἂν ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς ἐλαττωθῇ κατὰ 1 ἢ 5, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6**, μὴ παραλείπων τὴν δήλωσιν, ὅτι τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει.

Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνάγεται (29 Δεκεμβρίου 1678) μία ἰδική του ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Fermat (§ 359), δυνάμει τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον. Ἐπὶ πλέον εἰς μερικὰς σελίδας ποὺ ἐδόθησαν προσφάτως εἰς τὸν τύπον, εὑρίσκεται ἡ κατάστρωσις τῆς πρώτης ἀποδείξεως τοῦ «μικροῦ» θεωρήματος τοῦ Fermat. Τὴν ἀπόδειξιν αὐτὴν ἔδωσεν ὁ Leibniz κατὰ τὴν διάρκειαν μακρῶν ἐρευνῶν του, διὰ τῶν ὁποίων ἀπέβλεπεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν ἑνὸς κριτηρίου πρὸς διάκρισιν τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ τοὺς συνθέτους. Εἶναι πιθανὸν ὅτι περὶ τοῦ θεωρήματος ἐκείνου εἶχεν ἀκούσει νὰ γίνεται λόγος, ὅταν ἦτο εἰς Παρισίους (ἂς ἐνθυμηθῇ ὁ ἀναγνώστης ὅτι ἡ πρώτη περὶ αὐτοῦ μνεία ἀπαντᾶται εἰς ἐπιστολὴν τοῦ Fermat πρὸς τὸν Frenicle ὑπὸ χρονολογίαν 18 Ὀκτωβρίου 1640). Ὅλα ὅμως ἄγουν εἰς τὸ

* Παραπέμπομεν σχετικῶς εἰς τὴν ἄκρως ἐνδιαφέρουσαν ἐπιστολὴν τοῦ Leibniz πρὸς τὸν Gallois τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1678.

** Ὅτι ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς μείζων τοῦ 3 ἔχει μίαν τῶν μορφῶν $6n \pm 1$ ἀνεκαλύφθη, πρὸ τοῦ Leibniz, ὑπὸ τοῦ ἐκ Bergamo ἱερέως Pietro Bongo (ἀποθ. 24 Σ/βρίου 1601), ὡς ἀποδεικνύει τὸ ἔργον Numerorum mysteria (Βενετία, 1599). Τὸ ἐσημείωσε δὲ ἐπίσης καὶ ὁ Cataldi (§ 298).

συμπέρασμα ὅτι τὴν ἀπόδειξιν ἐκείνην ἐνεπνεύσθη ὁ Leibniz προτοῦ λάβη γνῶσιν τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν τοῦ διασήμου γερουσιαστοῦ τῆς Τουλούζης.

Τοῦ θεωρήματος ἐκείνου ἐπεχείρησε νὰ κάμῃ μίαν ἀντιστροφήν, ἡ ὁποία θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κριτήριον ἀναγνωρίσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Πιθανὸν δὲ ἡ διαπίστωσις τῆς ἀτελείας τῶν συμπερασμάτων του νὰ ὑπῆρξεν ἡ αἰτία, ἡ ὁποία τὸν ἀπέτρεψεν ἀπὸ τοῦ νὰ κάμῃ μίαν τελικὴν ἐπεξεργασίαν καὶ νὰ δημοσιεύσῃ τὸ ὑπ' αὐτοῦ σχεδιαζόμενον κείμενον τῆς ἐκθέσεως τῶν ἀριθμητικῶν του ἐρευνῶν. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτὰς ὁ Leibniz ἐνίοτε ἐβάδιζεν ἐμπειρικῶς, συχνότατα ὅμως ἐφήρμοζε τὸν συνδυαστικὸν λογισμὸν καὶ μάλιστα μὲ τοιαύτην ἐπιτυχίαν, ὥστε ἀνεκάλυψε πρὸ τοῦ Wilson (Βλ. Τόμον III τῆς παρούσης Ἱ σ τ ο ρ ί α ς) τὸ ἀριθμητικὸν θεώρημα ποὺ φέρει τὸ ὄνομά του.

Εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν ἀπόδειξιν ἐφήρμοσε τὴν ἔκφρασιν τῆς δυνάμεως πολυωνύμου, τὴν ὁποίαν εὗρεν ὁ Leibniz τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1676 κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς ταξειδίου του ἀπὸ Ἀγγλίας εἰς Ὁλλανδίαν. Ἀπαντᾶται εἰς ἕνα κείμενον τοῦ ἰδίου φέρον τὸν τίτλον Nova algebrae promotio (Νέον βῆμα προόδου εἰς τὴν ἄλγεβραν) καὶ ἐπὶ πλέον γίνεται περὶ αὐτοῦ μνεία εἰς τὰς ἐπιστολὰς ποὺ ἔγραψεν ὁ Leibniz τὸ 1695 πρὸς τὸν Ἰωάννην Bernoulli. Μεταγενέστεραι πληροφορίαι ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἐρευνῶν του ἀναμένονται ἀκόμη νὰ μᾶς δοθοῦν, ὅταν δημοσιευθοῦν αἱ μέχρι τοῦδε ἀνέκδοτοι σελίδες τῶν χειρογράφων του.

456. Τοιουτοτρόπως ἐφθάσαμεν, χωρὶς σχεδὸν νὰ τὸ ἀντιληφθῶμεν, εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν πεδίον, ὅπου θὰ παραμείνωμεν διὰ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὁ Leibniz ἦτο ὁ πρῶτος ἀντιληφθεὶς τὴν χρησιμότητα τῆς ἐπισημάνσεως τῶν ἀλγεβρικῶν χαρακτήρων μὲ δύο δείκτας, τοὺς ὁποίους ὁ ἴδιος ἐχρησιμοποίει μὲ δεξιότητα πολὺ μεγαλυτέραν τῆς ἰδικῆς μας, ἀφοῦ εἰργάζετο μὲ δείκτας μὴ στηριζομένους ὑπὸ γραμμάτων. Λεπτομέρειαι ἐπ' αὐτοῦ τοῦ θέματος ἀπαντῶνται εἰς πλείστας σελίδας τῶν χειρογράφων του καὶ εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν μαρκήσιον de l' Hôpital (28 Ἀπριλίου 1693). Ἐκεῖ διδάσκει μίαν μέθοδον ἀπαλοιφῆς δ ύ ο ἀγνώστων μεταξὺ τ ρ ι ῶ ν γραμμικῶν ἐξισώσεων. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον γράφει τὰς ἐξισώσεις ὡς ἑξῆς:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0.$$

Πολλαπλασιάζων τὴν πρώτην ἐπὶ 22 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 12 καὶ ἀφαιρῶν τὰ ἐξαγόμενα φθάνει εἰς μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν μόνον τὸν x. Ἀνάλογος ἐργασία ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ τρίτης δίδει μίαν ἄλλην ἐξίσωσιν τοῦ αὐτοῦ τύπου. Διὰ συγκρίσεως τῶν τιμῶν τοῦ x μεταξὺ τῶν δύο τούτων

νέων ἐξισώσεων φθάνει εἰς τὸν σκοπὸν καὶ γράφει τὸ ἀποτέλεσμα ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 . \end{matrix}$$

Ὁ ἀναγνώστης θ' ἀναγνωρίσῃ εἰς τὰς παραστάσεις αὐτὰς μίαν ἐντυπωσιακήν, καίτοι ἐμβρυώδη, ὁμοιότητα πρὸς τὰς ὁριζούσας.

Ἡ ἀδιαφιλονίκητος σπουδαιότης τῶν σκέψεων αὐτῶν αὐξάνεται περαιτέρω ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ Leibniz ἐσημείωσεν ἀκόμη, ὅτι δύνανται αὗται, μὲ καταλλήλους μεταβολάς, νὰ ἐφαρμοσθοῦν καὶ εἰς περιπτώσεις ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ δύο ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων βαθμοῦ ἄνω τοῦ πρώτου. Ἐὰν πράγματι θεωρήσωμεν, χάριν παραδείγματος, τὰς δύο ἐξισώσεις:

$$10 + 11x + 12x^2 = 0,$$

$$20 + 21x + 22x^2 = 0,$$

ἂς πολλαπλασιασθοῦν ἡ πρώτη ἐπὶ $30 + 31x$ καὶ ἡ δευτέρα ἐπὶ $40 + 41x$, ὅπου οἱ ἀριθμοὶ 30, 31, 40, 41, ἐκλέγονται οὕτως, ὥστε εἰς τὰ δύο γινόμενα νὰ καθίστανται ἴσοι οἱ σταθεροὶ ὅροι καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν x καὶ x^2. Διὰ τὴν συνύπαρξιν τῶν δύο ἐξισώσεων, πρέπει νὰ προκύπτουν ἴσοι μεταξύ των καὶ οἱ συντελεσταὶ τοῦ x^3. Οὕτω λαμβάνονται ἐν ὅλῳ τέσσαρες ἐξισώσεις γραμμικαὶ ὁμογενεῖς ὡς πρὸς τὰς βοηθητικὰς αὐτὰς ποσότητας, ἡ δὲ ἀπαλοιφή των (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) ἄγει εἰς τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Ὁ Leibniz γράφει τοῦτο ὑποθέτων ὅτι ἰσοῦνται πρὸς τὴν μονάδα οἱ συντελεσταὶ 12 καὶ 22, πρᾶγμα δυνάμενον πάντοτε νὰ ἐπιτευχθῇ δι' ἀναγωγῆς. Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀνάλογοι σκέψεις εἶναι ἐν χρήσει καὶ σήμερον· δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἀμφιβολία ὅτι, ἂν αἱ σελίδες ποὺ ἐμνημονεύσαμεν περιήρχοντο εἰς γνῶσιν τοῦ μαθηματικοῦ κοινοῦ ἐνωρίτερον, ἡ θεωρία τῆς ἀπαλοιφῆς θὰ εἶχε πολὺ προτήτερα φθάσει εἰς τὴν ὡριμότητα.

Ὁ Leibniz ἠσχολήθη ἀκόμη μὲ τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐγγραμμάτων ἐξισώσεων παντὸς βαθμοῦ, προσπαθήσας νὰ κλονίσῃ τὴν πεποίθησιν τὴν ὁποίαν, ὅπως θὰ ἴδωμεν (§ 460), ἔτρεφεν ὁ Tschirnhausen, ὅτι δηλαδὴ θὰ ἠδύνατο νὰ εὕρῃ τρόπον λύσεως δι' ἀναλύσεως εἰς διωνύμους παράγοντας τῶν ἐξισώσεων. Δὲν παρέλειψε δὲ νὰ προσθέσῃ μερικὰς συνετὰς παρατηρήσεις εἰς τὰς σελίδας, ποὺ ἀφιέρωσεν εἰς τὴν ρητοποίησιν τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐχουσῶν ριζικὰ ὁ Ozanam εἰς τὸ ἔργον του Cours de mathématiques (§ 407).

Γεωμετρία

457. Πολὺ μέτριαι εἶναι αἱ συμβολαὶ τοῦ Leibniz εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρου ἔκαμε μίαν παρατήρησιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τοῦτο δὲν εἶναι κατὰ βάθος παρὰ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν πρότασιν καθ' ἣν τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγόμενον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη χωρίζεται ὑπὸ τοῦ ὕψους. Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἔφθασε διὰ συνθετικῆς ὁδοῦ, τοὐτέστιν ὑποθέτων τὸ θεώρημα γνωστὸν καὶ ἀνευρίσκων τὰς νομίμους αὐτοῦ ἀκολουθίας.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς Φλωρεντίαν τοῦ ἐπεδείχθη μία ἐργασία τοῦ Antonio di Monforte(§ 283), εἰς τὴν ὁποίαν περιείχοντο αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων ἐκείνων ποὺ εἶχον προταθῆ ἀπὸ ἕνα μαθηματικόν, κρυπτόμενον «ὑπὸ τὴν τράπεζαν», περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἤδη νύξις εἰς τὰ περὶ Viviani (§ 323). Ὁ Leibniz δὲν ἔμεινεν ἱκανοποιημένος ἀπὸ τὸ περιεχόμενον καὶ ἐξέθεσε τὰς ἀπόψεις του διὰ μακρᾶς ἐπιστολῆς πρὸς τὸν Magliabecchi. Λόγῳ τῆς μικρᾶς σημασίας τῶν προβλημάτων ἐκείνων, θεωροῦμεν ἄσκοπον νὰ μεταφέρωμεν ἐδῶ τὸ περιεχόμενον τῆς ἐπιστολῆς. Ἐν τέλει ἔκαμε μίαν προσθήκην, ἀφορῶσαν τὸν πλάγιον κῶνον, εἰς ὑπόμνημα τοῦ Varignon δημοσιευθὲν εἰς τὸν Τόμον III (1727) τῶν Miscellanea Berolinensia (Βερολίνεια Ἀνάλεκτα).

Αἱ ἐργασίαι αὐταὶ βεβαίως δὲν προσθέτουν νεώτερα φύλλα εἰς τὸν δάφνινον στέφανον, ὁ ὁποῖος κοσμεῖ τὴν σεβασμίαν κεφαλὴν τοῦ διασήμου μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου. Ἂν ἐκάμαμεν ἐδῶ ἁπλῆν μνείαν, ἦτο διὰ νὰ συμπληρώσωμεν μὲ μίαν τελευταίαν κίνησιν τοῦ χρωστῆρος τὸν πίνακα, ποὺ ἐπεχειρήσαμεν νὰ φιλοτεχνήσωμεν πρὸς ἀπεικόνισιν τῆς πολυσχιδοῦς καὶ καταπληκτικῆς ἐπιστημονικῆς του δραστηριότητος. Οἱ καρποὶ τοὺς ὁποίους ἀπέδωσεν ἡ δρᾶσις του δὲν ἦσαν μόνον μεγάλης σπουδαιότητος, ἀλλ' εἶχον συγχρόνως καὶ τοιαύτην καταφανῆ πρωτοτυπίαν, ὥστε θὰ ἦτο κυριολεκτικῶς ἐξωφρενικὸν νὰ πιστεύσῃ κανείς, ὅτι θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ τοῦ διαφιλονικηθῇ ἡ πατρότης. Καὶ ὅμως ἡ ἱστορικὴ ἀλήθεια εἶναι ὅτι τοῦτο ἀκριβῶς συνέβη, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ Κεφ. XXX (ποσάκις ἡ ἀλήθεια δὲν ἔχει ἀληθοφάνειαν!). Θὰ ἴδωμεν ὅμως ἐπίσης ὅτι τὰ πλήγματα, ποὺ ἐστράφησαν ἐναντίον του, δὲν κατώρθωσαν νὰ τὸν καταβιβάσουν ἀπὸ τὴν ὑψηλὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κατέλαβεν εἰς τὴν ἐπιστήμην, καὶ ἡ ὁποία, ἀντιθέτως, ἀναμένεται, ὅτι θὰ καταστῇ ἀκόμη ὑψηλοτέρα, ὅταν ὅλα τὰ χειρόγραφά του περιέλθουν, διὰ τοῦ τύπου, εἰς γνῶσιν τοῦ κοινοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIX

ΟΙ ΔΟΡΥΦΟΡΟΙ

ΜΕΡΟΣ Ι: ΟΙ ΠΕΡΙ ΤΟΝ NEWTON

458. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τελευταίας εἰκοσαετίας τοῦ XVII αἰῶνος, οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς συνετάχθησαν εἰς δύο πλανητικὰ συστήματα, ἔχοντα ὡς ἡλιακὰ κέντρα τοὺς δύο μεγάλους φωτοβόλους ἀστέρας, περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε λόγος εἰς τὸ προηγούμενον Κεφάλαιον. Τὸ μαθηματικὸν ἔργον πολλῶν ἐξ αὐτῶν καλύπτει ἕνα μέρος τοῦ ἑπομένου αἰῶνος, ἐπειδὴ ὅμως ἐκ τούτων ἀρκετοὶ διεδραμάτισαν κάποιον ρόλον, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον σημαντικόν, εἰς τὴν θεαματικὴν διαμάχην, τῆς ὁποίας αἱ φλόγες ἡμέραν μὲ τὴν ἡμέραν ἐλάμβανον μεγαλυτέρας διαστάσεις, θεωροῦμεν ὑποχρέωσιν νὰ τοὺς παρουσιάσωμεν ἀπὸ τοῦδε εἰς τοὺς ἀναγνώστας μας.

Πρῶτος ἐμφανίζεται ὁ διάσημος ἀστρονόμος ὁ ὁποῖος, ὅπως εἴδομεν (§ 430), διὰ τῆς ἐπεμβάσεώς του κατέστησε δυνατὴν τὴν δημοσίευσιν τῶν Principia τοῦ Newton: ὁ Edmond Halley. Οὗτος ἐγεννήθη πλησίον τοῦ Λονδίνου τὴν 8ην Νοεμβρίου 1656, ἐσπούδασεν εἰς τὸ Queens College τοῦ Oxford, χωρὶς νὰ λάβῃ πανεπιστημιακὸν τίτλον, διότι νεαρώτατος ἐπεχείρησεν ἕνα ταξείδιον εἰς τὴν Sant' Elena δι' ἀστρονομικοὺς σκοπούς. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἐξελέγη (7 Νοεμβρίου 1678) F.R.S., δηλαδὴ ἑταῖρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας, καὶ ἐδημοσίευσε σπουδαίας ἀλγεβρικὰς ἐργασίας εἰς τὰ «Transactions» τοῦ ἐνδόξου αὐτοῦ ἐπιστημονικοῦ σωματείου. Διεδέχθη τὸν Wallis εἰς τὴν ἕδραν ποὺ κατεῖχεν εἰς τὸ Oxford καὶ ἀπέθανε τὴν 14ην Ἰανουαρίου 1741 - 42.*

Ὅταν ἀπέθανεν ὁ David Gregory, ὁ Halley ἀνέλαβε νὰ φέρῃ εἰς πέρας (1710) τὴν ὑπ' ἐκείνου μελετωμένην ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (§ 402), προσθέτων ἐξ ἑαυτοῦ μίαν ἀληθοφανῆ ἀνάπλασιν, διὰ τῆς

* Αἱ ἀκραῖαι χρονολογίαι τῆς ζωῆς τοῦ Halley ποὺ ἀναφέρονται ἐδῶ ἐλήφθησαν ἀπὸ τὴν National Biography. Αἱ ὑφ' ἡμῶν ἀναφερθεῖσαι εἰς τὸν Τόμον I (§ 48) ἔχουν πηγὴν τὸ βιβλίον τοῦ Poggendorff: Biographisch — Litterarisches Handirörterbuch, ὁ ὁποῖος ἤντλησεν ἐκ πηγῶν παλαιοτέρων καὶ ὀλιγωτέρων προσιτῶν.

φαντασίας, τοῦ τελευταίου ἀπολεσθέντος Βιβλίου τῆς περιφήμου ἐκείνης συγγραφῆς τοῦ ἕλληνος γεωμέτρου.

Μετέφρασεν ἐπίσης ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὸ μικρότερον ἔργον τοῦ Περγαίου Περὶ λόγου ἀποτομῆς (§ 47, Τόμος I) ὑπὸ τὸν τίτλον De sectione rationis, ἐπεχείρησε δὲ λίαν ἐπιτυχῶς μίαν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου του Περὶ χωρίου ἀποτομῆς (De sectione spatii). Τέλος ὀφείλομεν ἀκόμη εἰς αὐτὸν μίαν πολύτιμον ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Σερήνου (Τόμος I, § 60).

Συναντῶμεν ἐν συνεχείᾳ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐπελήφθησαν τοῦ σημαντικοῦ ἔργου τῆς ἐπιμελείας τῶν μεταγενεστέρων ἐκδόσεων τῶν Prin-



EDMUND HALLEY

cipia, τῶν γενομένων ζῶντος ἔτι τοῦ δημιουργοῦ τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἐκείνου μνημείου.

Ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ Roger Cotes. Γεννηθεὶς εἰς Burbage (Leicestershire) τὴν 10ην Ἰουλίου 1682, εἰσῆλθε τὸ 1699 εἰς τὸ Trinity College τοῦ Cambridge, ὅπου, ἐκτὸς τῶν πανεπιστημιακῶν τίτλων, ἔλαβε καὶ τὴν θέσιν τοῦ Fellow τὸ 1705. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τοῦ προσεφέρθη ἐκεῖ ἡ ἕδρα τῆς ἀστρονομίας. Τὸ 1711 ὠνομάσθη F.R.S., δηλαδὴ ἑταῖρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας. Ἀπέθανε τὸ 1716. Ἐλθὼν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Newton, δὲν ἐβράδυνε νὰ τοῦ ἐφελκύσῃ τὴν ἐκτίμησιν, ἀνέλαβε μάλιστα τὴν ἐπιμέλειαν τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν Principia. Ἡ τοιαύτη συνεργασία μὲ τὸν

κορυφαῖον ἄγγλον ἤρχισε τὸ 1709 καὶ ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς λυπηρὰ ἐπεισόδια, ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν εἶναι τοῦ παρόντος νὰ ἐνδιατρίψωμεν, καὶ εἰς μίαν μακρὰν ἀλληλογραφίαν, ἡ ὁποίᾳ, χάρις εἰς τὸ μέγα ἐπιστημονικὸν ἐνδιαφέρον της, ἐδόθη εἰς τὴν δημοσιότητα. Ὅταν (1713) ἡ δευτέρα ἔκδοσις τῶν Principia ἐπερατώθη, ὁ Cotes προέταξε μακρὸν Πρόλογον ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ ἐν τῷ συνόλῳ του μίαν ὑπεράσπισιν τοῦ Newton ἐναντίον τῶν ἐπιθέσεων τῆς καρτεσιανῆς παρατάξεως.

Ἡ μεγάλη ἐκτίμησις, ποὺ ἔτρεφεν ὁ Newton πρὸς αὐτόν, μαρτυρεῖται ἀπὸ τοὺς λόγους: «ἐὰν ὁ Cotes δὲν ἀπέθνησκε, θὰ ἐμανθάναμεν μερικὰ πράγματα», τοὺς ὁποίους ἐξέφερε δι' αὐτόν, ὅταν ἐπληροφορήθη τὸν πρόωρον θάνατόν του. Ὅτι δὲ ἡ ἐκτίμησις αὐτὴ ἦτο δικαιολογημένη θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἔργων του, τὴν ὁποίαν, διὰ λόγους χρονολογικῆς τάξεως, τοποθετοῦμεν εἰς τὸν Τόμον III τῆς παρούσης Ἱστορίας.

Ἐξαντληθείσης καὶ τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν Principia, ἤρχισε νὰ παρασκευάζεται ἡ τρίτη ὑπὸ τὴν ἐπίβλεψιν ἑνὸς καθηγητοῦ τῆς Ἰατρικῆς εἰς τὸ Gresham College τοῦ Λονδίνου, μέλους τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας ἀπὸ τοῦ 1720, τοῦ Henry Pemberton (γενν. εἰς Λονδῖνον τὸ 1694, ἀποθ. εἰς Oxford τὴν 9ην Μαρτίου 1771). Ὁ ἐν λόγῳ ἰατρὸς ἔχει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν ἐπιστημῶν ἕνεκεν ἑνὸς ἔργου του, «View of sir Isaac Newton philosophy», δημοσιευθέντος τὸ 1628, δύο ἔτη μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς τρίτης ἐκδόσεως τῶν Principia, τῆς ὁποίας εἶχεν ἀναλάβειτὴν ἐπιμέλειαν.

459. Τοῦ μικροῦ ἔργου τοῦ Newton, ποὺ φέρει τὸν τίτλον Analysis per aequationes numero terminorum infinitas (§ 428), ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσιν (1711 - 12) ὁ William Jones (γενν. τὸ 1675 καὶ ἀποθ. εἰς Λονδῖνον τὴν 3ην Ἰουλίου 1749). Ἂν καὶ αὐτοδίδακτος, ἀνεδείχθη ἱκανώτατος ἐργάτης τῶν μαθηματικῶν, καὶ ἔγραψε μερικὰ ἔργα προωρισμένα εἰς ἐκπαίδευσιν τῶν ναυτιλομένων*. Μὲ τὰ ἔργα αὐτὰ ἐφείλκυσε τὴν εὔνοιαν τοῦ Newton, ὁ ὁποῖος τοῦ ἐνεπιστεύθη μερικά του χειρόγραφα, διὰ νὰ ἐπιμεληθῇ τῆς ἐκτυπώσεώς των, καὶ ἱκανοποιηθεὶς ἀπὸ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐξεπλήρωσε τὴν τιμητικὴν αὐτὴν ἀνάθεσιν, ἐφρόντισε νὰ ἐκλεγῇ ὁ Jones μέλος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας (F.R.S., 30 Νοεμβρίου 1712).

Ἀγνοοῦμεν διὰ ποίας ὁδοῦ τὸ ἄλλο χειρόγραφον Methodus fluxionum et serierum infinitarum (§ 434) ἔφθασεν εἰς χεῖρας τοῦ John Colson. Ἐκεῖνο

* Τὸ ἔργον του Synopsis Palmariorum Matheseos ἢ New Introduction to the Mathematics (London, 1706) ἀναφέρεται, διότι περιέχει τὴν πρώτην χρῆσιν τοῦ γράμματος π πρὸς δήλωσιν τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Τὸ σχετικὸν χωρίον ἀνεδημοσιεύθη αὐτούσιον ὑπὸ τοῦ D. E. Smith εἰς τὸ βιβλίον τοῦ A source book in Mathematics (New York, 1929).

ποὺ ἔχει δι' ἡμᾶς ἐνδιαφέρον εἶναι ὅτι οὗτος τὸ μετέφρασεν εἰς τὰ ἀγγλικὰ καὶ τὸ ἐδημοσίευσε μετὰ μακρῶν ἐκ πολυλογίας σχολίων τὸ 1736 - 37. Τὸ πρωτότυπον εἶδε τὸ φῶς μόνον τὸ 1744 χάρις εἰς τὸν Castillon. Ὁ Colson ἐγεννήθη εἰς Lichtfeld τὸ 1680. Τὸ 1713 ἐξελέγη F.R.S. καὶ τὸ 1739 Lucasian Professor εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου 1760.

Ἡ δημοσίευσις ἐκείνη παρήγαγε μεγάλην ἐντύπωσιν εἰς κάποιον νεαρὸν γάλλον εὐπατρίδην, ποὺ ἐπέπρωτο ν' ἀναδειχθῇ εἰς ἕνα τῶν διασημοτέρων γάλλων φυσιοδιφῶν, τὸν G. L. Leclerc Buffon (γενν. τὴν 7ην Σεπτεμβρίου 1707, ἀποθ. εἰς Παρισίους τὴν 16ην Ἀπριλίου 1788), ὁ ὁποῖος ἔσπευσε (1740) νὰ δημοσιεύσῃ μετάφρασιν τοῦ νευτωνείου ἔργου ἄνευ τῶν σχολίων τοῦ Colson, τὰ ὁποῖα ἔκρινεν ἀνεπιτυχῆ.

Ἡ Arithmetica Universalis εἶδε τὸ φῶς (1707) χάρις εἰς τὸν θεολόγον William Whiston (γενν. εἰς Norton τὴν 9ην Δεκεμβρίου 1667, ἀποθ. εἰς Cambridge τὴν 12ην Αὐγούστου 1752), ὁ ὁποῖος παρακινηθεὶς εἰς τὴν μελέτην τῶν ἐπιστημῶν ἐκ τῶν μαθημάτων τοῦ D. Gregory διδάσκοντος τὰ Principia, εἶχε τὴν τιμὴν νὰ διαδεχθῇ τὸν Newton εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν ἕδραν τοῦ Cambridge. Τότε ἔλαβεν εὐκαιρίαν νὰ γνωρίσῃ τὸ ἀνωτέρω ἔργον καὶ ἀπεφάσισε νὰ τὸ θέσῃ εἰς τὴν διάθεσιν ὅλων.

Ἄξιος μνείας ἐκ μέρους μας εἶναι ἐπίσης ἕνας ἄλλος θεολόγος, ὁ Samuel Clarke (γενν. τὴν 11ην Ὀκτωβρίου 1675, ἀποθ. τὴν 12ην Μαΐου 1729), ὁ ὁποῖος μὲ τὸ νὰ μεταφράσῃ τὴν Ὀ π τ ι κ ὴ ν τοῦ Newton ἐκ τοῦ ἀγγλικοῦ εἰς τὰ λατινικά, ἐξησφάλισε τὴν διάδοσιν τοῦ περιφήμου ἔργου εἰς εὐρύτερον κύκλον πεπαιδευμένων.

460. Μεταξὺ ἐκείνων, πρὸς τοὺς ὁποίους ὁ Newton προσέτρεχεν, ὁσάκις εὑρίσκετο εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ κατέλθῃ εἰς τὸν στίβον διὰ ν' ἀμυνθῇ ὑπὸ κλειστὴν περικεφαλαίαν, ἐξέχει ὁ John Keill (γενν. εἰς Edinburgh τὴν 1ην Δεκεμβρίου 1671, ἀποθ. τὴν 31ην Αὐγούστου 1721). Ἐσπούδασεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς ἰδιαιτέρας του πατρίδος ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ D. Gregory, τὸν ὁποῖον καὶ ἠκολούθησεν ὅταν μετεφέρθη εἰς Cambridge. Ἐκεῖ ἐδίδαξε σχόλια εἰς τὸν Νεύτωνα καὶ ἤλπιζε ὅτι τοῦτο ἦτο προσὸν ἐπαρκὲς διὰ νὰ διαδεχθῇ τὸν Gregory. Ἡ ἕδρα ὅμως τοῦ παρεχωρήθη μόνον μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Caswell (§ 426), ὁ ὁποῖος εἶχε προτιμηθῆ εἰς τὴν διαδοχὴν τοῦ Gregory. Ἐν τῷ μεταξὺ κατέλαβε διαφόρους θέσεις καὶ ἔγραψεν ἄρθρα πρὸς ὑποστήριξιν τοῦ Newton εἰς τὰ P.T. τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας (§ 287), εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκεν ἀπὸ τῆς 25ης Ἀπριλίου 1701. Εἰς τὸν Keill ὀφείλεται μία ἀξιόλογος ἔκδοσις τοῦ Εὐκλείδου (1715) καὶ μερικαὶ ἐργασίαι διδακτικοῦ χαρακτῆρος.

Ἕνα ἄλλο πρόσωπον, ἐμφανιζόμενον ὡς ὄργανον εἰς χεῖρας τοῦ New-

ton, εἶναι ὁ Ἰωσὴφ Raphson (ἀπὸ τοῦ 1698 F.R.S., ἀποθ. τὸ 1715 - 16), διότι εἰς τοῦτον παρέδωσε τὰ ὑλικὰ διὰ μίαν Ἱστορίαν τῶν ροῶν (History of fluxions), δημοσιευθεῖσαν εἰς ἀγγλικὴν καὶ λατινικὴν γλῶσσαν τὸ ἑπόμενον ἔτος τοῦ θανάτου του. Καθῆκον μας εἶναι νὰ δηλώσωμεν ὅτι αἱ πληροφορίαι ποὺ ἐκτίθενται ἐκεῖ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν δεκταὶ προτοῦ ὑποβληθοῦν εἰς αὐστηρὸν ἔλεγχον. Τὸ ὄνομα τοῦ Raphson ἀπαντᾶται εἰς τὰ ἀγγλικὰ ἐγχειρίδια τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων διὰ μίαν τελειοποίησιν, τὴν ὁποίαν προσεκόμισεν (1697) εἰς τὸν κανόνα τοῦ Newton τὸν ἀφορῶντα τὴν προσεγγιστικὴν ἐκτίμησιν τῶν ριζῶν.

Εἰς τὴν τροχιὰν τοῦ Newton ἀπαντῶνται ἀκόμη δύο ξένοι, οἱ ὁποῖοι δικαιοῦνται νὰ μνημονευθοῦν ἐδῶ: οἱ Nicola Faccio di Duiller καὶ Antonio Conti.

Ὁ πρῶτος ἀνήκων εἰς οἰκογένειαν καταγομένην ἐκ τῆς Chiavenna, ἐγεννήθη εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 16ην Φεβρουαρίου 1664 καὶ εἶχε ζωὴν περιπετειώδη. Τὸ 1678 ἐπολιτογραφήθη εἰς Γενεύην. Μετὰ τετραετίαν τὸν εὑρίσκομεν εἰς Παρισίους συνεργάτην τοῦ διασήμου ἀστρονόμου Gian Domenico Cassini. Τὸ 1687 μετέβη εἰς Λονδῖνον κατακτήσας τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐκεῖ μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι καὶ τὸν ἐξέλεξαν F.R.S. τὴν 2αν Μαΐου 1688. Περὶ τῶν ἄλλων του ταξειδίων εἰς Ὁλλανδίαν καὶ Ἑλβετίαν δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ὁμιλήσωμεν, ὡς καὶ περὶ τῶν ἄλλων περιστατικῶν τῆς ζωῆς του*, ἡ ὁποία ἔλαβε τέλος εἰς τὴν Ἀγγλίαν, ἀβέβαιον εἶναι ἂν τὴν 28ην Ἀπριλίου ἢ 12ην Μαΐου τοῦ 1713.

Ὁ ἄλλος ἐγεννήθη εἰς Padova τὸ 1697. Ἐσπούδασεν εἰς Βενετίαν ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τῶν Πατέρων τοῦ Ὀρατορίου καὶ ἐκεῖ ἔλαβε τὸ σχῆμα τοῦ ἱερέως. Διψῶν διὰ μάθησιν ἤκουσε εἰς τὴν Padova τὰ μαθήματα τοῦ Hermann, ὅταν οὗτος ἦτο ἐκεῖ καθηγητής, καὶ συνῆψεν ἐπιστολικὰς σχέσεις μὲ τοὺς G. Grandi καὶ G. Manfredi. Κατόπιν ἐπεδόθη εἰς ταξείδια. Τὸ 1713 ἦτο εἰς Παρισίους καὶ μετὰ δύο ἔτη εἰς Λονδῖνον. Ἐκεῖ ἐγνώρισε τὸν Newton, τῇ προτάσει τοῦ ὁποίου ἔγινε F.R.S. Ἐπέστρεψε κατόπιν εἰς τὴν ἤπειρον, περιπλανώμενος εἰς Ὁλλανδίαν καὶ Γερμανίαν. Μετέβη ἀκόμη μίαν φορὰν εἰς Ἀγγλίαν (1717), τὴν ὁποίαν ἐν συνεχείᾳ ἐγκατέλειψε διὰ Παρισίους. Τὸ 1726 ἐπέστρεψεν εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 6ην Ἀπριλίου 1749, καταλιπὼν μέγαν ἀριθμὸν χειρογράφων φιλοσοφικοῦ καὶ φιλολογικοῦ χαρακτῆρος. Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω ὅτι παρενέβη διὰ νὰ δώσῃ τέλος εἰς μίαν σκληρὰν ἀντιμαχίαν, ἀποτυχὼν ὅμως εἰς τὴν προσ-

---

* Ἐφυλακίσθη διὰ πολιτικοὺς λόγους, εἰς δὲ τὸ Λονδῖνον ὑπεβλήθη εἰς τὸν ταπεινωτικὸν βασανισμὸν τοῦ κύφωνος (berlina), τὸν ὁποῖον ὑφίσταντο ἄλλοτε οἱ δοῦλοι καὶ οἱ κατάδικοι. Ἐπέρασεν ἐπίσης μίαν περίοδον τρέλλας.

πάθειάν του, δὲν ἐξέφυγε τῆς παραδόξου μοίρας τῶν ἀποτυγχανόντων εἰρηνοποιῶν, νὰ γίνῃ δηλαδὴ ἐχθρὸς ἀμφοτέρων τῶν διαμαχομένων.

Ἐκ τῆς ἠπειρωτικῆς Εὐρώπης κατάγεται ἐπίσης ὁ Ἀβραὰμ de Moivre, γεννηθεὶς ἀπὸ οἰκογένειαν διαμαρτυρομένων εἰς τὸ Vitry (Champagne) τὴν 26ην Μαΐου 1667. Ἐσπούδασεν εἰς τὸ Sédan καὶ τοὺς Παρισίους, ἀλλ' αἱ περιπέτειαι τῶν ὀπαδῶν τοῦ Καλβίνου καὶ τοῦ Λουθήρου μετὰ τὴν ἀνάκλησιν τοῦ θεσπίσματος τῆς Νάντης τὸν ἠνάγκασαν νὰ καταφύγῃ εἰς τὴν Ἀγγλίαν. Ἡ διαμονή του ἐκεῖ χρονολογεῖται ἀπὸ τῆς 27ης Ἀπριλίου 1688. Μία ἀνακοίνωσις γενομένη τὸ 1695 εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν σχετικῶς μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ροῶν ἔγινεν ἀφορμὴ (1697) νὰ ἐκλεγῇ F.R.S., τιμὴ τῆς ὁποίας ἐδείχθη ἀντάξιος διὰ τῶν ἔργων του, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὸν Τόμον III, καὶ τὰ ὁποῖα τὸν κατέστησαν ἐπίσης μέλος τῶν Ἀκαδημιῶν τοῦ Βερολίνου (1735) καὶ Παρισίων (1754). Ἀπέθανε τὴν 27ην Νοεμβρίου 1754. Εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς σταδιοδρομίας του εἶχε μίαν ἐπιστημονικὴν φιλονικίαν μὲ τὸν Georg Cheyne (γενν. τὸ 1671, ἀποθ. εἰς Bach τὴν 12ην Ἀπριλίου 1743), ἐπίσης F.R.S. καὶ συγγραφέα ἑνὸς μετρίου ἔργου φέροντος τίτλον: Fluxionum methodus inversa, sive quantitatum fluentium leges generationis [39] (Λονδῖνον, 1704).

461. Πρέπει ἀκόμη νὰ μνημονεύσωμεν ἕνα ἄλλον, τὸν John Craig (ἀποθ. 12 Ὀκτωβρίου 1731), ὁ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ λάβῃ θέσιν εἰς τὸ δεύτερον Μέρος τοῦ Κεφαλαίου τούτου, διότι ἐκ τῶν πρώτων ἐνεκολπώθη τὰς ἰδέας τοῦ Leibniz καὶ ἀφωμοίωσεν αὐτὰς μὲ θαυμαστὴν ἑτοιμότητα, ὥστε προέβη εἰς τὴν συγγραφὴν ἑνὸς ἔργου, φέροντος τίτλον Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi, καὶ περιέχοντος ἐφαρμογὰς τῶν νέων μεθόδων (1685). Ὁ Craig διέμενε τότε εἰς Cambridge καὶ διετήρει τόσον φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν Newton ὥστε οὗτος ὄχι μόνον ἐδιάβασε τὸ χειρόγραφον αὐτοῦ τοῦ ἔργου, ἀλλὰ ἐπέτρεψε συγχρόνως νὰ δημοσιευθῇ εἰς αὐτὸ διὰ πρώτην φορὰν τὸ θεώρημα τοῦ διωνύμου. Τὸ ἔργον αὐτὸ ἔγινεν ἀφορμὴ μιᾶς πολεμικῆς μεταξὺ Ἰακώβου Bernoulli καὶ τοῦ συγγραφέως, ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν εἶναι δυνατὸν ἐδῶ νὰ διατρίψωμεν. Σημειώνομεν μόνον, ὅτι μὲ τὸν καιρὸν ὁ Craig ἤρχισε προσανατολιζόμενος πρὸς τὰς νευτωνείους μεθόδους, ὡς προκύπτει ἀπὸ μεταγενέστερον ἔργον του ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ρεουσῶν (De calculo fluentium, 1718).

Ὀφείλονται εἰς αὐτὸν ἀξιόλογοι ἔρευναι ἐπὶ τῆς βραχιστοχρόνου, ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς γεννώσης τὸ στερεὸν ἐλαχίστης ἀντιστάσεως καὶ ἐπὶ ἄλλων θεμάτων εὑρισκομένων τότε εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἐνδιαφέροντος. Τὸ ἔργον ὅμως τὸ ὁποῖον τοῦ ἐξησφάλισε τὴν μεγίστην διασημότητα εἶναι τὸ φέρον τίτλον Theologiae christianae principia mathematica (Μαθηματικαὶ ἀρχαὶ τῆς χριστιανικῆς θεολογίας, Λονδῖνον 1699), τὸ ὁποῖον ἀναφέρομεν

ἐδῶ ὄχι βέβαια διὰ νὰ παρεμβάλωμεν μίαν «νόταν εὐθυμίας» εἰς τὴν ξηρὰν αὐτὴν βιβλιογραφικὴν ἔκθεσιν, ἀλλὰ διὰ νὰ ἐπισημάνωμεν εἰς τὸν ἀναγνώστην ἕνα δημοσίευμα ποὺ ἀποτελεῖ αὐθεντικὸν σῆμα τῆς ἐποχῆς, ἀφοῦ ἀποδεικνύει ὅτι αἱ μεγάλαι ἐπιτυχίαι ποὺ ἐπετεύχθησαν μὲ τοὺς νέους ἀλγορίθμους ἐγέννησαν συγχρόνως τὴν ψευδαίσθησιν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν θὰ ἦτο δυνατὸν τοῦ λοιποῦ νὰ λυθοῦν ὅλα τὰ αἰνίγματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα βρίθουν ὁ οὐρανὸς καὶ ἡ γῆ *.

Μαθητὴς τοῦ Craig ὑπῆρξεν ὁ William Burnet (1688-1729), ἐπίσκοπος τοῦ Salisbury, ὁ ὁποῖος διετήρει ἀλληλογραφίαν μὲ τὸν Ἰωάννην Bernoulli**. Ἂν καὶ δὲν γνωρίζομεν τίποτε περὶ τῶν ἔργων του, πρέπει νὰ ἔχαιρεν ἀγαθῆς ἐπιστημονικῆς φήμης ἀφοῦ ἦτο F.R.S ἀπὸ τοῦ 1708.

Εὐφήμου μνείας ἄξιος εἶναι ἐπίσης ὁ John Machin, καθηγητὴς τῆς ἀστρονομίας εἰς τὸ Greshan College τοῦ Λονδίνου, F.R.S ἀπὸ 30 Νοεμβρίου 1710, καὶ γραμματεὺς τοῦ περιφήμου ἐκείνου ἐπιστημονικοῦ σωματείου ἐπὶ ὁλόκληρον τριακονταετίαν (1718-1747). Μετέφρασεν εἰς τὴν Ἀγγλικὴν τὰ Principia καὶ ἀπέθανε τὴν 9 Ἰουνίου 1751. Εἰς τὰ P.T. ἐδημοσίευσεν ἕνα ὑπόμνημα «curva brevissimi descensus» (καμπύλη βραχιστοχρόνου), ἀλλ' εἶναι πρὸ πάντων γνωστὸς διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακάλυψιν μιᾶς σειρᾶς, ἡ ὁποία χάρις εἰς τὴν ταχυτάτην σύγκλισιν τῶν ὅρων της, χρησιμοποιεῖται μέχρι σήμερον ὑπὸ τῶν ἐπιθυμούντων νὰ προωθήσουν περαιτέρω τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ π. Καθῆκον μας εἶναι ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ αὐτὴν τὴν σειράν :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots\right],$$

μὲ τὴν πληροφορίαν, ὅτι δι' αὐτῆς κατέστη δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ εὐκόλως ὁ ἀριθμὸς π μὲ 100 ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία...

Καὶ κλείει τὸν κατάλογον τῶν μαθηματικῶν τῆς νευτωνείου παρατάξεως ἕνας ἐπιστήμων τοιούτου ἀναστήματος, ὥστε οἱ σύγχρονοί του δὲν ἐδίσταζον νὰ τὸν χαρακτηρίζουν ὡς τὸν μοναδικὸν μαθηματικὸν τῆς ἐποχῆς των (ἐξαιρέσει φυσικὰ τοῦ Newton). Εἶναι ὁ Brook Taylor, τὰ κυριώτερα ἔργα τοῦ ὁποίου εἶδον τὸ φῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XVIII αἰῶνος (περὶ οὗ ὁ III Τόμος τῆς Ἱ σ τ ο ρ ί α ς μας). Ὁ Taylor ἐγεννήθη εἰς Edmonton τοῦ Essex τὴν 18ην Αὐγούστου 1685. Ἀπὸ τοῦ 1701 ἐμαθήτευσεν εἰς τὸ Κολλέ-

* Ἐκκινεῖ ὁ Craig ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ἐμπιστοσύνη πρὸς τὴν δυνατότητα ἀπολήψεως γνώσεων, μεταβιβαζομένων ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεὰν ἐλαττοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ χρόνου. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ πίστις εἰς τὴν ἀλήθειαν τῶν θαυμάτων τοῦ Εὐαγγελίου ἐλαττοῦται καθ' ἡμέραν καὶ θὰ ἐκλείψῃ τὸ ἔτος 3150. Ἀλλὰ τότε, κατ' αὐτόν, θὰ ἔχῃ ἐκλείψει καὶ ὁ κόσμος.

** Ὁ G. Eneström ἐδημοσίευσε δύο ἐπιστολὰς ἐκ τῆς ἐν λόγῳ ἀλληλογραφίας (Biblioth. Mathem., νέα σειρά, Τόμος XII, 1878, σ. 50 - 52).

γιον Ἁγίου Ἰωάννου τοῦ Cambridge, διετήρει ἀλληλογραφίαν μὲ τοὺς Keill καὶ Machin καὶ ἐδημοσίευσεν ἀξιόλογα ἄρθρα εἰς τὰ P.T., τὰ ὁποῖα δὲν ἐβράδυνον νὰ τοῦ προσπορίσουν τὸν τίτλον τοῦ F.R.S. (3 Ἀπριλίου 1712). Ἀποθνήσκων (27 Δεκεμβρίου 1731) κατέλιπε πολυάριθμα χειρόγραφα, ἀνέκδοτα μέχρι τοῦδε, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται καὶ μία νέα διασκευὴ τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων.

ΜΕΡΟΣ II: ΟΙ ΠΕΡΙ ΤΟΝ LEIBNIZ

Christiaan Huygens

462. Μεταξὺ ἐκείνων, ποὺ ἐνεκολπώθησαν, ἐφήρμοσαν καὶ ἐτελειοποίησαν τὰς ἰδέας τοῦ Leibniz, τιμητικὴ θέσις ἀνήκει εἰς ἕνα γνωστόν μας ἤδη μεγάλου ἀναστήματος ἐπιστήμονα, τὸν C. Huygens (§ 408). Αἱ φιλικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο τούτων κορυφαίων, ἐγκαινιασθεῖσαι κατὰ τὴν εἰς Παρισίους διαμονήν των, ἐσυνεχίσθησαν καὶ μετὰ τὴν ἀναχώρησίν των ἐκ τῆς Γαλλίας, διότι ὁ Leibniz ἀνεγνώριζεν εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ Huygens τὸν πλέον φωτισμένον καὶ αὐστηρὸν κριτὴν τῶν ἐργασιῶν του. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀνδρῶν ἀλληλογραφία, κατόπιν μερικῶν διακοπῶν, ὀφειλομένων εἰς διαφόρους ἀπασχολήσεις καὶ εἰς πολλὰς περιπλανήσεις τοῦ βιβλιοθηκαρίου τοῦ δουκὸς τοῦ Ἀννοβέρου, προσέλαβε τὴν μορφὴν κανονικῆς καὶ τακτικῆς ἀνταλλαγῆς σκέψεων ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ προβλήματος τῆς ἰσοχρόνου καμπύλης πού, ὅπως εἴδομεν (§ 453), εἶχε προτείνει ὁ Leibniz κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς φιλονικίας του μὲ τοὺς καρτεσιανούς.

Ὁ Huygens ἐνδιεφέρθη περὶ αὐτοῦ καὶ ἐδημοσίευσε μερικὰς ἰδιότητας τῆς ζητουμένης καμπύλης εἰς τὸ τεῦχος τοῦ Ὀκτωβρίου 1687 τοῦ περιοδικοῦ Nouvelles de la république des lettres.

Ἡ διατριβὴ περιῆλθεν εἰς χεῖρας τοῦ Leibniz κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἐπομένου ἔτους καὶ τοῦ προεκάλεσε τόσον μεγάλην χαράν, ὥστε δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντιστῇ εἰς τὴν εὐχαρίστησιν τῆς ἐκδηλώσεώς της εἰς τὸν παλαιόν του διδάσκαλον, καὶ ὀλίγας ἑβδομάδας μετὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐκ τῆς Ἰταλίας, τοῦ ἔκαμε μερικὰς ἐπιστημονικὰς ἀνακοινώσεις, ὅπου ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐφηρμόζετο κατὰ τὸν προσήκοντα τρόπον. Ὁ Huygens, συνηθισμένος εἰς τὰς κλασσικὰς μεθόδους, συνήντησεν ἀρχικῶς κάποιαν δυσκολίαν εἰς τὴν κατανόησίν των. Τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἠσχολήθη μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἁλυσοειδοῦς τὸ ὁποῖον εἶχε προτείνει ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Ἰάκωβος Bernoulli. Ἀναγνωρίσας δὲ κατόπιν, ὅτι αἱ λύσεις ποὺ ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Leibniz καὶ τῶν ἀδελφῶν Bernoulli ἦσαν ἀνώτεραι τῆς ἰδικῆς του, ἐξεδήλωσεν εἰς δύο ἐπιστολὰς (1 Σεπτεμβρίου 1671 καὶ 17 Σεπτεμβρίου 1693) τὴν

γιον Ἁγίου Ἰωάννου τοῦ Cambridge, διετήρει ἀλληλογραφίαν μὲ τοὺς Keill καὶ Machin καὶ ἐδημοσίευσεν ἀξιόλογα ἄρθρα εἰς τὰ P.T., τὰ ὁποῖα δὲν ἐβράδυνον νὰ τοῦ προσπορίσουν τὸν τίτλον τοῦ F.R.S. (3 Ἀπριλίου 1712). Ἀποθνήσκων (27 Δεκεμβρίου 1731) κατέλιπε πολυάριθμα χειρόγραφα, ἀνέκδοτα μέχρι τοῦδε, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται καὶ μία νέα διασκευὴ τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΟΙ ΠΕΡΙ ΤΟΝ LEIBNIZ

Christiaan Huygens

462. Μεταξὺ ἐκείνων, ποὺ ἐνεκολπώθησαν, ἐφήρμοσαν καὶ ἐτελειοποίησαν τὰς ἰδέας τοῦ Leibniz, τιμητικὴ θέσις ἀνήκει εἰς ἕνα γνωστόν μας ἤδη μεγάλου ἀναστήματος ἐπιστήμονα, τὸν C. Huygens (§ 408). Αἱ φιλικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο τούτων κορυφαίων, ἐγκαινιασθεῖσαι κατὰ τὴν εἰς Παρισίους διαμονήν των, ἐσυνεχίσθησαν καὶ μετὰ τὴν ἀναχώρησίν των ἐκ τῆς Γαλλίας, διότι ὁ Leibniz ἀνεγνώριζεν εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ Huygens τὸν πλέον φωτισμένον καὶ αὐστηρὸν κριτὴν τῶν ἐργασιῶν του. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀνδρῶν ἀλληλογραφία, κατόπιν μερικῶν διακοπῶν, ὀφειλομένων εἰς διαφόρους ἀπασχολήσεις καὶ εἰς πολλὰς περιπλανήσεις τοῦ βιβλιοθηκαρίου τοῦ δουκὸς τοῦ Ἀννοβέρου, προσέλαβε τὴν μορφὴν κανονικῆς καὶ τακτικῆς ἀνταλλαγῆς σκέψεων ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ προβλήματος τῆς ἰσοχρόνου καμπύλης πού, ὅπως εἴδομεν (§ 453), εἶχε προτείνει ὁ Leibniz κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς φιλονικίας του μὲ τοὺς καρτεσιανούς.

Ὁ Huygens ἐνδιεφέρθη περὶ αὐτοῦ καὶ ἐδημοσίευσε μερικὰς ἰδιότητας τῆς ζητουμένης καμπύλης εἰς τὸ τεῦχος τοῦ Ὀκτωβρίου 1687 τοῦ περιοδικοῦ Nouvelles de la république des lettres.

Ἡ διατριβὴ περιῆλθεν εἰς χεῖρας τοῦ Leibniz κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἑπομένου ἔτους καὶ τοῦ προεκάλεσε τόσον μεγάλην χαράν, ὥστε δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντιστῇ εἰς τὴν εὐχαρίστησιν τῆς ἐκδηλώσεώς της εἰς τὸν παλαιόν του διδάσκαλον, καὶ ὀλίγας ἑβδομάδας μετὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐκ τῆς Ἰταλίας, τοῦ ἔκαμε μερικὰς ἐπιστημονικὰς ἀνακοινώσεις, ὅπου ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐφηρμόζετο κατὰ τὸν προσήκοντα τρόπον. Ὁ Huygens, συνηθισμένος εἰς τὰς κλασσικὰς μεθόδους, συνήντησεν ἀρχικῶς κάποιαν δυσκολίαν εἰς τὴν κατανόησίν των. Τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἠσχολήθη μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἁλυσοειδοῦς τὸ ὁποῖον εἶχε προτείνει ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Ἰάκωβος Bernoulli. Ἀναγνωρίσας δὲ κατόπιν, ὅτι αἱ λύσεις ποὺ ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Leibniz καὶ τῶν ἀδελφῶν Bernoulli ἦσαν ἀνώτεραι τῆς ἰδικῆς του, ἐξεδήλωσεν εἰς δύο ἐπιστολὰς (1 Σεπτεμβρίου 1671 καὶ 17 Σεπτεμβρίου 1693) τὴν

πεποίθησίν του περὶ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ νέου ἀλγορίθμου καὶ προέτρεψε τὸν δημιουργὸν νὰ κάμῃ ὁ ἴδιος μίαν μεθοδικὴν καὶ ἐμπεριστατωμένην ἔκθεσιν αὐτοῦ. Ἐν τῷ μεταξὺ ἔγινε πλήρης κάτοχος τῆς νέας μεθόδου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ θεωρῆται φαινόμενον ἄξιον θαυμασμοῦ δι' ἕνα ἄνθρωπον ὑπερβάντα τὸ ἑξηκοστὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του. Ὁ Leibniz φαίνεται ὅτι κατ' ἀρχὴν ἐδέχθη μὲ εὐμένειαν τὴν προτροπὴν ἐκείνην, ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα δὲν ἔλαβε συνέχειαν, διότι ἐν τῷ μεταξὺ ὁ μαρκήσιος de l' Hôpital ἐδημοσίευσε (§ 475) τὴν ἰδικήν του Ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν (Analyse des infiniment petits). Ὁ θάνατος τοῦ Huygens, ἐπελθὼν ὀλίγον ἔπειτα, ἐστέρησε τὸν Leibniz ἑνὸς συνεργάτου τῆς μεγαλυτέρας ἐπιστημονικῆς ἀξίας καὶ τοῦ ὑψηλοτέρου ἤθους, ἑνὸς ἀξίου ὑποστηρικτοῦ τῶν νέων θεωριῶν καὶ ἑνὸς ἐρευνητοῦ μεγίστου κύρους.

Walther von Tschirnhausen

463. Εἴπομεν ἤδη (§ 445) ὅτι ὁ Leibniz, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς Παρισίους, συνῆψεν ἐγκαρδίους σχέσεις μὲ ἕνα συμπατριώτην του, ὁ ὁποῖος ἐκαλλιέργει εὐδοκίμως τὰς ἐπιστήμας, τὸν Walther von Tschirnhausen. Ὡς μαθηματικός, ὁ ἐπιστήμων αὐτὸς ἄφησεν ἴχνη ἀνεξάλειπτα τῆς διαβάσεώς του ἐπὶ τῆς γῆς καὶ ἔχει, διὰ τοῦτο, μίαν θέσιν εἰς τὴν παροῦσαν Ἱστορίαν. Ἐγεννήθη περὶ τὸ Görlitz τὴν 10ην Ἀπριλίου 1651. Ἐνῷ ἐσπούδαζεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Leiden (ὅπου μετέβη τὸ 1668), ἔλαβε χώραν (1672) ἡ γαλλικὴ εἰσβολὴ κατόπιν ἀποφάσεως τοῦ Λουδοβίκου XIV. Τότε κατετάγη εἰς τὸν στρατόν, ὁ ὁποῖος ὑπερήσπιζε τὴν χώραν ποὺ τὸν ἐφιλοξένει, καὶ ἀνέγραψεν εἰς τὸ ἐνεργητικόν του πράξεις ἀφθάστου ἡρωισμοῦ. Ἐπιστρέψας τὸ 1675 εἰς τὴν πατρίδα, ἐπανήρχισεν ὀλίγον ἔπειτα τὰς περιπλανήσεις του, ἐπισκεπτόμενος τὴν Ἀγγλίαν, τὴν Γαλλίαν, τὴν Ἰταλίαν (εἰς Ρώμην διέμεινεν ὄχι ὀλιγώτερον τοῦ ἔτους) καὶ τὴν Μάλταν. Τοιουτοτρόπως τοῦ ἐδόθη εὐκαιρία νὰ πλησιάσῃ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του (Hudde, Huygens, Wallis, Newton, Collins, Oldenburg, Michelangelo Ricci, Borelli), διὰ νὰ μὴ ὁμιλήσωμεν διὰ τὸν Leibniz, τὸν ὁποῖον μόλις ἐπιστρέψαντα (1679) ἐπεσκέφθη εἰς Ἀννόβερον. Μετ' ἄλλων ἐπιστημόνων συνῆψε φιλικὰς σχέσεις καὶ διετήρει ἀλληλογραφίαν. Κατὰ τὴν διάρκειαν μεταγενεστέρας διαμονῆς του εἰς Παρισίους ἐξελέγη μέλος τῆς Ἀκαδημίας (22 Ἰουλίου 1682), πρᾶγμα παρέχον ἐξήγησιν εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ γνωστοτέρα ἐκ τῶν δημοσιευθεισῶν ἐργασιῶν του Medicina mentis (Ἰατρικὴ τοῦ πνεύματος) φέρει ἀφιέρωσιν πρὸς τὸν Λουδοβῖκον XIV.

Ἀπὸ τοῦ 1700 κατῴκησεν εἰς τὴν Δρέσδην ἢ εἰς τὰ περίχωρά της καὶ θὰ πρέπει νὰ ὑπέστη τὰ πάνδεινα κατὰ τὴν εἰσβολὴν τῶν Σουηδῶν εἰς τὴν Σαξωνίαν. Ἀπέθανε τὴν 11ην Ὀκτωβρίου 1708, ἀφήνων τοιαύτην ἀγαθὴν

πεποίθησίν του περὶ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ νέου ἀλγορίθμου καὶ προέτρεψε τὸν δημιουργὸν νὰ κάμῃ ὁ ἴδιος μίαν μεθοδικὴν καὶ ἐμπεριστατωμένην ἔκθεσιν αὐτοῦ. Ἐν τῷ μεταξὺ ἔγινε πλήρης κάτοχος τῆς νέας μεθόδου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ θεωρῆται φαινόμενον ἄξιον θαυμασμοῦ δι' ἕνα ἄνθρωπον ὑπερβάντα τὸ ἑξηκοστὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του. Ὁ Leibniz φαίνεται ὅτι κατ' ἀρχὴν ἐδέχθη μὲ εὐμένειαν τὴν προτροπὴν ἐκείνην, ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα δὲν ἔλαβε συνέχειαν, διότι ἐν τῷ μεταξὺ ὁ μαρκήσιος de l' Hôpital ἐδημοσίευσε (§ 475) τὴν ἰδικήν του Ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν (Analyse des infiniment petits). Ὁ θάνατος τοῦ Huygens, ἐπελθὼν ὀλίγον ἔπειτα, ἐστέρησε τὸν Leibniz ἑνὸς συνεργάτου τῆς μεγαλυτέρας ἐπιστημονικῆς ἀξίας καὶ τοῦ ὑψηλοτέρου ἤθους, ἑνὸς ἀξίου ὑποστηρικτοῦ τῶν νέων θεωριῶν καὶ ἑνὸς ἐρευνητοῦ μεγίστου κύρους.

Walther von Tschirnhausen

463. Εἴπομεν ἤδη (§ 445) ὅτι ὁ Leibniz, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς Παρισίους, συνῆψεν ἐγκαρδίους σχέσεις μὲ ἕνα συμπατριώτην του, ὁ ὁποῖος ἐκαλλιέργει εὐδοκίμως τὰς ἐπιστήμας, τὸν Walther von Tschirnhausen. Ὡς μαθηματικός, ὁ ἐπιστήμων αὐτὸς ἄφησεν ἴχνη ἀνεξάλειπτα τῆς διαβάσεώς του ἐπὶ τῆς γῆς καὶ ἔχει, διὰ τοῦτο, μίαν θέσιν εἰς τὴν παροῦσαν Ἱστορίαν. Ἐγεννήθη περὶ τὸ Görlitz τὴν 10ην Ἀπριλίου 1651. Ἐνῷ ἐσπούδαζεν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Leiden (ὅπου μετέβη τὸ 1668), ἔλαβε χώραν (1672) ἡ γαλλικὴ εἰσβολὴ κατόπιν ἀποφάσεως τοῦ Λουδοβίκου XIV. Τότε κατετάγη εἰς τὸν στρατόν, ὁ ὁποῖος ὑπερήσπιζε τὴν χώραν ποὺ τὸν ἐφιλοξένει, καὶ ἀνέγραψεν εἰς τὸ ἐνεργητικόν του πράξεις ἀφθάστου ἡρωισμοῦ. Ἐπιστρέψας τὸ 1675 εἰς τὴν πατρίδα, ἐπανήρχισεν ὀλίγον ἔπειτα τὰς περιπλανήσεις του, ἐπισκεπτόμενος τὴν Ἀγγλίαν, τὴν Γαλλίαν, τὴν Ἰταλίαν (εἰς Ρώμην διέμεινεν ὄχι ὀλιγώτερον τοῦ ἔτους) καὶ τὴν Μάλταν. Τοιουτοτρόπως τοῦ ἐδόθη εὐκαιρία νὰ πλησιάσῃ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του (Hudde, Huygens, Wallis, Newton, Collins, Oldenburg, Michelangelo Ricci, Borelli), διὰ νὰ μὴ ὁμιλήσωμεν διὰ τὸν Leibniz, τὸν ὁποῖον μόλις ἐπιστρέψαντα (1679) ἐπεσκέφθη εἰς Ἀννόβερον. Μετ' ἄλλων ἐπιστημόνων συνῆψε φιλικὰς σχέσεις καὶ διετήρει ἀλληλογραφίαν. Κατὰ τὴν διάρκειαν μεταγενεστέρας διαμονῆς του εἰς Παρισίους ἐξελέγη μέλος τῆς Ἀκαδημίας (22 Ἰουλίου 1682), πρᾶγμα παρέχον ἐξήγησιν εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ γνωστοτέρα ἐκ τῶν δημοσιευθεισῶν ἐργασιῶν του Medicina mentis (Ἰατρικὴ τοῦ πνεύματος) φέρει ἀφιέρωσιν πρὸς τὸν Λουδοβῖκον XIV.

Ἀπὸ τοῦ 1700 κατῴκησεν εἰς τὴν Δρέσδην ἢ εἰς τὰ περίχωρά της καὶ θὰ πρέπει νὰ ὑπέστη τὰ πάνδεινα κατὰ τὴν εἰσβολὴν τῶν Σουηδῶν εἰς τὴν Σαξωνίαν. Ἀπέθανε τὴν 11ην Ὀκτωβρίου 1708, ἀφήνων τοιαύτην ἀγαθὴν

μνήμην ἐπιστήμονος, ὥστε ὁ Fontenelle ἔσπευσε ν' ἀφιερώσῃ εἰς τὴν μνήμην του ἕνα ἀπὸ τὰ περίφημα Ἐ γ κ ώ μ ι α. (Fontennelle: Éloges). Προτοῦ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν ἔργων του, σκόπιμον εἶναι νὰ κάμωμεν μίαν γενικὴν παρατήρησιν, ὅτι δηλαδὴ χάρις εἰς τὴν ροπήν του πρὸς τὰς γενικὰς καὶ φιλοσοφικοῦ χαρακτῆρος ἰδέας καὶ ἕνεκα τῶν μελετῶν του εἰς τὴν περιοχὴν τῆς λογικῆς, παρουσιάζει ἀναμφισβήτητον πνευματικὴν συγγένειαν μὲ τὸν Leibniz, τοῦ ὁποίου ἴσως ὑπέστη τὴν ἐπίδρασιν παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ Σηκουάνα.

464. Αἱ πρῶται ἔρευναι τοῦ Tschirnhausen ἀφοροῦν τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ. Περὶ τούτων γίνεται λόγος εἰς ἐπιστολάς του γραφείσας ἐκ Ρώμης πρὸς τὸν Leibniz ὑπὸ χρονολογίας 27 Ἰανουαρίου καὶ 10 Ἀπριλίου 1678, εἰς τὰς ὁποίας εἶναι εὐδιάκριτος ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐπίδρασις τοῦ Cavalieri. Μὲ τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀσχολεῖται εἰς ἄρθρον του καταχωρηθὲν εἰς τὰ A.E. τοῦ Ὀκτωβρίου 1683 (ὑπογραφόμενον, ὅπως εἰς ἄλλα τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, μὲ τὰ ἀρχικὰ D.T. Ἡ μέθοδος ὅμως ἔγινεν ἀντικείμενον κριτικῆς, ὡς εἴδομεν (§ 542), ἐκ μέρους τοῦ Leibniz, ὁ ὁποῖος ἐσημείωσεν ἐκεῖ μερικὰ σφάλματα καὶ μερικὰς ἀναμφισβητήτους συμπτώσεις πρὸς ὅσα ὁ ἴδιος εἶχεν ἀνακοινώσει εἰς τὸν Tschirnhausen, ὅταν διέμενον καὶ οἱ δύο εἰς τὴν Γαλλίαν. Τοῦτο ὑπῆρξεν ἀφορμὴ διαφωνιῶν, αἱ ὁποῖαι, ἂν καὶ ἔφερον πάντοτε τὴν σφραγῖδα τῆς ἀμοιβαίας ἐκτιμήσεως, δὲν συνετέλεσαν ὀλίγον εἰς τὸ νὰ ψυχρανθοῦν αἱ σχέσεις τῶν δύο ἀνδρῶν καὶ νὰ διακοπῇ αἰφνιδίως ἡ ἀλληλογραφία των κατὰ τὴν περίοδον 1684-1693. Εἰς ἡμᾶς δὲν ἐπιτρέπεται νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας ἐπὶ τοῦ ἐπεισοδίου, ὅπως καὶ τοῦ ἄλλου ὁμοίου ποὺ εἶχεν ὡς πρωταγωνιστὰς τὸν Tschirnhausen καὶ τὸν Ἰωάννην Bernoulli. Θὰ σημειώσωμεν μόνον, ὅτι ἀδίκως ὁ πρῶτος ἐθεώρει ὅτι μία καμπύλη κλειστὴ μὴ τετραγωνίσιμος ἐν ὅλῳ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ τετραγωνισθῇ καὶ κατὰ μέρη. Τονίζομεν δὲ γενικῶς, ὅτι ἐνῷ ὁ ἴδιος ἐκολακεύετο μὲ τὸ νὰ χρησιμοποιῇ ὡς στήριγμα μερικὰς γενικὰς μεθόδους — τῶν ὁποίων ἐβεβαίωνεν ὅτι ἦτο ἐφευρέτης, ὅτι ἐκράτει τὸ μυστικὸν καὶ ὅτι συνεπῶς τοῦτο ἦτο ἀδύνατον νὰ μαντευθῇ — ἐχρησιμοποίησεν εἰς τὸ ἐρευνητικόν του ἔργον αὐτὰς διὰ νὰ εὕρῃ προτάσεις, μὴ ἐστερημένας πρωτοτυπίας καὶ κομψότητος.

Ἀνάλογοι παρατηρήσεις δύνανται νὰ γίνουν ἀναφορικῶς πρὸς τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς εὐθειοποιήσεως τῶν καμπύλων. Ἐδῶ ἐν τούτοις, παρασυρόμενος ἀπὸ ἐσπευσμένας γενικεύσεις, ἔσπευσε νὰ διατυπώσῃ πράγματα ἀντίθετα πρὸς τὴν ἀλήθειαν. Τοῦτο βεβαίως δὲν πρέπει νὰ μᾶς κάμῃ νὰ λησμονήσωμεν ὅτι, μὲ τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῶν ζευγῶν τόξων μιᾶς καμπύλης μὲ διαφορὰν εὐθειοποιήσιμον, ἐνεκαινίασεν ἕνα πεδίον ἐρεύνης ποὺ ἀπεδείχθη κατόπιν γονιμώτατον καὶ ἄκρως ἐνδιαφέρον.

465. Ἂν εἰς τὰς μελέτας του ἐπὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ὁ Tschirnhausen εἶχε μετρίαν εὐδοκίμησιν, δὲν ὑπῆρξεν εὐτυχέστερος εἰς τὰς ἐπὶ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἐρεύνας του. Αἱ μέθοδοι πράγματι τὰς ὁποίας ἐπρότεινε (Α.Ε. Δεκεμβρίου 1682 καὶ Μαρτίου 1683) διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας καὶ τῶν ἀκροτάτων τιμῶν τῶν συναρτήσεων πάσχουν δι' ἔλλειψιν γενικότητος. Τὸ ἐλάττωμα δὲ τοῦτο ἐσημειώθη ἐπίσης καὶ εἰς ἄλλο δημοσιευθὲν ὑπόμνημά του ὑπὸ τὸν τίτλον: Essai d' une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indefiniment petite (Mem. de l' Acad., Paris 1702), ἤτοι : περὶ μιᾶς μεθόδου προσδιορισμοῦ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς μηχανικὰς καμπύλας ἄνευ χρήσεως ἀπειροστῶν.

Ἡ ἀνωτέρω νύξις ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων μᾶς ἀναγκάζει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ αὐτὸς μαθηματικός, εἰς τὸ ἔργον του Medicina mentis (Ἰατρικὴ τοῦ πνεύματος), ἐκκινῶν ἀπὸ τὴν ἰδέαν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ σχήματα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν παραγόμενα διὰ κινήσεως ἀναφορικῶς πρὸς μερικὰ στοιχεῖα σταθερά, συνέλαβε τὰς καμπύλας ὡς διαγραφομένας διὰ κινήσεως γραφίδος τεινούσης νῆμα, μὲ τὸ ἄλλο ἄκρον σταθερόν, διερχόμενον σταθερῶς ἀπὸ ἄλλα δεδομένα σημεῖα ἢ περιελισσόμενον περὶ δοθείσας καμπύλας. Τοιουτοτρόπως κατέληξεν εἰς μίαν ταξινόμησιν τῶν ἐπιπέδων καμπύλων καὶ ἐσχημάτισε τὴν ἐσφαλμένην ἀντίληψιν, ὅτι ἀνεκάλυψε μίαν μέθοδον κατασκευῆς τῆς ἐφαπτομένης εἰς ἕνα τυχὸν σημεῖον καμπύλης ὁριζομένης ὡς ἄνω. Ἀτυχῶς ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος εἶναι γενικῶς ἐσφαλμένη, ὡς παρετήρησεν ὁ Faccio de Duiller (Bibl. Univ. et Historique, Tome V, 1687). Ὁ Tschirnhausen ἀνεγνώρισε τὸ λάθος του (Bibl. Univ..., Tome X, 1688) καὶ εἰς δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ ἔργου του Medicina mentis προσεπάθησε νὰ τὸ διορθώσῃ, χωρὶς ὅμως νὰ τὸ κατορθώσῃ ἐντελῶς. Τοῦτο ἐπέτυχεν ὁ l' Hôpital εἰς τὸ ἀναφερθὲν ἤδη προηγουμένως ἔργον του Analyse (II Μέρος, Πρότασις 10) καὶ ὁ Leibniz (J. S., Σεπτεμβρίου 1693), ἐφαρμόζων νέον ἰδικόν του γενικὸν κανόνα διὰ τὴν σύνθεσιν τῶν κινήσεων.

466. Ἡ γεωμετρία ὀφείλει χάριτας εἰς τὸν μαθηματικόν, περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος, διότι εἰσήγαγε μίαν νέαν ἐνδιαφέρουσαν κατηγορίαν καμπύλων συνδεομένων πρὸς τυχοῦσαν καμπύλην τοῦ ἐπιπέδου, ὁρμώμενος ἀπὸ τὰς ἐρεύνας ἐπὶ τῆς θεωρίας τοῦ φωτός. Πρόκειται περὶ τῶν καμπύλων ποὺ ὀνομάζομεν καυστικάς. Πρὸς ἀνίχνευσιν τῶν ἀρχῶν τῶν ἐν λόγῳ ἐρευνῶν πρέπει ν' ἀνατρέξωμεν εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Leibniz (7 Ἀπριλίου 1681), ὅπου γίνεται λόγος περὶ τῆς περιβαλλούσης τῶν ἐπὶ κυκλικῆς καμπύλης ἀνακλωμένων ἀκτίνων, τῆς φωτεινῆς πηγῆς θεωρουμένης εἰς τὸ ἄπειρον. Εἰς ἀπάντησίν του (13 Μαΐου 1681) ὁ Leibniz ἀδίκως ἠρνήθη τὴν ὕπαρξιν καμπύλης προκυπτούσης ὑπὸ τὰς ἐν λόγῳ συνθήκας. Ἀλλ' ὁ Tschirn-

hausen δὲν παρητήθη, καθ' ὅσον μετὰ ἕνα ἔτος (27 Μαΐου 1682) ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Leibniz περίληψιν ὑπομνήματός του ὑποβληθέντος εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων (A. E., Νοέμβριος 1682). Εἰς μίαν μεταγενεστέραν ἐπιστολήν του (ἀγνώστου χρονολογίας) ὁ Leibniz, χωρὶς νὰ ἐπιμείνῃ ἐπὶ τῆς δυσκολίας ποὺ ἀντεμετώπισε προηγουμένως, ἐπεσήμανεν ἕνα σφάλμα ποὺ διέπραξεν ὁ Tschirnhausen κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς καυστικῆς τοῦ κύκλου. Ὁ τελευταῖος ἀνεγνώρισε τὸ σφάλμα του (A.E. Φεβρουάριος 1690) καὶ ἔλυσε, αὐτὴν τὴν φορὰν μὲ ἀκρίβειαν, τὸ ἀνάλογον πρόβλημα διὰ τὴν παραβολήν. Τοιουτοτρόπως ἔθεσε τέρμα εἰς τὰς θεωρητικάς του ἐρεύνας, ποὺ ἀνέκυψαν ἐκ τῆς κατασκευῆς τῶν φακῶν, εἰς τὴν ὁποίαν μετ' ἀπαραμίλλου ἐμπειρίας ἐπιτηδεύετο.

467. Ὁ Tschirnhausen ἠσχολήθη ἐπίσης μὲ τὴν ἄλγεβραν, στρέψας τὴν διάνοιάν του εἰς τὸ ὑψηλότερον θέμα ποὺ ἀπησχόλει τότε τοὺς μαθηματικούς, τουτέστι τὴν εὕρεσιν τύπων λύσεως τῶν ἐγγραμμάτων ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.

Τὰς σχετικὰς ἐρεύνας ἤρχισεν εἰς Παρισίους, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Leibniz (10 Ἀπριλίου 1678), τῆς ὁποίας τὸ περιεχόμενον ὑποβάλλει ὁ τελευταῖος εἰς κριτικὴν εἰς ἐπακολουθήσασαν ἀπάντησίν του. Τὸ κοινὸν ὅμως ἔλαβε γνῶσιν τῶν ἀποτελεσμάτων μόνον ἀπὸ τὸ τεῦχος τοῦ Μαΐου 1683 τῶν A.E. Ἀπὸ τὸ ἄρθρον ποὺ ἐδημοσίευσεν ἐκεῖ ὁ Tschirnhausen ὑπὸ τὰ στοιχεῖα D.T. προκύπτει ὅτι ὁ συγγραφεὺς ὡρμήθη ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι, ὅπως εἰς μίαν ἐξίσωσιν 3ου βαθμοῦ (ἠδύνατο βεβαίως νὰ ἀναφέρῃ βαθμοῦ οἱουδήποτε) δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν δεύτερον ὅρον μέσῳ μιᾶς ἀντικαταστάσεως τῆς μορφῆς $y = x + a$, τοιουτοτρόπως εἰς μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ n:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς $n-1$ ὅρους μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ ἕνα ἄλλον ἄγνωστον y συνδεόμενον μὲ τὸ x διὰ μιᾶς σχέσεως τῆς μορφῆς:

$$y = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

ὅπου αἱ σταθεραὶ $b_1, b_2 \dots b_{n-1}$ θὰ χρειασθῇ νὰ λάβουν καταλλήλους τιμάς. Τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς μίαν διωνυμικὴν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία δύναται νὰ λυθῇ μὲ μίαν ἐξαγωγὴν ρίζης.

Ἡ βασικὴ ἰδέα τῆς μεθόδου εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν πνευματώδης, ἀλλ' ἡ μεταφορά της εἰς τὴν πρᾶξιν προσκρούει εἰς ἀνυπερβλήτους δυσχερείας. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν b ἀπαιτεῖ ἐν γένει νὰ λυθοῦν ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ n. Παρὰ ταῦτα ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ Tschirnhausen παρέμεινεν εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ θὰ ἴδωμεν

ἐν καιρῷ ὅτι, ὑπό τινας προϋποθέσεις, ὁ ἐν λόγῳ μετασχηματισμὸς ὡδήγησεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων 5ου βαθμοῦ.

Ὁ Tschirnhausen τόσον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅσον καὶ εἰς ἄλλας, συνέλαβε μίαν ἰδέαν πρωτότυπον ἀφήνων εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς συγκομιδῆς τῶν καρπῶν ποὺ ἦτο αὕτη εἰς θέσιν ν' ἀποδώσῃ. Διανοούμενος ἀνεξάρτητος, ἀλλ' ὁρμητικὸς καὶ ἴσως ὄχι πολὺ σκεπτικός, ἐπεσκότισε τὴν φήμην του μὲ τὰ οὐκ ὀλίγα οὔτ' ἐλαφρὰ σφάλματα ποὺ διέπραξε. Τολμηρὸς σπορεὺς ἰδεῶν, ἄφησεν εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς ἀξιοποιήσεως, τελειοποιήσεως καὶ καρποφόρου ἐφαρμογῆς των. Ἡ ἀδέκαστος ἱστορία δὲν δύναται παρὰ ν' ἀναγνωρίσῃ τὴν ἀξίαν του καὶ νὰ διαμνημονεύσῃ τὰ ὅσα ἡ ἐπιστήμη ὀφείλει εἰς αὐτόν.

Ἰάκωβος Bernoulli

468. Πολὺ περισσότερον τοῦ Huygens (ὁ ὁποῖος ἐξῆλθεν ἐκ τῆς σκηνῆς τοῦ κόσμου, ὅταν ἀκόμη ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς ἠρίθμει ὀλίγων μόνον ἐτῶν ζωὴν) συνέβαλον εἰς τὸν θρίαμβον τῶν ἰδεῶν τοῦ Leibniz οἱ δύο ἀδελφοὶ Bernoulli, ὁ Ἰάκωβος καὶ ὁ Ἰωάννης, περὶ τῶν ὁποίων τώρα θὰ ὁμιλήσωμεν.

Ὁ Ἰάκωβος ἐγεννήθη εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 27ην Δεκεμβρίου 1654. Ὑπὸ τοῦ πατρὸς προωρίζετο διὰ τὸ ἐκκλησιαστικὸν στάδιον, ἀλλὰ μία ἀκατανίκητος κλίσις τὸν ἔκαμε νὰ στραφῇ πρὸς τὰς ἐπιστήμας, εἰς τὰς ὁποίας ἐξεπαιδεύθη χωρὶς νὰ καταφύγῃ εἰς διδάσκαλον. Ἀπὸ τοῦ 1676 ἐταξείδευσε πρῶτον εἰς Ἐλβετίαν καὶ Γαλλίαν, κατόπιν δὲ εἰς Ἀγγλίαν καὶ Ὁλλανδίαν. Τὸ 1687 τοῦ παρεχώρησαν τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τοῦ πατρίου Πανεπιστημίου καὶ δὲν ἐβράδυνε νὰ ἑλκύσῃ περὶ ἑαυτὸν μέγαν ἀριθμὸν μαθητῶν ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη τῆς Εὐρώπης. Καταληφθεὶς ἀπὸ θαυμασμὸν ἐκ τῆς ἀναγνώσεως τοῦ θεμελιώδους ὑπομνήματος τοῦ Leibniz (§ 542), ἀπηυθύνθη πρὸς αὐτὸν δι' ἐπιστολῆς του ἀπὸ 15ης Δεκεμβρίου 1687, διὰ νὰ τοῦ ζητήσῃ κάποιαν διασάφησιν. Ὁ Leibniz, ποὺ εὑρίσκετο τότε εἰς ταξείδιον, δὲν ἔλαβε τὴν ἐπιστολὴν παρὰ τὸ ἔτος 1690. Ἀπαντῶν δὲ ἀμέσως, ἐνεκαινίασε μιὰν ἀπὸ τὰς σπουδαιοτέρας ἐπιστημονικὰς ἀλληλογραφίας, ἡ ὁποία (μὲ μικρὸν διάλειμμα 1697 - 1702, ὀφειλόμενον εἰς κάποιαν παρεξήγησιν) διήρκεσε μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ μεγάλου ἑλβετοῦ μαθηματικοῦ. Οὗτος ἐξελέγη τὸ 1699 μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων καὶ μετὰ δύο ἔτη τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου. Ἀπέθανε τὴν 16ην Αὐγούστου 1705. Οἱ ἐκδόται τῶν Ἀπάντων του, λίαν φρονίμως, κατέταξαν τὰ γραπτά του βάσει χρονολογικῶν κριτηρίων, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι εὔκολον εἰς οἱονδήποτε νὰ παρακολουθήσῃ τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστημονικῆς του σκέψεως.

Οὕτω διαπιστοῦμεν ὅτι εἰς τὰς πρώτας φάσεις τῆς σταδιοδρομίας του, εἶχε λάβει γνῶσιν ὅλης τῆς ἐπιστημονικῆς γραμματείας τῆς ἐποχῆς του.

ἐν καιρῷ ὅτι, ὑπό τινας προϋποθέσεις, ὁ ἐν λόγῳ μετασχηματισμὸς ὡδήγησεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων 5ου βαθμοῦ.

Ὁ Tschirnhausen τόσον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅσον καὶ εἰς ἄλλας, συνέλαβε μίαν ἰδέαν πρωτότυπον ἀφήνων εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς συγκομιδῆς τῶν καρπῶν ποὺ ἦτο αὕτη εἰς θέσιν ν' ἀποδώσῃ. Διανοούμενος ἀνεξάρτητος, ἀλλ' ὁρμητικὸς καὶ ἴσως ὄχι πολὺ σκεπτικός, ἐπεσκότισε τὴν φήμην του μὲ τὰ οὐκ ὀλίγα οὔτ' ἐλαφρὰ σφάλματα ποὺ διέπραξε. Τολμηρὸς σπορεὺς ἰδεῶν, ἄφησεν εἰς ἄλλους τὸ ἔργον τῆς ἀξιοποιήσεως, τελειοποιήσεως καὶ καρποφόρου ἐφαρμογῆς των. Ἡ ἀδέκαστος ἱστορία δὲν δύναται παρὰ ν' ἀναγνωρίσῃ τὴν ἀξίαν του καὶ νὰ διαμνημονεύσῃ τὰ ὅσα ἡ ἐπιστήμη ὀφείλει εἰς αὐτόν.

Ἰάκωβος Bernoulli

468. Πολὺ περισσότερον τοῦ Huygens (ὁ ὁποῖος ἐξῆλθεν ἐκ τῆς σκηνῆς τοῦ κόσμου, ὅταν ἀκόμη ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς ἠρίθμει ὀλίγων μόνον ἐτῶν ζωὴν) συνέβαλον εἰς τὸν θρίαμβον τῶν ἰδεῶν τοῦ Leibniz οἱ δύο ἀδελφοὶ Bernoulli, ὁ Ἰάκωβος καὶ ὁ Ἰωάννης, περὶ τῶν ὁποίων τώρα θὰ ὁμιλήσωμεν.

Ὁ Ἰάκωβος ἐγεννήθη εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 27ην Δεκεμβρίου 1654. Ὑπὸ τοῦ πατρὸς προωρίζετο διὰ τὸ ἐκκλησιαστικὸν στάδιον, ἀλλὰ μία ἀκατανίκητος κλίσις τὸν ἔκαμε νὰ στραφῇ πρὸς τὰς ἐπιστήμας, εἰς τὰς ὁποίας ἐξεπαιδεύθη χωρὶς νὰ καταφύγῃ εἰς διδάσκαλον. Ἀπὸ τοῦ 1676 ἐταξείδευσε πρῶτον εἰς Ἑλβετίαν καὶ Γαλλίαν, κατόπιν δὲ εἰς Ἀγγλίαν καὶ Ὁλλανδίαν. Τὸ 1687 τοῦ παρεχώρησαν τὴν καθηγητικὴν ἕδραν τοῦ πατρίου Πανεπιστημίου καὶ δὲν ἐβράδυνε νὰ ἑλκύσῃ περὶ ἑαυτὸν μέγαν ἀριθμὸν μαθητῶν ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη τῆς Εὐρώπης. Καταληφθεὶς ἀπὸ θαυμασμὸν ἐκ τῆς ἀναγνώσεως τοῦ θεμελιώδους ὑπομνήματος τοῦ Leibniz (§ 542), ἀπηυθύνθη πρὸς αὐτὸν δι' ἐπιστολῆς του ἀπὸ 15ης Δεκεμβρίου 1687, διὰ νὰ τοῦ ζητήσῃ κάποιαν διασάφησιν. Ὁ Leibniz, ποὺ εὑρίσκετο τότε εἰς ταξείδιον, δὲν ἔλαβε τὴν ἐπιστολὴν παρὰ τὸ ἔτος 1690. Ἀπαντῶν δὲ ἀμέσως, ἐνεκαινίασε μιὰν ἀπὸ τὰς σπουδαιοτέρας ἐπιστημονικὰς ἀλληλογραφίας, ἡ ὁποία (μὲ μικρὸν διάλειμμα 1697 - 1702, ὀφειλόμενον εἰς κάποιαν παρεξήγησιν) διήρκεσε μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ μεγάλου ἑλβετοῦ μαθηματικοῦ. Οὗτος ἐξελέγη τὸ 1699 μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων καὶ μετὰ δύο ἔτη τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου. Ἀπέθανε τὴν 16ην Αὐγούστου 1705. Οἱ ἐκδόται τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν του, λίαν φρονίμως, κατέταξαν τὰ γραπτά του βάσει χρονολογικῶν κριτηρίων, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι εὔκολον εἰς οἱονδήποτε νὰ παρακολουθήσῃ τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστημονικῆς του σκέψεως.

Οὕτω διαπιστοῦμεν ὅτι εἰς τὰς πρώτας φάσεις τῆς σταδιοδρομίας του, εἶχε λάβει γνῶσιν ὅλης τῆς ἐπιστημονικῆς γραμματείας τῆς ἐποχῆς του.

Μόνον ὅταν ἠνοίχθη πρὸ αὐτοῦ ἡ προοπτικὴ τῆς καταλήψεως μιᾶς καθηγητικῆς ἕδρας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βασιλείας, συνεκέντρωσε τὰς προσπαθείας του εἰς τὰ μαθηματικά. Εἰς τὴν ἐκεῖ ἀποβλέπουσαν διατριβήν του, δημοσιευθεῖσαν ὑπὸ χρονολογίαν 4ης Φεβρουαρίου 1687, ἐπεξειργάσθη



JACQUES BERNOULLI

τρία προβλήματα: ἕνα ἀριθμητικόν, τὸ δεύτερον γεωμετρικόν, τὸ τρίτον ἀστρονομικόν. Τὸ δεύτερον εἶχε προταθῆ ὑπὸ ἑνὸς μαθηματικοῦ ἀπὸ τὸ Amsterdam καὶ εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς τῶν συγχρόνων ἐμφανίζεται ὡς μερικὴ περίπτωσις τοῦ οὕτω καλουμένου «προβλήματος τοῦ Malfatti», ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

469. Ὅτι εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς διδακτικῆς του σταδιοδρομίας ὁ Ἰάκωβος Bernoulli ἐνδιεφέρθη κυρίως μὲ ζητήματα συναφῆ πρὸς τὰ στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν μαρτυρεῖται ἀπὸ τὴν πρώτην διδακτορικὴν διατριβήν, ποὺ συνεζητήθη ὑπὸ τὴν διεύθυνσίν του (5 Ὀκτωβρίου 1688), θέμα τῆς ὁποίας ἦτο ἡ εὐκλείδειος θεωρία περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν. Τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ ἐκδόται τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν τοῦ Ἰακώβου Bernoulli παρενέβαλον μεταξὺ τῶν ἄλλων ἔργων, ποὺ φέρουν τὴν ὑπογραφήν του, καὶ ἀρκετὰς διατριβὰς τῶν

μαθητῶν του, ὁδηγεῖ εἰς τὴν σκέψιν ὅτι αἱ ἐν λόγῳ διατριβαὶ ἦσαν περισσότερον ἔργα τοῦ διδασκάλου παρὰ τῶν μαθητῶν.

Ἐπίσης σχετικὸν μὲ τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, ἀλλὰ πολὺ σημαντικώτερον, εἶναι τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτοῦ δημοσιευθέντων ἄρθρων εἰς τὰ Α.Ε. (Νοεμβρίου 1687). Ἐκεῖ λύεται τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς τριγώνου εἰς τέσσερα μέρη ἰσοδύναμα διὰ δύο εὐθειῶν καθέτων μεταξύ των. Ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύει ὅτι πρόκειται περὶ προβλήματος ἀναγομένου ἀλγεβρικῶς εἰς ἐξίσωσιν 8ου βαθμοῦ, καὶ λυομένου διὰ τομῆς μιᾶς κωνικῆς ὑπὸ μιᾶς καμπύλης 4ου βαθμοῦ. Συμπέρασμα, ἀξιόλογον τοῦ ὁποίου ὁ Leibniz ἀνεγνώρισε τὴν ἀξίαν εἰς ἕνα χωρίον τοῦ ἔργου του Nova algebrae promotio (§ 455). Τὸ ἐν λόγῳ δεῖγμα ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἀπὸ τότε ὁ Ἰάκωβος Bernoulli ἦτο οἰκεῖος μὲ τὴν καρτεσιανὴν γεωμετρίαν. Ἐπιβεβαιοῦται δὲ τοῦτο ἀπὸ δύο ἄρθρα δημοσιευθέντα ἐπίσης εἰς τὰ Α.Ε. (Ἰουνίου 1688 καὶ Σεπτεμβρίου 1689), εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ὁποίων ἀπαντῶνται νέαι σκέψεις γύρω ἀπὸ τὰς καμπύλας ἐλαχίστου βαθμοῦ, ποὺ ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν γραφικὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ἐνῷ τὸ ἄλλο ἀσχολεῖται μὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν λύσιν προβλημάτων στερεῶν καὶ ὑπερστερεῶν μέσῳ εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν. Καὶ εἶναι αὐταὶ αἱ ἐργασίαι τὰ πρῶτα σχόλια τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Βασιλείας εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Descartes. Ἀκολουθοῦν ἄλλα, χαρακτῆρος περισσότερον ἀλγεβρικοῦ, μὲ τὰ ὁποῖα καὶ ἐπλούτισε τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἐπιμεληθεῖσαν λατινικὴν ἔκδοσιν τοῦ διασήμου ἐκείνου ἔργου.

470. Πέντε διδακτορικαὶ διατριβαί, συζητηθεῖσαι ἐπὶ παρουσίᾳ του κατὰ τὰς ἡμέρας 7 Ἰουνίου 1689, 18 Νοεμβρίου 1692, 14 Νοεμβρίου 1696, 16 Δεκεμβρίου 1698 καὶ 8 Ἀπριλίου 1704, ἀποδεικνύουν ὅτι διετήρει ἀδιάπτωτον καὶ ἐνεργὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν θεωρίαν τῶν σειρῶν, ὡς καὶ ὅτι ἔλαβε προσανατολισμὸν πρὸς τὰς ὑψηλοτέρας θεωρίας τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Ἡ τοιαύτη μεταβολὴ συνετελέσθη, ὅπως εἴπομεν, κατόπιν τοῦ ὑπομνήματος ἐκείνου, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Leibniz ἔθεσε τὰ θεμέλια τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Ἡ βαθεῖα σπουδὴ τοῦ ἱστορικοῦ ὑπομνήματος, τὴν ὁποίαν ἔκαμεν ἀπὸ κοινοῦ μὲ τὸν νεώτερον ἀδελφόν του Ἰωάννην, τὸν κατέστησε τελείως κάτοχον τοῦ νέου ἀλγόριθμου, εἰς τρόπον, ὥστε ἀπὸ τοῦ Μαΐου 1690 ἦτο εἰς θέσιν νὰ δημοσιεύσῃ εἰς τὰ Α.Ε. μίαν ἀξιόλογον λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ Leibniz ἐπὶ τῆς «curva descensus aequabilis», ὅπου διὰ πρώτην φορὰν ἀπαντᾶται ἡ ἔκφρασις «calcul integral», δηλαδὴ «ὁλοκληρωτικὸς λογισμός», τοῦ ὁποίου κατόπιν διεξεδίκησε τὴν πατρότητα ὁ ἀδελφός του Ἰωάννης.

Ὁ Ἰάκωβος ἠσχολήθη ἐπίσης μὲ τὴν μελέτην τῆς σχοινοκαμπύλης ἢ ἁλυσοειδοῦς, ὅπως εἶχον κάμει καὶ ὁ Leibniz καὶ ὁ Huygens (Α.Ε., Ἰούνιος

1691). Ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῶν νέων ἀλγορίθμων ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τὴν «ἑλικοειδῆ παραβολήν»:

$$\rho = \sqrt{2a\rho\theta} + a$$

(Α.Ε. Ἰανουάριος 1691), τὴν λογαριθμικὴν σπεῖραν, τὴν λοξοδρομίαν, τὴν «velaria» (Α.Ε., Ἰούνιος 1691). Ἐπὶ τῆς λογαριθμικῆς σπείρας ἐπανῆλθε μετ' ὀλίγον (Α.Ε., Μάϊος 1692) μὲ μίαν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν προτείνεται ἡ προσάρτησις εἰς μίαν δοθεῖσαν καμπύλην ἄλλου γένους καμπύλων, διαφόρων ἀπὸ τὰς ἐξειλιγμένας καὶ τὰς καυστικάς, ποὺ εἶχον ἐξετασθῆ προηγουμένως. Ἐφαρμόζων τὰς ἰδέας του εἰς τὴν λογαριθμικὴν σπεῖραν ἔλαβε, μὲ ἔκπληξίν του, οἰκογένειαν σπειρῶν τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Πλήρης ἐνθουσιασμοῦ διὰ τὴν ἀξιοθαύμαστον αὐτὴν σπεῖραν, ἡ ὁποία εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἀπεκαλύπτετο «κόρη πανομοιότυπος τῆς μητρός», (simillima filia matri), τὴν ἐθεώρησεν ὡς σύμβολον τῆς δυνάμεως εἰς τὰς κακοτυχίας καὶ ἐξεδήλωσε τὴν εὐχὴν νὰ σκαλισθῇ τὸ σχῆμα της ἐπὶ τοῦ τάφου του μὲ τὸ ρητόν: «eadem immutata resurgo» (Ἡ αὐτὴ ἀμετάβλητος ἀνίσταμαι)· εὐχὴ πρὸς τὴν ὁποίαν καὶ συνεμορφώθησαν οἱ φίλοι του.

Ὀλίγον ἔπειτα (Α.Ε. Μάϊος 1692) ἀπεκάλυψεν ἄλλα παρόμοια φαινόμενα καὶ εἰς τὴν κυκλοειδῆ, ἐκ τῆς λύσεως δὲ τοῦ γεωμετρικοῦ αἰνίγματος ποὺ εἶχε προτείνει ὁ Viviani (§ 323) (Α.Ε., Ἰούνιος 1692) ἔλαβεν ἀφορμὴν ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὴν ὁμοιοθεσίαν τῶν κλειστῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ (Α.Ε., Ὀκτώβριος 1696). Αἱ ἔρευναι τοῦ Leibniz ἐπὶ τῆς γωνίας συνεπαφῆς καὶ τῆς ἐγγυτάτης ἐπαφῆς τοῦ ἔδωσαν ἐπίσης ἀφορμὴν νὰ πραγματοποιήσῃ ἰδικάς του (Α.Ε., Ἰούνιος 1693). Ἐξ ἄλλου, ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τῶν δοκῶν ἐδόθη ὑπ' αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 1691, ἐδημοσίευσε δὲ τὴν σχετικὴν ἐργασίαν του εἰς τὰς Α.Ε. μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἀνεξήγητα ἐκεῖνα ἀναγράμματα ποὺ ἦσαν τότε πολὺ «τῆς μόδας» (§ 437). Τὸ μυστήριον ἀπεκάλυψεν ὁ ἴδιος (Α.Ε., Ἰούνιος 1694) εἰς ἕνα σπουδαῖον ὑπόμνημα, ὅπου ἡ ἐργασία του ἐπὶ τῶν ἐλαστικῶν γραμμῶν ἐκτίθεται ἐν πάσῃ λεπτομερείᾳ. Βραδύτερον ἡ εὐθειοποίησις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ ἔδωσε λαβὴν νὰ τελειοποιήσῃ τὴν λύσιν του ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς παρακεντρικῆς ἰσοχρόνου, ὀλίγον δ' ἔπειτα (Α.Ε., Σεπτέμβριος 1694) ἀνεγνώρισεν ὅτι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἠδύνατο νὰ ληφθῇ διὰ προσφυγῆς εἰς μίαν ἄλλην ἀλγεβρικὴν καμπύλην, τουτέστι εἰς τὴν τεταρτοβάθμιον ἐκείνην, ἡ ὁποία κατόπιν ὠνομάσθη «λημνίσκος».

471. Ἄλλην ἀπόδειξιν τῆς εὐεργετικῆς ἐπιδράσεως τοῦ Leibniz ἀποτελεῖ μία ἐργασία του (Α.Ε., Ὀκτώβριος 1694), ὅπου, μεταξὺ ἄλλων, θίγεται τὸ πρόβλημα τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν, τὸ ὁποῖον ἐπραγματεύθη ἀργότερα ἐν ἐκτάσει (Α.Ε., Μάϊος 1698). Γενικεύων ἕνα ἀπὸ τὰ προβλήματα, ποὺ

εἶχε προτείνει ὁ Debeaune (A.E., Ἰούλιος 1696 καὶ Σεπτέμβριος 1697), ἤχθη εἰς τὴν λύσιν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$\frac{dy}{dx} + Ay = By^{\mu},$$

ἔνθα μ τυχὼν σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ A,B γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ x. Καθῆκον μας εἶναι νὰ σημειώσωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν καταλοίπων του εὑρέθησαν σελίδες περιέχουσαι μελέτας ὁλοκληρώσεως ἀξιολόγων διαφορικῶν ἐξισώσεων καὶ ἄλλας ἀφορώσας εἰς τὸν χωρισμὸν τῶν μεταβλητῶν ἐπὶ διαφορικῶν ἐξισώσεων εἰδικῆς μορφῆς.

Μεταξὺ τῶν ἀνεκδότων σελίδων του εὑρίσκεται ἐπίσης ἡ πρώτη νύξις τοῦ προβλήματος τῆς εὑρέσεως καμπύλης (σήμερον καλουμένης κλωθοειδοῦς) μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος ἀνάλογον τοῦ τόξου της, ἐνῷ εἰς ἄρθρον του δημοσιευθὲν εἰς τὰ A.E. Νοεμβρίου 1700 ἀπαντᾶται μία ἀξιόλογος ἔκφρασις τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος ἀλγεβρικῆς καμπύλης.

Ἔλυσεν ἐπίσης τὸ ὑπὸ τοῦ ἀδελφοῦ του Ἰωάννου προταθὲν πρόβλημα: εὑρεῖν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη καὶ ὑφαπτομένη νὰ ἔχουν λόγον σταθερόν. Ἔλυσεν ὁμοίως τὸ πρόβλημα τὸ σχετικὸν μὲ τὴν «καμπύλην ταχίστης καθόδου» (curva celerrimi descensus) (A.E., Μάϊος 1697), ἀναδειχθεὶς εἰς τὴν ἐν λόγῳ περίπτωσιν ἐφάμιλλος τῶν Leibniz, Newton καὶ L' Hôpital, ποὺ ἔλυσαν ἐπίσης τὸ αὐτὸ πρόβλημα.

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο ἀδελφῶν Ἰακώβου καὶ Ἰωάννου, αἱ ὁποῖαι, κατὰ τοὺς χρόνους τῆς νεότητος, ἦσαν οἷαι συνήθως ἐμφανίζονται μεταξὺ ἑνὸς φωτισμένου διδασκάλου καὶ ἀφωσιωμένου μαθητοῦ, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἐψυχράνθησαν, χωρὶς ὅμως νὰ λάβουν τόνους ἀνοικτῆς ἐχθρότητος. Ἡ ἔρις ἐξεδηλώθη ἐξ ἀφορμῆς μερικῶν προβλημάτων προταθέντων ὑπὸ τοῦ «νεωτέρου» εἰς τὴν J.S. τῆς 26ης Αὐγούστου 1697. Τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἰσοπεριμέτρων, τῶν ὁποίων μεγίστη εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ σημασία. Αἱ λύσεις ποὺ ἐδόθησαν εἰς αὐτὰ ὑπὸ τοῦ Ἰακώβου (A.E., Ἰούνιος 1698) προεκάλεσαν μεταξὺ τῶν δύο ἀδελφῶν ἀγρίαν ἀντιδικίαν, μαρτυρουμένην ἀπὸ τὰ κείμενα, τὰ ὁποῖα ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ εὕρῃ εἰς τὰ Ἅπαντα τοῦ πρώτου*. Μόνον ἔπειτα ἀπὸ πολλὰ ἔτη (1718), ὅταν ὁ «πρεσβύτερος» ἀνεπαύετο ἀπὸ δεκαετίας εἰς τὴν γαλήνην τοῦ τάφου, ἀνεγνώρισεν ὁ νεώτερος τὴν ὀρθότητα τῶν κριτικῶν παρατηρήσεων τοῦ ἐκλιπόντος ἀδελφοῦ του καὶ δὲν ἐπεχείρησε πλέον ν' ἀφαιρέσῃ ἀξίαν ἀπὸ

* Ἡ ὁριστικὴ μορφὴ τῆς λύσεως τοῦ ἰσοπεριμετρικοῦ προβλήματος, ὡς αὕτη ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Bernoulli, ἐκτίθεται ἐν πλάτει εἰς ἕνα ὑπόμνημα δημοσιευθὲν εἰς τὰ A.E. Ἰουνίου 1700. Τοῦτο σχολιάζεται ἐν συνεχείᾳ εἰς μίαν διδακτορικὴν διατριβήν, συζητηθεῖσαν εἰς Βασιλείαν, ἐπὶ παρουσίᾳ τοῦ ἐξόχου μαθηματικοῦ, κατὰ Μάρτιον τοῦ 1701.

κείμενα ὑπέροχα, τὰ ὁποῖα σήμερον ἀναγνωρίζονται ὡς λυκαυγὲς τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν.

Ὅσα εἴπομεν δὲν ἀποτελοῦν βεβαίως ἀπολογισμὸν πλήρη τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τοῦ Ἰακώβου Bernoulli, ἂν μή τι ἄλλο, διότι ἐδέησε νὰ παρασιωπήσωμεν τὰς ἐφαρμογὰς ποὺ ἔκαμε τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων, συγκεντρωθείσας εἰς ἕνα τόμον φέροντα τὸν τίτλον Ars conjectandi καὶ δημοσιευθέντα μετὰ δεκαετίαν ἀπὸ τοῦ θανάτου του (βλ. Τόμον III τῆς παρούσης Ἱ σ τ ο ρ ί α ς).

Ἐξ ὅσων ὅμως εἴπομεν, ἐπαρκῶς διαπιστοῦται ἡ πολύτιμος συμβολὴ τοῦ Ἰακώβου εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀπείρου. Ἀντὶ νὰ πηλοβατῇ εἰς ἐδάφη ἀγόνων φιλοσοφικῶν συζητήσεων περὶ τῆς ἀληθοῦς σημασίας τοῦ ἀπειροστοῦ καὶ τοῦ ἀπείρου, ἐπροτίμησε νὰ θέσῃ εἰς ἐφαρμογὴν τὸν νέον ἀλγόριθμον πρὸς λύσιν σπουδαίων προβλημάτων, ὀρθῶς διαβλέπων ὅτι κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐδίδετο ἀφορμὴ τελειοποιήσεως αὐτοῦ καὶ καταδείξεως τῆς εὐεργετικῆς του δυνάμεως. Ὅταν δὲ σκεφθῶμεν, ὅτι ὑπῆρξεν αὐτοδίδακτος καὶ ὅτι ἕνας ὄγκος σημαντικῆς ἐργασίας, ὅπως πιστοῦται ἐκ τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν του, συνετελέσθη εἰς τὸ βραχὺ διάστημα 1686 - 1705, θὰ συμφωνήσωμεν ἀδιστάκτως πόσον δικαιολογημένος εἶναι ὁ θαυμασμὸς τὸν ὁποῖον ἔτρεφον δι᾽ αὐτὸν οἱ σύγχρονοί του, ἀλλὰ καὶ ὁ θαυμασμός, τὸν ὁποῖον συμμεριζόμεθα σήμερον καὶ ἡμεῖς, οἱ μακρινοί του μεταγενέστεροι.

Ἰωάννης Bernoulli

472. Τὰ σημαντικώτερα γεγονότα τῆς ζωῆς τοῦ Ἰωάννου Bernoulli πληροφορούμεθα ἀπὸ μερικὰς σημειώσεις, εὑρεθείσας μεταξὺ τῶν χειρογράφων του, αἱ ὁποῖαι ἐγράφησαν, ἄγνωστον διὰ ποῖον σκοπόν, κατὰ τὰς δυσμὰς τοῦ μακροῦ βίου του*. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 27ην Ἰουλίου 1667, δέκατος υἱὸς τοῦ Νικολάου Bernoulli. Ὑπὸ τοῦ πατρός του προωρίζετο διὰ τὸ ἐμπόριον, κατόπιν ὅμως ἑνὸς ἔτους πρακτικῆς εἰς τὸ Neuenburg, ἐπεθύμησε νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρικὴν στέγην διὰ νὰ ἐπαναλάβῃ τὰς σπουδάς του, τὰς ὁποίας εἶχε κατ᾽ ἀνάγκην διακόψει. Ὁ πατήρ του, ἂν καὶ ἔβλεπε μελαγχολικῶς ἄλλην μίαν φορὰν νὰ ματαιώνωνται τὰ σχέδιά του, δὲν ἐπέμεινε καὶ ἐδοκίμασε τοιουτοτρόπως τὴν χαρὰν νὰ ἴδῃ τὸν υἱόν του ἀπὸ τοῦ 1685 κάτοχον τοῦ τίτλου τοῦ «magister» εἰς τὴν φιλοσοφίαν.

Ἐνῷ ἐφοίτα εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βασιλείας, ὁ Ἰωάννης, ὑπὸ

* Ἄλλη αὐτοβιογραφία (ἢ καλύτερα αὐτοαπολογία) τοῦ Ἰωάννου, καλύπτουσα τὴν ζωήν του μέχρι τοῦ 1742, ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ R. Wolf εἰς τὸν Τόμον II τοῦ βιβλίου του Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Zürich, 1859).

κείμενα ὑπέροχα, τὰ ὁποῖα σήμερον ἀναγνωρίζονται ὡς λυκαυγὲς τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν.

Ὅσα εἴπομεν δὲν ἀποτελοῦν βεβαίως ἀπολογισμὸν πλήρη τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τοῦ Ἰακώβου Bernoulli, ἂν μή τι ἄλλο, διότι ἐδέησε νὰ παρασιωπήσωμεν τὰς ἐφαρμογὰς ποὺ ἔκαμε τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων, συγκεντρωθείσας εἰς ἕνα τόμον φέροντα τὸν τίτλον Ars conjectandi καὶ δημοσιευθέντα μετὰ δεκαετίαν ἀπὸ τοῦ θανάτου του (βλ. Τόμον III τῆς παρούσης Ἱστορίας).

Ἐξ ὅσων ὅμως εἴπομεν, ἐπαρκῶς διαπιστοῦται ἡ πολύτιμος συμβολὴ τοῦ Ἰακώβου εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀπείρου. Ἀντὶ νὰ πηλοβατῇ εἰς ἐδάφη ἀγόνων φιλοσοφικῶν συζητήσεων περὶ τῆς ἀληθοῦς σημασίας τοῦ ἀπειροστοῦ καὶ τοῦ ἀπείρου, ἐπροτίμησε νὰ θέσῃ εἰς ἐφαρμογὴν τὸν νέον ἀλγόριθμον πρὸς λύσιν σπουδαίων προβλημάτων, ὀρθῶς διαβλέπων ὅτι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐδίδετο ἀφορμὴ τελειοποιήσεως αὐτοῦ καὶ καταδείξεως τῆς εὐεργετικῆς του δυνάμεως. Ὅταν δὲ σκεφθῶμεν, ὅτι ὑπῆρξεν αὐτοδίδακτος καὶ ὅτι ἕνας ὄγκος σημαντικῆς ἐργασίας, ὅπως πιστοῦται ἐκ τῶν Ἀπάντων του, συνετελέσθη εἰς τὸ βραχὺ διάστημα 1686 - 1705, θὰ συμφωνήσωμεν ἀδιστάκτως πόσον δικαιολογημένος εἶναι ὁ θαυμασμὸς τὸν ὁποῖον ἔτρεφον δι' αὐτὸν οἱ σύγχρονοί του, ἀλλὰ καὶ ὁ θαυμασμός, τὸν ὁποῖον συμμεριζόμεθα σήμερον καὶ ἡμεῖς, οἱ μακρινοί του μεταγενέστεροι.

Ἰωάννης Bernoulli

472. Τὰ σημαντικώτερα γεγονότα τῆς ζωῆς τοῦ Ἰωάννου Bernoulli πληροφορούμεθα ἀπὸ μερικὰς σημειώσεις, εὑρεθείσας μεταξὺ τῶν χειρογράφων του, αἱ ὁποῖαι ἐγράφησαν, ἄγνωστον διὰ ποῖον σκοπόν, κατὰ τὰς δυσμὰς τοῦ μακροῦ βίου του*. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 27ην Ἰουλίου 1667, δέκατος υἱὸς τοῦ Νικολάου Bernoulli. Ὑπὸ τοῦ πατρός του προωρίζετο διὰ τὸ ἐμπόριον, κατόπιν ὅμως ἑνὸς ἔτους πρακτικῆς εἰς τὸ Neuenburg, ἐπεθύμησε νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πατρικὴν στέγην διὰ νὰ ἐπαναλάβῃ τὰς σπουδάς του, τὰς ὁποίας εἶχε κατ' ἀνάγκην διακόψει. Ὁ πατήρ του, ἂν καὶ ἔβλεπε μελαγχολικῶς ἄλλην μίαν φορὰν νὰ ματαιώνωνται τὰ σχέδιά του, δὲν ἐπέμεινε καὶ ἐδοκίμασε τοιουτοτρόπως τὴν χαρὰν νὰ ἴδῃ τὸν υἱόν του ἀπὸ τοῦ 1685 κάτοχον τοῦ τίτλου τοῦ «magister» εἰς τὴν φιλοσοφίαν.

Ἐνῷ ἐφοίτα εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βασιλείας, ὁ Ἰωάννης, ὑπὸ

* Ἄλλη αὐτοβιογραφία (ἢ καλύτερα αὐτοαπολογία) τοῦ Ἰωάννου, καλύπτουσα τὴν ζωήν του μέχρι τοῦ 1742, ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ R. Wolf εἰς τὸν Τόμον II τοῦ βιβλίου του Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Zürich, 1859).

τὴν καθοδήγησιν τοῦ ἀδελφοῦ του Ἰακώβου (ὅπως ἀφηγεῖται ὁ ἴδιος εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Leibniz τῆς 15ης Νοεμβρίου 1702), ἐπεδόθη μὲ μεγάλον ζῆλον εἰς τὴν μελέτην τῶν μαθηματικῶν. Ὅταν ἐξήντλησε τὴν μελέτην τῶν ἀρχαίων, ἐστράφη πρὸς τὰ νεώτερα ἔργα καὶ πρὸ πάντων, ὅπως δηλοῖ ὁ ἴδιος, πρὸς τὰ ἔργα τοῦ Descartes. Ἀλλὰ τὴν ἰσχυροτέραν ἐπίδρασιν ἤσκησεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ πρῶτον κείμενον τοῦ Leibniz ἐπὶ τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ ἡ μετέπειτα ἀλληλογραφία του μὲ τὸν μεγάλον διδάσκαλον, ἡ ὁποία ἤρχισε τὸ 1693 διὰ νὰ κλείσῃ μὲ τὸν θάνατον τοῦ τελευταίου.

JEAN BERNOULLI

Περὶ τὸ τέλος τοῦ 1690 μετέβη εἰς Γενεύην, τὸ ἑπόμενον δὲ φθινόπωρον εἰς Γαλλίαν, πρῶτα εἰς τὴν Λυὼν καὶ κατόπιν εἰς Παρισίους, ὅπου παρέμεινε περισσότερον ἀπὸ ὅσον ἐσχεδίαζεν ἀρχικῶς, λόγῳ πολυαρίθμων ἐπιστημονικῶν σχέσεων ποὺ συνῆψεν ἐκεῖ. Ἐκείνην τὴν ἐποχὴν ὁ πατὴρ Malebranche συνεκέντρωνεν ἑβδομαδιαίως εἰς τὴν οἰκίαν του τοὺς καλλιεργοῦντας τὰς ἐπιστήμας. Προσκληθεὶς νὰ λάβῃ μέρος εἰς τὰς συγκεντρώσεις ἐκείνας, ὁ νεαρὸς ἑλβετὸς μαθηματικός, ἐγνώρισε τὸν μαρκήσιον

de l' Hôpital, ὁ ὁποῖος τοῦ ἐξεδήλωσε τὴν ἔφεσιν νὰ διδαχθῇ ὑπ' αὐτοῦ τὸν διαφορικὸν λογισμόν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἔκαμεν ὁ Bernoulli ὄχι μόνον προφορικῶς, ἀλλὰ καὶ δι' ἀρκετῶν σημειώσεων, τὰς ὁποίας τοῦ παρέδωσε τόσον εἰς Παρισίους, ὅσον καὶ εἰς τὴν μαρκησιανὴν ἔπαυλιν τοῦ Blois*.

Ὅταν ἐπανῆλθεν εἰς Παρισίους ἐγνώρισε τὸν Varignon, μὲ τὸν ὁποῖον κατόπιν διετήρει ἀλληλογραφίαν μέχρι τέλους τῆς ζωῆς του. Κατ' ἐπιθυμίαν τῶν γονέων του ἐπέστρεψεν εἰς τὴν Βασιλείαν τὸ 1692. Εἰς τὸ ἐκεῖ Πανεπιστήμιον ἔλαβε μετὰ διετίαν τὸν τίτλον τοῦ διδάκτορος εἰς τὴν ἰατρικήν. Τὸ 1695 ἀπεδέχθη μίαν καθηγητικὴν ἕδραν, ποὺ τοῦ προσεφέρθη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Groningen, ὅπου καὶ παρέμεινε δέκα ἔτη, ἀπομακρυνθεὶς κατόπιν ἐνεργειῶν φανατικῶν θεολόγων, οἱ ὁποῖοι τὸν κατηγόρησαν ὡς αἱρετικόν, ὀπαδὸν τοῦ ἀντιτριαδικοῦ κηρύγματος τοῦ Socinus. Κατὰ τὸ ταξείδιον τῆς ἐπιστροφῆς του ἐκ τῆς Ὀλλανδίας εἰς τὴν Ἑλβετίαν ἐπληροφορήθη τὸν θάνατον τοῦ ἀδελφοῦ του Ἰακώβου, καὶ κατὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς Βασιλείαν εὗρε τὴν Σύγκλητον τοῦ Πανεπιστημίου ἐν σώματι νὰ τὸν ἀναμένῃ διὰ νὰ τοῦ ἀναθέσῃ τὴν καθηγητικὴν ἕδραν ποὺ ἐδόξασεν ὁ ἀδελφός του, χωρὶς νὰ τὸν ὑποβάλῃ εἰς τὰς συνήθεις διατυπώσεις τοῦ δημοσίου διαγωνισμοῦ. Ἀποδεχθεὶς τὴν πρόσκλησιν ἔκαμε τὸ ἐναρκτήριον μάθημά του τὴν 17ην Νοεμβρίου 1705.

Ἡ διδασκαλία του ἐστέφθη ὑπὸ πλήρους ἐπιτυχίας, ἂν κρίνωμεν ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν νέων, οἱ ὁποῖοι προσέτρεχον νὰ τὸν ἀκούσουν ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη τῆς Εὐρώπης, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων μερικοὶ δὲν ἐχρειάσθησαν πολὺν χρόνον διὰ ν' ἀνέλθουν εἰς ὑψηλὴν φήμην, καὶ ἀπὸ τὰς συχνὰς προσκλήσεις ποὺ τοῦ ἀπηυθύνοντο ἐκ μέρους ἄλλων μεγάλων Πανεπιστημίων. Ἡ δὲ μεγάλη ὑπόληψις, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον, ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἀνῆκεν εἰς τοὺς ἐξοχωτέρους ἐπιστημονικοὺς ὀργανισμοὺς τῆς ἐποχῆς του (Παρισίων, Βερολίνου, Λονδίνου, Βολωνίας, Πετρουπόλεως). Ἡ ἀλληλογραφία του μὲ τοὺς κορυφαίους ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του κατέχει μέχρι σήμερον μεγάλην ἀξίαν ἀπὸ ἐπιστημονικῆς καὶ ἱστορικῆς ἀπόψεως.

Φιλύποπτος καὶ ζηλότυπος ἐκ φύσεως, περιῆλθεν εἰς ἐχθρότητα μὲ τὸν ἀδελφὸν καὶ διδάσκαλόν του Ἰάκωβον τόσον, ὥστε αἱ σχέσεις των τελικῶς ν' ἀποβοῦν «ἀδελφικαὶ» μόνον ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ποὺ θὰ ἥρμοζεν εἰς τὰς σχέσεις τῶν Ἄβελ καὶ Κάϊν. Τί πλέον; Ἐπετέθη, πλήρης ὀργῆς, ἀκόμη

* Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς του εἰς τὴν ἐξοχικὴν ἐκείνην ἔπαυλιν ἐγνώρισεν ἐκ τοῦ πλησίον καὶ τὸν P. Carlo Reyneau (1656 - 1728), ὁ ὁποῖος ἐζήτησεν ἐπίσης τὰ φῶτα τοῦ Bernoulli καὶ ὠφελήθη τόσον πολὺ ἐξ αὐτῶν, ὥστε νὰ δυνηθῇ νὰ γράψῃ τὸ βιβλίον του Analyse demontrée (Paris, 1703). Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἔχων ὑπ' ὄψιν ὁ Fontenelle, δὲν ἐδίστασε νὰ χαρακτηρίσῃ τὸν συγγραφέα του, μὲ φανερὰν ὑπερβολήν, ὡς «Εὐκλείδην τῆς Ἀνωτέρας Γεωμετρίας».

καὶ ἐναντίον τοῦ υἱοῦ του Δανιήλ, ὅταν οὗτος ἐκρίθη ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων ἄξιος νὰ συμμερισθῇ μὲ τὸν πατέρα του τὸ βραβεῖον ποὺ προέβλεπεν ὁ διαγωνισμὸς τοῦ 1734. Ἀπέθανεν εἰς τὴν Βασιλείαν τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1748, ἀπολαμβάνων τὸν σεβασμὸν τῶν συμπολιτῶν του, οἱ ὁποῖοι τὸν ἐθεώρουν ὡς ἕνα νέον Ἀρχιμήδη, μὲ κάποιαν πάντοτε ἐπιφύλαξιν γύρω ἀπὸ τὴν ἀλήθειαν τοῦ δευτέρου ἐκ τῶν κατωτέρω στίχων, ποὺ ἔγραψεν ὁ Βολταῖρος καὶ ἐτέθησαν ὡς προμετωπὶς εἰς τὰ Ἅπαντα:

«Τὸ πνεῦμα του εἶδε τὴν ἀλήθεια
κι ἡ καρδιά του γνώρισε τὸ δίκηο,
δόξα τῆς Ἑλβετίας ἔγινε
καὶ ὅλων τῶν ἐθνῶν αὐτῆς τῆς γῆς».

Ἀπὸ τὸ σύντομον αὐτὸ βιογραφικὸν σχεδίασμα προκύπτει, ὅτι ἡ ἐπιστημονικὴ σταδιοδρομία τοῦ δευτέρου Bernoulli ἐκτείνεται ἐφ' ὅλου σχεδὸν τοῦ πρώτου ἡμίσεος τοῦ XVIII αἰῶνος. Προτιθέμενοι νὰ περιγράψωμεν αὐτὴν τὴν στιγμὴν μόνον τὴν πρώτην φάσιν τῆς ἐξελίξεως τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, θὰ περιορίσωμεν τὴν ἔρευνάν μας μόνον εἰς ὅσα ἔγραψεν ἐπὶ τοῦ θέματος πρὸ τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἀναλήψεως τῆς καθηγητικῆς ἕδρας τῆς Βασιλείας, ἐπιφυλαττόμενοι νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ὑπόλοιπον δρᾶσιν του εἰς τὸν Τόμον III τῆς Ἱστορίας μας.

473. Ἱστορικὴ ἀμεροληψία μᾶς ἀναγκάζει νὰ μνημονεύσωμεν κατ' ἀρχὰς μίαν ἀποτυχοῦσαν ἀπόπειράν του (J.S., 1693) νὰ κερδίσῃ 60 πιστόλας, αἱ ὁποῖαι ἐπρόκειτο νὰ δοθοῦν εἰς ἐκεῖνον, ὅστις, χωρὶς ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὰς ἐργασίας τοῦ Rolle, θὰ ἠδύνατο νὰ δείξῃ πῶς γίνεται γραφικῶς ἡ λύσις μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μέσῳ χαράξεως καταλλήλου γραμμῆς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἶχε προηγουμένως σχεδιασθῇ τυχὸν τμῆμα μιᾶς βοηθητικῆς καμπύλης. Κατὰ τῆς ἀπαντήσεως, τὴν ὁποίαν ἐδημοσίευσεν, ἠγέρθησαν δημοσίως ὀρθαὶ κριτικαὶ παρατηρήσεις ἀπὸ κάποιον ἀνώνυμον, ποὺ ἦτο πιθανῶς καὶ ὁ ἀθλοθέτης καὶ μάλιστα, κατὰ τὰ φαινόμενα, μὴ ἔχων παρὰ ἀπειροστὴν διαφορὰν ἀπὸ τὸν Rolle*. Εἰς αὐτὰς ματαίως ἐπεχείρησε νὰ δώσῃ ἀπάντησιν (J.S., 1694) καὶ οὕτω τὰ νομίσματα, ποὺ εἶχον κατατεθῆ εἰς συμβολαιογραφεῖον τῶν Παρισίων, ἐπεστράφησαν εἰς τὸν γενναιόδωρον ἀθλοθέτην.

Μέγας ἀριθμὸς ἐργασιῶν τοῦ Ἰωάννου Bernoulli, προγενεστέρων τοῦ 1705, πραγματεύονται τὰ αὐτὰ ζητήματα, περὶ τὰ ὁποῖα ὡς εἴδομεν κατεγίνοντο οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης: ἔρευνα τοῦ σχήματος τῆς ἁλυσοειδοῦς (A.E. Ἰούνιος 1691), προσδιορισμὸς τῆς ἐξισώσεως τῶν

* Τὸ καθιστᾷ πιστευτὸν ἡ ἐκεῖ ὑπάρχουσα ἀναφορὰ εἰς ἕνα δημοσιευθὲν ὑπὸ τὸ ὄνομα Remi Lochell, ποὺ εἶναι ἀναγραμματισμὸς ὁλοφάνερος τοῦ Michel Rolle.

καυστικῶν ἄνευ χρήσεως παραγώγων (A.E. Ἰανουάριος 1692), καμπύλη «velaria» (J.S. Ἀπρίλιος 1692), καμπύλαι τοῦ Debeaune (J.S. Σεπτεμβρίου 1692 καὶ A.E. Μαΐου 1693 καὶ Φεβρουαρίου 1696) καὶ ἄλλαι εἰδικαὶ καμπύλαι ἀξιόλογοι.

Εἰς μίαν σελίδα ἀνέκδοτον, γραφεῖσαν ὡς σχόλιον εἰς ἄρθρον τοῦ Leibniz (A.E. Ἀπριλίου 1693), ὁ Ἰωάννης — τοῦ ὁποίου δὲν διέφυγεν ἡ περιωρισμένη δυνατότης τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως διὰ σειρῶν — ὑπέδειξε μίαν γενικὴν μέθοδον ὁλοκληρώσεως, ἡ ὁποία, διὰ τὴν μεγάλην καὶ ἀδιαφιλονίκητον εὐφυΐαν της, ἀξίζει ν' ἀναφερθῇ ἐδῶ.

Ἔστω y δοθεῖσα συνάρτησις τοῦ x. Γράφομεν τὴν ταυτότητα:

$$ydx = ydx + xdy - xdy - \frac{x^2d^2y}{2!\,dx} + \frac{x^2d^2y}{2!\,dx} + \frac{x^3d^3y}{3!dx^2} - \frac{x^3d^3y}{3!dx^2} + \ldots$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον:

$$ydx = (ydx + xdy) - \left(xdy + \frac{x^2d^2y}{2!\,dx}\right) + \left(\frac{x^2d^2y}{2!\,dx} + \frac{x^3d^3y}{3!dx^2}\right) - \ldots$$

Ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν διωνύμων τοῦ δευτέρου μέλους δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ βάσει τοῦ τύπου παραγωγίσεως γινομένου δύο παραγόντων, καὶ οὕτω καταλήγομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον:

$$\int ydx = yx - \frac{x^2}{2!}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \ldots,$$

τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς εὗρεν ὁ Ἰωάννης. Δικαίως λοιπὸν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος φέρει τὸ ὄνομα «σειρὰ τοῦ Bernoulli».

474. Εἰς τὸν Ἰωάννην Bernoulli ἀνήκει ἐπίσης ἡ τιμὴ ὅτι πρῶτος, ἀναπτύσσων μερικὰς ἰδέας τοῦ Leibniz, ἔθεσε τὰς βάσεις τοῦ «λογισμοῦ τῶν ἐκθετικῶν συναρτήσεων», τὸν ὁποῖον ὁ ἴδιος ὠνόμασεν percurrents (A.E. Μαρτίου 1697). Εἰς τὴν σχετικὴν ἐργασίαν ἀπαντῶνται αἱ καμπύλαι:

$$x^x = y, \quad x^x = a^y, \quad x^x + x = x^y + y, \quad \text{κλπ.}$$

καί, ὅπερ σπουδαιότερον, κανόνες πρὸς διαφόρισιν ἐκφράσεων τοῦ τύπου $\log f(x)$. Πρῶτος ἐδημοσίευσε τὴν σημαντικὴν παρατήρησιν (A.E. Ὀκτωβρίου 1694) ὅτι εἰς μίαν συνήθη διαφορικὴν ἐξίσωσιν ἀνταποκρίνεται ἀπειρία ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων, δὲν διέφυγε δὲ τῆς προσοχῆς του ἡ χρησιμότης τοῦ χειρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως.

Εἰς μίαν ἐργασίαν του, ληφθεῖσαν τὸ 1702 ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων, μεταξὺ τῶν ἄλλων θεμάτων, ἐδίδαξε τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ρη-

τῶν συναρτήσεων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ρίζαι τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι πᾶσαι ἁπλαῖ, χωρὶς ὅμως τὸν περιορισμὸν νὰ εἶναι αὗται πραγματικαί. Μετὰ διετίαν (A.E. Αὐγούστου 1704) ἔδειξε πῶς προσδιορίζεται ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως:

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}$$

διὰ $x = a$, ὅταν εἶναι:

$$f(a) = 0, \quad F(a) = 0$$

χωρὶς ὅμως νὰ θέσῃ τὸν περιορισμὸν αἱ δύο ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις $f(x)$, $F(x)$ νὰ μὴ περιέχουν ριζικά. Τὸ προτεινόμενον τέχνασμα συνίσταται εἰς ρητοποίησιν τῆς ἐξισώσεως:

$$yF(x) - f(x) = 0$$

καὶ κατόπιν εἰς διαίρεσιν τῆς προκυπτούσης διὰ καταλλήλου δυνάμεως τοῦ $(x - a)$. Ἐὰν τεθῇ $x = a$, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ὡς πρὸς y ἔχει μίαν ρίζαν της τὴν ζητουμένην ἀληθῆ τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἔκφρασις τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος μιᾶς ἀλγεβρικῆς καμπύλης, ἡ δοθεῖσα, ὅπως εἴπομεν ἤδη, ὑπὸ τοῦ Ἰακώβου Bernoulli (§ 471), ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς τὸν Ἰωάννην νὰ χειρισθῇ τὸ ἀνάλογον πρόβλημα διὰ τὰς ὑπερβατικὰς καμπύλας (A.E. Ἀπρίλιος 1701).

Ἀνώνυμος ὀλλανδὸς εἶχε προτείνει τὸ 1703 τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Δοθείσης μιᾶς καμπύλης ἀλγεβρικῆς (κοινῶς καλουμένης γεωμετρικῆς), νὰ μετασχηματισθῇ αὕτη εἰς ἀπειρίαν ἄλλων, ἐπίσης γεωμετρικῶν, ἀλλὰ διαφόρων γενῶν, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος μὲ τὴν προταθεῖσαν». Ἐξ ἀφορμῆς τοῦ προβλήματος τούτου ὁ Ἰωάννης ἐνεπνεύσθη τὰς «ἑρπούσας καμπύλας» (curvae reptorie: A.E. Αὐγούστου 1705), ἐκ τῆς ἀνακαλύψεως δὲ ὑπὸ τῶν Huygens καὶ Leibniz (§ 541) τῶν τετραγωνισίμων, μὲ ἀκρίβειαν, κυκλοειδικῶν χωρίων, ὡδηγήθη εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἀπειρίας ἄλλων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐνδιαφέρουσαν ἰδιότητα (A.E., Ἰούλιος 1699, Ἰούνιος 1700 καὶ Ἀπρίλιος 1701).

Ἀναφορικῶς μὲ τὸ πρόβλημα τῶν ἰσοπεριμέτρων (§ 471), μολονότι αἱ ἀρχαὶ εἶχον ἤδη τεθῆ ὑπὸ τοῦ πρεσβυτέρου ἀδελφοῦ, εἰς τὸν Ἰωάννην ἀνήκει ἡ τιμὴ ὅτι διετύπωσε τὴν ἀκόλουθον ἀρχήν, τῆς ὁποίας ἡ χρησιμότης ἀπεδείχθη ἐκ τῶν πολυαρίθμων ἐφαρμογῶν της: «Μία καμπύλη, ἔχουσα ἐλάχιστον κατὰ μῆκος τῆς διαδρομῆς της, θὰ ἔχῃ ἐπίσης ἐλάχιστον καὶ κατὰ μῆκος ἑνὸς τμήματός της ὁσονδήποτε μικροῦ».

Δὲν μᾶς ἐπιτρέπει ὁ χῶρος νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας ἐπὶ τῶν συμβολῶν τοῦ Ἰωάννου Bernoulli εἰς τὸ πρόβλημα τῆς εὐθειοποιήσεως τῶν καμπύλων (A.E., Αὔγουστος 1695, Ἰούνιος καὶ Σεπτέμβιος 1698) καὶ

εἰς τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ σχήματος στερεοῦ ἐλαχίστης ἀντιστάσεως (Α.Ε., Νοέμβριος 1699 καὶ Ἰούνιος 1700). Δὲν μᾶς ἐπιτρέπεται ὅμως νὰ παρασιωπήσωμεν μίαν κατηγορίαν προβλημάτων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, τὰ ὁποῖα ἡ γεωμετρία τοῦ Καρτεσίου ἐφαίνετο ἀδυνατοῦσα νὰ λύσῃ. Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρόβλημα ποὺ συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς καμπύλης, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὸν κύκλον κοινὴν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

$$OP \cdot OQ = \text{σταθερόν}$$

ἢ νὰ ἔχῃ ἄλλην ἰδιότητα, ὅπως τὴν

$$OP^n + OQ^n = \text{σταθερόν},$$

ὅπου P, Q τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης ὑπὸ διατεμνούσης ἀγομένης ἀπὸ σταθεροῦ σημείου O, (Α.Ε., Ἰούνιος καὶ Δεκέμβριος 1696).

Θὰ δώσωμεν τέλος εἰς τὰς πληροφορίας αὐτὰς μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι ὁ Ἰωάννης πρῶτος ἔδωσεν εἰς τὸν ὅρον «συνάρτησις» τὴν ἀκόλουθον σημασίαν: «ποσότης συντεθειμένη, καθ' οἷον δήποτε τρόπον, ἐκ μιᾶς μεταβλητῆς καὶ σταθερῶν». Ἡ σημασία αὐτὴ παρέμεινεν εἰς τὴν ἐπιστήμην καθ' ὅλον τὸν XVIII αἰῶνα καὶ πλέον, μέχρις ὅτου ἐκρίθη ἀναγκαῖον νὰ θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις ἀνεξαρτήτως τῆς ἀναλυτικῆς των ἐκφράσεως, καὶ δὴ ὡς ἀπεικονίσεις συνόλου ἐπὶ συνόλου, βάσει ἰδιαιτέρας ἑκάστοτε ἀντιστοιχίας.

De l' Hôpital

475. Μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων μαθητῶν, τοὺς ὁποίους εἶχεν ὁ Ἰωάννης Bernoulli, ὁ πρῶτος κατὰ χρονολογικὴν τάξιν καὶ γνωστὸς ἤδη εἰς ἡμᾶς εἶναι ὁ Guillaume François de l' Hôpital, μαρκήσιος τοῦ Saint - Mesme καὶ κόμης τοῦ Autremont. Ἐγεννήθη τὸ 1661 εἰς Παρισίους καὶ ἀπὸ νεαρᾶς ἡλικίας ἔδειξε μεγάλην κλίσιν πρὸς τὰς ἐπιστήμας. Παρὰ ταῦτα προωρίζετο ὑπὸ τῆς οἰκογενείας του διὰ στρατιωτικὴν σταδιοδρομίαν, τῆς ὁποίας παρῃτήθη, λόγῳ ἐλαττωματικότητος τῆς ὁράσεώς του. Γνωρίσας προσωπικῶς τὸν Ἰωάννην Bernoulli, ὠφελήθη τόσον ἐκ τῆς διδασκαλίας του, ὥστε ἀπὸ τοῦ 1693 ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα ποὺ τοῦ ἐπρότεινεν ὁ διδάσκαλός του «νὰ προσδιορίσῃ μίαν καμπύλην τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη καὶ ὑφαπτομένη νὰ ἔχουν λόγον σταθερόν». Παρόμοιαι ἐπιτυχίαι ἔστεψαν τὰς προσπαθείας του εἰς τὴν λύσιν ἄλλων προβλημάτων ἐπικαίρου ἐνδιαφέροντος, ὅπως τῆς βραχιστοχρόνου, τοῦ στερεοῦ ἐλαχίστης ἀντιστάσεως κλπ. Τοιουτοτρόπως ἀπέκτησεν εὐρεῖαν φήμην, ἡ ὁποία τοῦ ἤνοιξε τὰς θύρας τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων καὶ τοῦ ἐπέτρεψε νὰ συνάψῃ ἀλληλογραφίαν μὲ τὸν Huygens καὶ τὸν Leibniz.

εἰς τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ σχήματος στερεοῦ ἐλαχίστης ἀντιστάσεως (A.E., Νοέμβριος 1699 καὶ Ἰούνιος 1700). Δὲν μᾶς ἐπιτρέπεται ὅμως νὰ παρασιωπήσωμεν μίαν κατηγορίαν προβλημάτων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, τὰ ὁποῖα ἡ γεωμετρία τοῦ Καρτεσίου ἐφαίνετο ἀδυνατοῦσα νὰ λύσῃ. Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρόβλημα ποὺ συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς καμπύλης, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὸν κύκλον κοινὴν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

$$OP \cdot OQ = \text{σταθερόν}$$

ἢ νὰ ἔχῃ ἄλλην ἰδιότητα, ὅπως τὴν

$$OP^n + OQ^n = \text{σταθερόν},$$

ὅπου P, Q τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης ὑπὸ διατεμνούσης ἀγομένης ἀπὸ σταθεροῦ σημείου O, (A.E., Ἰούνιος καὶ Δεκέμβριος 1696).

Θὰ δώσωμεν τέλος εἰς τὰς πληροφορίας αὐτὰς μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι ὁ Ἰωάννης πρῶτος ἔδωσεν εἰς τὸν ὅρον «συνάρτησις» τὴν ἀκόλουθον σημασίαν: «ποσότης συντεθειμένη, καθ' οἷον δήποτε τρόπον, ἐκ μιᾶς μεταβλητῆς καὶ σταθερῶν». Ἡ σημασία αὐτὴ παρέμεινεν εἰς τὴν ἐπιστήμην καθ' ὅλον τὸν XVIII αἰῶνα καὶ πλέον, μέχρις ὅτου ἐκρίθη ἀναγκαῖον νὰ θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις ἀνεξαρτήτως τῆς ἀναλυτικῆς των ἐκφράσεως, καὶ δὴ ὡς ἀπεικονίσεις συνόλου ἐπὶ συνόλου, βάσει ἰδιαιτέρας ἑκάστοτε ἀντιστοιχίας.

De l' Hôpital

475. Μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων μαθητῶν, τοὺς ὁποίους εἶχεν ὁ Ἰωάννης Bernoulli, ὁ πρῶτος κατὰ χρονολογικὴν τάξιν καὶ γνωστὸς ἤδη εἰς ἡμᾶς εἶναι ὁ Guillaume François de l' Hôpital, μαρκήσιος τοῦ Saint - Mesme καὶ κόμης τοῦ Autremont. Ἐγεννήθη τὸ 1661 εἰς Παρισίους καὶ ἀπὸ νεαρᾶς ἡλικίας ἔδειξε μεγάλην κλίσιν πρὸς τὰς ἐπιστήμας. Παρὰ ταῦτα προωρίζετο ὑπὸ τῆς οἰκογενείας του διὰ στρατιωτικὴν σταδιοδρομίαν, τῆς ὁποίας παρητήθη, λόγῳ ἐλαττωματικότητος τῆς ὁράσεώς του. Γνωρίσας προσωπικῶς τὸν Ἰωάννην Bernoulli, ὠφελήθη τόσον ἐκ τῆς διδασκαλίας του, ὥστε ἀπὸ τοῦ 1693 ἦτο εἰς θέσιν νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα ποὺ τοῦ ἐπρότεινεν ὁ διδάσκαλός του «νὰ προσδιορίσῃ μίαν καμπύλην τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη καὶ ὑφαπτομένη νὰ ἔχουν λόγον σταθερόν». Παρόμοιαι ἐπιτυχίαι ἔστεψαν τὰς προσπαθείας του εἰς τὴν λύσιν ἄλλων προβλημάτων ἐπικαίρου ἐνδιαφέροντος, ὅπως τῆς βραχιστοχρόνου, τοῦ στερεοῦ ἐλαχίστης ἀντιστάσεως κλπ. Τοιουτοτρόπως ἀπέκτησεν εὐρεῖαν φήμην, ἡ ὁποία τοῦ ἤνοιξε τὰς θύρας τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων καὶ τοῦ ἐπέτρεψε νὰ συνάψῃ ἀλληλογραφίαν μὲ τὸν Huygens καὶ τὸν Leibniz.

Ἀπέθανε, ὀλίγον μεγαλύτερος τῶν τεσσαράκοντα ἐτῶν, τὴν 2αν Φεβρουαρίου 1704.

476. Ἡ Ἀνωτέρα Ἀνάλυσις ὀφείλει ἰδιαιτέραν εὐγνωμοσύνην εἰς τὸν de l' Hôpital ὄχι τόσον διὰ τὴν λύσιν εἰδικῶν προβλημάτων, ὅσον διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ δημοσιευθεῖσαν πρώτην μεθοδικὴν ἔκθεσιν τῆς μέχρι τότε γνωστῆς ὕλης τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Δὲν ἐσκέφθη δὲ νὰ κάμῃ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, ἐπειδὴ εἶχε πληροφορηθῆ ὅτι ὁ ἴδιος ὁ Leibniz ἐσκόπει νὰ παρουσιάσῃ μίαν τοιαύτην ἔκθεσιν.



MARQUIS DE L' HOSPITAL

Τὸ ἔργον τοῦ L' Hôpital φέρει τὸν τίτλον Ἀ ν ά λ υ σ ι ς τ ῶ ν ἀ π ε ι ρ ο σ τ ῶ ν (Analyse des infiniment petits). Ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον ἀνωνύμως τὸ 1696, ἀνετυπώθη δὲ μὲ τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως τὸ 1715 καὶ κατ' ἐπανάληψιν μετὰ ταῦτα. Τὸ σύγγραμμα συνετέθη ἐξ ὑλικῶν ληφθέντων ἐξ ὅσων εἶχον δημοσιευθῆ μέχρι τότε ἐπὶ τοῦ θέματος, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὸν Πρόλογον τοῦ ἰδίου: «Ἀναγνωρίζω ὅτι πολλὰ ὀφείλω εἰς τὰ φῶτα τῶν κ.κ. Bernoulli καὶ ἰδιαιτέρως εἰς ἐκεῖνα τοῦ νεαροῦ καθηγητοῦ ἤδη τῆς Groningen. Ἤντλησα ἀδιακρίτως ἐκ τῶν ἀνακαλύψεών των ὡς καὶ ἐξ ἐκείνων τοῦ κ. Leibniz. Διὰ τοῦτο

δὲν ἀρνοῦμαι νὰ διεκδικήσουν ὅ,τι ἀνήκει εἰς αὐτούς, εὐχαρίστως ἀρκούμενος εἰς ὅ,τι εὐαρεστηθοῦν ἐκεῖνοι ν' ἀφίσουν δι' ἐμέ».

Προτοῦ ἀρχίσωμεν μίαν ἔστω καὶ περιληπτικὴν ἔκθεσιν τοῦ περιεχομένου τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις δὲν παρουσιάζεται ἐκεῖ ὡς κλάδος αὐτόνομος, ἀλλ' ὡς ἀπαραίτητον βοήθημα εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ σπουδάσῃ τὰς ἰδιότητας τῶν ἐπιπέδων καμπύλων».

Τὸ Μέρος I περιλαμβάνει τοὺς κανόνας διαφορίσεως τῶν ἐκφράσεων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν θεμελιωδῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Ὅτι οὗτοι ἐπιτρέπουν τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας (μέσῳ τῶν ὑφαπτομένων) ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως εἰς τὸ Μέρος II ἐπὶ πλήθους παραδειγμάτων.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ἐκτίθεται εἰς τὸ Μέρος III, ὅπου ἐν τούτοις ματαίως θ' ἀνεζήτει κανεὶς ἕνα ἀναλυτικὸν κριτήριον ἀναγνωρίσεως ἑκατέρας περιπτώσεως ἐκ τῶν προτέρων. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν πάντως τῶν σημείων καμπῆς καὶ ἀνακάμψεως ὁ συγγραφεὺς εἰσάγει τὰς παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως (Μέρος IV), καίτοι, κατ' αὐτόν, ἡ ἔρευνα τῶν ἐν λόγῳ σημείων δὲν ἀπαιτεῖ παρὰ μόνον τὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως.

Τὰ ἑπόμενα τρία Μέρη περιέχουν ἐφαρμογὰς τῶν προηγουμένων εἰς τὴν ἔρευναν τῶν σπειρῶν καὶ τῶν καυστικῶν ἑκατέρου εἴδους, τὸ δὲ Μέρος VIII εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἐνειλιγμένων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων. Τὸ Μέρος IX, ἂν καὶ παρουσιάζεται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ὡς ἐλάσσονος σημασίας, εἰς τὴν ἰδικήν μας ἀντίληψιν κατέχει σπουδαιότητα μεγίστην, διότι ἐκεῖ ἀπαντᾶται ἡ περίφημος ἐκείνη μέθοδος, ποὺ λέγεται ἀκόμη κανὼν τοῦ l'Hôpital, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζονται αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ τῶν ἐκφράσεων τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$. Δὲν γίνεται πάντως ἐκεῖ ὑπαινιγμὸς ἐπὶ τῆς ὑφισταμένης δυνατότητος νὰ παρουσιάζεται καὶ ὁ λόγος τῶν πρώτων παραγώγων ὑπὸ τὴν ἰδίαν ἀόριστον μορφήν.

Τὸ τελευταῖον μέρος πραγματεύεται — διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν σύγχρονον ὁρολογίαν — τὸν προσδιορισμὸν τῶν παραγώγων ἐπὶ συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς ρίζαι ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.

Εἰς τὴν βραχεῖαν αὐτὴν σύνοψιν δὲν ἠδυνήθημεν νὰ ἐξάρωμεν τὴν διαύγειαν καὶ ἀκρίβειαν τοῦ ὕφους τοῦ συγγραφέως, οὔτε τὸν πλοῦτον τῶν παραδειγμάτων, ποὺ καθιστοῦν ἑλκυστικὴν μίαν γῆν ἐκ φύσεως ξηράν. Καὶ εἶναι ἀκριβῶς εἰς αὐτὰ τὰ χαρίσματα, ποὺ ὀφείλει ἡ Analyse des infiniment petits τὴν μεγάλην ἐπιτυχίαν, τὴν ὁποίαν τόσον ταχέως κατέκτησε καὶ ἐπὶ τόσον μακρὸν χρόνον διετήρησε.

477. Ἀπὸ τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ Ἰωάννου Bernoulli, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὴν Βασιλικὴν Βιβλιοθήκην τῆς Στοκχόλμης, προκύπτει ὅτι

οὗτος, πληροφορηθεὶς περὶ τῆς σχεδιαζομένης ὑπὸ τοῦ παλαιοῦ μαθητοῦ του ἐκδόσεως, δὲν διετύπωσε καμμίαν ἀντίρρησιν. Λαμβάνων δὲ κατόπιν ἀνὰ χεῖρας ἀντίτυπον τοῦ βιβλίου Analyse des infiniment petits δὲν ἐφείσθη ἐπαίνων, ὑπὲρ τοῦ συγγραφέως. Ὅταν ὅμως ἐδιάβασεν ἕνα σχόλιον τοῦ Saurin, ὅπου ἀπεδίδετο εἰς τὸν l' Hôpital ἡ ἀνακάλυψις τοῦ κανόνος τοῦ σχετικοῦ μὲ τὴν ἔκφρασιν 0/0, καὶ μίαν πλήρη ἐγκωμίων κριτικὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου Analyse..., δημοσιευθεῖσαν εἰς τὴν J.S., ὅπου ἡ ἐκεῖ ἀναφερομένη δήλωσις ὡς πρὸς τὰς πηγὰς ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ συγγραφεὺς ἐδίδετο κατὰ τρόπον πολὺ ἀόριστον καὶ ἀνακριβῆ, ὁ Ἰωάννης Bernoulli ἐχολώθη εἰς τοιοῦτον βαθμόν, ὥστε δὲν ἐδίστασε ν' ἀπευθύνῃ κατηγορίαν λογοκλοπίας ἐναντίον τοῦ l' Hôpital, οὔτε νὰ δηλώσῃ ἀπεριφράστως, εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Leibniz ὑπὸ χρονολογίαν 8 Φεβρουαρίου 1698, ὅτι ὁ l' Hôpital δὲν ἔκαμε τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ μεταφράσῃ εἰς τὴν γαλλικὴν τὰς σημειώσεις ποὺ εἶχε συντάξει ὁ Bernoulli, ὅταν ἐχρημάτισε διδάσκαλός του, διὰ νὰ τὸν μυήσῃ εἰς τοὺς νέους λογισμούς. Τέλος μετὰ τὸν θάνατον τοῦ μαρκησίου, διεξεδίκησεν ὑπὲρ ἑαυτοῦ (A.E., Αὔγουστος 1704) τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ κανόνος εὑρέσεως τῆς ἀληθοῦς τιμῆς μιᾶς ἐκφράσεως ἀορίστου μορφῆς.

Τὸ ζήτημα τῆς ἐξακριβώσεως τῆς ἀληθείας παρέμεινεν ἄλυτον ἐπὶ δύο περίπου αἰῶνας, ἤτοι μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν συστηματικαὶ ἔρευναι εἰς τὴν δημοτικὴν Βιβλιοθήκην τῆς Βασιλείας ἀπέληξαν εὐτυχῶς εἰς ἐπανεύρεσιν τῶν σημειώσεων τοῦ Bernoulli. Μία ἀπροκατάληπτος ἀντιπαραβολὴ τούτων πρὸς τὴν Analyse ὁδηγεῖ πράγματι εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Bernoulli εὑρίσκετο κατὰ μέγα μέρος πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δικαίου. Διότι τόσον ἡ ἀφετηρία ὅσον καὶ τὸ γενικὸν σχέδιον, ἀκόμη δὲ καὶ τὸ σύνολον σχεδὸν τῶν διδομένων παραδειγμάτων εἶναι τὰ αὐτὰ εἰς τὰ δύο κείμενα. Πρέπει ὅμως νὰ προστεθῇ, ὅτι ἔχει ὑπὲρ αὐτοῦ ὁ l' Hôpital τὴν τιμὴν ὅτι ἐπέτυχε νὰ διορθώσῃ πολλὰς ἀνακριβείας ποὺ εἶχε διαπράξει ὁ Bernoulli κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν καὶ τὴν χάραξιν τῶν σχημάτων· πέραν δὲ τούτου ἐπέτυχε νὰ μεταβάλῃ ἕνα σύνολον ξηρῶν σημειώσεων εἰς μίαν γοητευτικὴν ἔκθεσιν, ἡ ὁποία, ἀκριβῶς διὰ τὰ αἰσθητικά της χαρίσματα, ἤσκησεν ἀποφασιστικὴν καὶ ἀδιαφιλονίκητον ἐπίδρασιν εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης.

Ἡ προμνημονευθεῖσα κατηγορία ἐπιβεβαιοῦται σιωπηρῶς ἀπὸ τὸ προοίμιον μιᾶς ἐκθέσεως τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, παρεμβληθείσης εἰς τὰ Ἄπαντα τοῦ Bernoulli, ὡς ἀπόσπασμα ἐκ μαθημάτων του πρὸς τὸν μαρκήσιον de l' Hôpital κατὰ τὰ ἔτη 1691 - 1692. Ἀρχίζει πράγματι τὸ προοίμιον μὲ τὰς λέξεις «εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις» (vidimus in praecendentibus) ἐπεξηγουμένας μὲ μίαν ὑποσημείωσιν: «Ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρεται εἰς τὰ προηγούμενα μαθήματα διαφορικοῦ λογισμοῦ, τὰ ὁποῖα

ἔκαμεν ὁ ἴδιος εἰς τὸν ἐξοχώτατον de l' Hôpital, καὶ τὰ ὁποῖα παρελήφθησαν, καθ' ὅσον ἐδημοσιεύθησαν ἤδη εἰς ἰδιαίτερον βιβλίον, ὑπὸ τὸν τίτλον Analyse des infiniment petits, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἤδη εἰς χεῖρας ὅλων».

Τὰ Μαθήματα ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὸν μαρκήσιον de l' Hôpital κατὰ τὰ ἔτη 1691 - 1692 κατέχουν ἀναμφισβήτητον ἀξίαν, ὄχι μόνον διότι προέρχονται ἀπὸ τὸν Ἰωάννην Bernoulli, ἀλλ' ἐπίσης διότι ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον συστηματικὸν ἔργον τοῦ εἴδους του, ποὺ γνωρίζομεν, καὶ διότι ἐπιτρέπουν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ὁ νέος αὐτὸς κλάδος τῆς ἐπιστήμης.

Ἀπὸ τὸ πρῶτον μάθημα προκύπτει ὅτι ἐγνώριζον τότε νὰ ὁλοκληρώνουν μόνον τὰς δυνάμεις ἀκόμη καὶ μὲ ἐκθέτην κλασματικόν, ὡς καὶ τὰς συναρτήσεις ποὺ δύνανται ν' ἀναχθοῦν εἰς αὐτὰς διὰ καταλλήλου ἀλλαγῆς μεταβλητῆς. Διὰ τὴν ἐπινόησιν δὲ σχετικῶν τεχνασμάτων συνιστᾷ σοφώτατα ὁ Bernoulli νὰ ἐμπνεώμεθα ἀπὸ τὸν Διόφαντον. Οὔτε παραλείπει νὰ δηλώσῃ ὅτι διὰ νὰ δώσωμεν εἰς τ' ἀποτελέσματα ὅλην τὴν γενικότητα, ποὺ ἁρμόζει εἰς αὐτά, εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέτωμεν μίαν αὐθαίρετον σταθεράν.

Ἀληθὲς εἶναι ὅτι ὅσον αἱ θεωρητικαὶ βάσεις, τὰς ὁποίας θέτει ὁ συγγραφεύς, εἶναι πτωχαί, τόσον πλουσία εἶναι ἡ ποικιλία τῶν ἐφαρμογῶν. Διδάσκει πράγματι τὴν παρέμβασιν τῆς ὁλοκληρώσεως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν καὶ εἰς τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα τῶν ἐφαπτομένων, ἐνῷ διὰ πολλῶν καὶ καταλλήλων παραδειγμάτων ὑποδεικνύει πῶς γίνεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν γενικῶν θεωριῶν εἰς τὰς συγκεκριμένας περιπτώσεις.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου τὸν ὁδηγεῖ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐνειλιγμένων καὶ ἐξειλιγμένων μετ' ἐφαρμογῶν εἰς τὴν εὐθειοποίησιν τῶν καμπύλων. Ἀκολουθοῦν ἐκτενεῖς ἔρευναι ἐπὶ τῶν ἐξ ἀνακλάσεως καὶ διαθλάσεως καυστικῶν, μὲ ἰδιαιτέραν διατριβὴν ἐπὶ περιπτώσεων εἰς τὰς ὁποίας ἡ θεωρουμένη καμπύλη εἶναι περιφέρεια, παραβολὴ ἢ κυκλοειδής.

Πολλὰ Μαθήματα ἀφιεροῦνται εἰς ἐπίκαιρα φυσικομαθηματικὰ προβλήματα τῆς ἐποχῆς: καμπύλη ἰσόχρονος, παρακεντρικὴ ἰσόχρονος, ταυτόχρονος, ἁλυσοειδής, ἐλαστική, βελάρια, λιντεάρια, καὶ μερικαὶ νύξεις ἐπὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς διαθλάσεως.

Ὁ τετραγωνισμὸς διὰ σειρῶν δίδει εἰς τὸν συγγραφέα ἀφορμὴν ν' ἀσχοληθῇ ἐπίσης μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν σειρῶν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ριζῶν ἀριθμῶν καὶ ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων. Ἐν ἐπιλόγῳ ὁ Bernoulli διδάσκει τὴν γραφικὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων γ' καὶ δ' βαθμοῦ.

Καίτοι, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ἀνωτέρω, πολλαὶ ἀπὸ τὰς σελίδας αὐτὰς δὲν ἀνήκουν αὐστηρῶς εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύπην μας, διότι τὰ Μαθήματα τοῦ Bernoulli ἐδημοσιεύθησαν ἥμισυ αἰῶνα μετὰ τὴν ἐποχὴν ποὺ ἐδιδάχθησαν. Τὸ 1742, ὅταν εἶδον

τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος εἰς τὰ Ἅπαντα τοῦ συγγραφέως, ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς εἶχε φθάσει εἰς τοιαύτην κατάστασιν ἐξελίξεως, ὥστε τὰ ἐν λόγῳ μαθήματα νὰ θεωροῦνται τοῦ λοιποῦ ἀπηρχαιωμένα καὶ ὡς τοιαῦτα μὴ δυνάμενα πλέον ν' ἀσκήσουν τὴν εὐεργετικὴν ἐπίδρασιν ποὺ ἠδύνατο κανεὶς εὐλόγως ν' ἀναμένῃ ἀπὸ αὐτά.

478. Ἐπιστρέφοντες εἰς τὸν de l' Hôpital, θεωροῦμεν ὑποχρέωσιν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ἴδιος, διὰ νὰ προπαρασκευάσῃ τοὺς ἀναγνώστας εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἔγραψε μίαν ἐξαίρετον πραγματείαν μὲ τίτλον: Traité analytique des sections coniques, (Ἀναλυτικὴ πραγματεία τῶν κωνικῶν τιμῶν), ἀπὸ τὴν ὁποίαν, κατὰ τὴν ἡμέραν τοῦ θανάτου του, δὲν ἔλειπε παρὰ ὁ Πρόλογος. Παρὰ τὸ κενὸν τοῦτο, τὸ ἔργον ἐδημοσιεύθη, αἱ δὲ πολυάριθμοι ἐκδόσεις ποὺ ἐπηκολούθησαν ἀποδεικνύουν ἐπαρκῶς τὴν εὐνοϊκὴν ὑποδοχὴν τῆς ὁποίας ἔτυχε τοῦτο. Ὑποδοχὴν ἄλλωστε καλῶς ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ ἔργου, ἂν μή τι ἄλλο, διότι εἰς τὴν καρτεσιανὴν μέθοδον εἰσήγαγεν ἀναμφισβητήτους τελειοποιήσεις, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ ἀποδοχὴ καὶ ἀξόνων μὴ ὀρθογωνίως τεμνομένων ὡς καὶ ἡ σήμανσις αὐτῶν, διὰ πρώτην φοράν, διὰ τῶν σημείων + καὶ —, μὲ τὴν γνωστὴν σημασίαν, ποὺ ἀποδίδομεν εἰς αὐτὰ καὶ σήμερον. Παρὰ ταῦτα ὁ συγγραφεὺς βεβαιώνει φρονίμως τὸν ἀναγνώστην ὅτι θὰ περιορισθῇ εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα συμβαίνουν εἰς τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν κατευθύνσεων τῶν συντεταγμένων ἀξόνων.

Ὁποία εἶναι ἡ ὕλη τοῦ ἔργου καὶ κατὰ ποῖον τρόπον ταξινομεῖται προκύπτει ἀπὸ τοὺς ἀκολούθους τίτλους τῶν δέκα Βιβλίων, ποὺ τὸ ἀποτελοῦν: I. Περὶ τῆς παραβολῆς. II. Περὶ τῆς ἐλλείψεως. III. Περὶ τῆς ὑπερβολῆς. IV. Περὶ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν. V. Σύγκρισις τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τῶν τμημάτων των. VI. Περὶ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν, θεωρουμένων ἐπὶ τοῦ στερεοῦ. VII. Περὶ γεωμετρικῶν τόπων. VIII. Περὶ τῶν ἀορίστων προβλημάτων. IX. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῶν ἐξισώσεων. X. Περὶ τῶν ὡρισμένων προβλημάτων.

Ὡς πρὸς τὴν μέθοδον τῆς ἐκθέσεως, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὁ συγγραφεύς, ἀφοῦ ἀποκαθιστᾷ καὶ διερευνᾷ τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις τῶν τριῶν κωνικῶν, θέτει ὡς σκοπόν του τὴν εὕρεσιν καὶ διατύπωσιν κριτηρίων ἀναγνωρίσεως ἑκάστης καμπύλης ἐκ τῆς γενικῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, καὶ παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἔφθασε τὴν τελειότητα τῶν σημερινῶν συμπερασμάτων, διέτρεξεν ἕνα μέρος τῆς ὁδοῦ τὴν ὁποίαν ἔπρεπε ν' ἀκολουθήσῃ, διὰ νὰ φθάσῃ ἐκεῖ.

Ὅπως προκύπτει ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὴν Analyse, ὁ de l' Hôpital ἦτο μᾶλλον ἕνα καλλιεργημένον πρόσωπον παρὰ ἕνας πρωτότυπος διανοούμενος, ἡ δὲ μεγάλη γνωριμία του μὲ τὴν γραμματείαν τῆς ἐποχῆς τὸν ἐβοήθησε

τὰ μέγιστα εἰς τὸ ν' αὐξήσῃ τὴν γοητείαν τῆς ἐκθέσεώς του, διὰ τῆς λύσεως τῶν σπουδαιοτέρων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης προβλημάτων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τὰ ἐξοχώτερα: Κατασκευὴ κωνικῆς ἐξ ἐπαρκοῦς ἀριθμοῦ σημείων καὶ ἐφαπτομένων· ἔρευνα τῶν κυκλικῶν τομῶν εἰς κῶνον δευτέρου βαθμοῦ· πρόβλημα προταθὲν ὑπὸ τοῦ Ruggiero di Ventimiglia εἰς τὴν ἐφημερίδα τῶν πεπαιδευμένων (Giornale dei letterati) τῆς Πάρμας (Ἀπρίλιος 1693) καὶ ἀτελῶς λυθὲν ὑπὸ τοῦ Saccheri· ὑποδιαίρεσις τυχούσης γωνίας μέσῳ εἰδικοῦ ὀργάνου ἐπινοηθέντος ὑπὸ τοῦ P. T. Ceva (§ 420)· διαίρεσις ἑνὸς τριγώνου εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη μέσῳ δύο εὐθειῶν καθέτως τεμνομένων (μέθοδος Ἰακώβου Bernoulli, § 469)· ὀργανικὴ γένεσις τῶν κωνικῶν κατὰ Newton (§ 439)· ἔρευνα (γενομένη ἤδη εἰς τὰ Principia) τοῦ σημείου τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τριῶν δοθέντων ἔχουν μεταξύ των δοθείσας διαφοράς.

Ἐν κατακλεῖδι, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ συγγραφεύς, μὲ τὸ ἔργον του αὐτό, ἀνταπεκρίθη πλήρως εἰς τὸν σκοπὸν τὸν ὁποῖον εἶχε πρὸ ὀφθαλμῶν, νὰ προπαρασκευάσῃ δηλαδὴ τοὺς ἀναγνώστας εἰς τὴν κατανόησιν τῆς Analyse καὶ γενικώτερον ὅλων τῶν κειμένων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXX

Η ΜΕΓΑΛΗ ΔΙΕΝΕΞΙΣ

479. Ἐὰν ὁ ἀναγνώστης, ποὺ μᾶς παρηκολούθησεν ἕως ἐδῶ, ρίψῃ ἕνα καθολικὸν βλέμμα εἰς τὸ προηγούμενον Κεφάλαιον, δὲν θὰ βραδύνῃ ν' ἀντιληφθῇ ὅτι, ἐνῷ ἡ μέθοδος τῶν ροῶν ἐμφανίζεται τρόπον τινὰ ὡς ἕνα φυτὸν ὠχρὸν καὶ ἐξησθενημένον ἀπὸ ἔλλειψιν φωτὸς καὶ ἀέρος, ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς ἀνεπτύσσετο θαυμασίως, χάρις εἰς τὸν ἐνθουσιώδη, φωτισμένον καὶ συνεπῆ ζῆλον μιᾶς ὁμάδος μαθηματικῶν πρώτης τάξεως. Τοιαύτη σύγκρισις — τὴν ὁποίαν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρέλειψεν ὁ Newton νὰ κάμῃ — ἀσφαλῶς θὰ διετάραξε τὴν χαρὰν ποὺ εὐλόγως ᾐσθάνετο ἀπὸ τὰς ὁμοφώνους ἐκδηλώσεις θαυμασμοῦ, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀπὸ τὴν νῆσον του καὶ ἀπὸ τὴν ἤπειρον κατέφθανον ἀλλεπάλληλοι πρὸς τὸν δημιουργὸν τῆς θεωρίας τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.

Εἴδομεν, ἐξ ἄλλου, ὅτι ἀπὸ καιροῦ εἶχε συνάψει μὲ τὸν Leibniz σχέσεις, μὴ ἀμέσους, ἀλλὰ διαπνεομένας ἀπὸ εὐγενέστατα αἰσθήματα πλήρους καὶ ἀμοιβαίας ἐκτιμήσεως. Ἀπὸ τῆς πλευρᾶς του ὁ Leibniz, λαβὼν γνῶσιν εἰς νεαρὰν ἀκόμη ἡλικίαν, ὅτι ἡ Ἀγγλία ἦτο ἕδρα σπουδαίων μαθηματικῶν ἐρευνῶν, ἐφρόντισε νὰ πληροφορῆται κανονικῶς περὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τῆς ἐπιστήμης πέραν τῆς Μάγχης. Τοιουτοτρόπως ἐπληροφορήθη τὰς ἀνακαλύψεις τῶν J. Gregory καὶ Mercator καὶ ἔλαβε τὴν εὐκαιρίαν νὰ διαβάσῃ τὰς περιφήμους ἐπιστολὰς ποὺ ἔγραψεν ὁ Newton τὴν 13ην Ἰουνίου καὶ 24ην Ὀκτωβρίου 1676 δι' αὐτόν. Ὡς πρὸς τὴν δευτέραν ἐπιστολήν, ὑπενθυμίζομεν (§ 437) ὅτι, σχετικῶς μὲ τὴν μέθοδον τῶν ροῶν, ἀπαντᾶται ἐκεῖ μία μόνον ἐκφώνησις ὑπὸ τὴν αἰνιγματικὴν γραφήν:

6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12vx

τῆς ὁποίας ἡ σημασία μόνον μετὰ δεκαετίαν ἐγνώσθη ὅτι ἦτο ἡ ἀκόλουθος: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et viceversa» (δηλαδή: δοθείσης τυχούσης ἐξισώσεως μὲ ρεούσας ὁσασδήποτε, εὑρεῖν τὰς ροὰς καὶ ἀντιστρόφως). Θὰ κάμωμεν ἀμέσως μίαν ὄχι ἄσκοπον παρατήρησιν: φανερὸν εἶναι ὅτι, καὶ ἂν ἀκόμη ὁ Leibniz ἦτο εἰς θέσιν ν' ἀποκρυπτογραφήσῃ αὐτὸ τὸ αἴνιγμα, πολὺ ὀλίγον θὰ εἶχε δυνηθῇ νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν ἀποκάλυψιν τῶν νευτωνείων μεθόδων. Εἰς ἀπάντη-

σιν τῶν ἐπιστολῶν ἐκείνων (5 Ἀπριλίου 1677), ὁ Leibniz ἔδωσεν ἕνα συνοπτικὸν ἀλλὰ σαφὲς σχεδιογράφημα τῆς φύσεως καὶ τῶν σκοπῶν τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀπείρου καὶ ἀσφαλῶς θὰ εἶχε κάμει καὶ ἄλλας ἀνακοινώσεις ἐπὶ τοῦ θέματος, ἐὰν ὁ ἐπελθὼν ἐν τῷ μεταξὺ θάνατος τοῦ Oldenburg (Αὔγουστος 1678) δὲν κατέστρεφε τὴν ὁδὸν ἐπικοινωνίας τῶν δύο τούτων κορυφαίων ἐκπροσώπων τῆς ἐπιστημονικῆς διανοήσεως.

480. Διὰ νὰ λάβωμεν μεταγενεστέρας πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὰς μαθηματικὰς ἐπιδόσεις τοῦ Leibniz, σκόπιμον εἶναι νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν Ὀκτώβριον τοῦ 1684, ὅτε ὁ φιλόσοφος ἐδημοσίευσε τὸ θεμελιῶδες ἐκεῖνο ὑπόμνημα ποὺ ἀνελύσαμεν ἐν § 452. Τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἔκαμεν ἐκεῖ λόγον περὶ ἀναλόγων ἐρευνῶν ἐκ μέρους ἄλλων ἐπιστημόνων εἶναι εὐεξήγητον, ἀφοῦ ἐπρόκειτο περὶ ἔργου προωρισμένου νὰ δώσῃ συντόμους πληροφορίας πρωτοτύπων μεθόδων. Ἡ ἐν λόγῳ ὅμως σιωπή, ἑρμηνευθεῖσα ὡς ἐσκεμμένη ἀμέλεια, ἐμφανίζεται σήμερον ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ πρῶτα ὀλισθήματα ποὺ ἐπεκαλέσθησαν οἱ ἀντιδικοῦντες κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὀξείας ἔριδος, ἡ ὁποία εὑρίσκετο ὑπὸ ζύμωσιν.

Ὁ Newton, ποὺ ἀναμφιβόλως ἔλαβε γνῶσιν τοῦ ὑπομνήματος τοῦ Leibniz προτοῦ παρουσιάσῃ εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν τοῦ Λονδίνου τὸ χειρόγραφον τῶν Principia, ἀντεπεξῆλθεν εἰς τὴν σιωπὴν τοῦ ἐφαμίλλου του μὲ τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν, ὑπὸ μορφὴν σχολίου εἰς τὸ Βιβλίον I: «Κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἀλληλογραφίας, ποὺ ἔλαβε χώραν πρὸ δεκαετίας περίπου μεταξὺ τοῦ διαπρεποῦς μαθηματικοῦ G. W. Leibniz καὶ ἐμοῦ, κατόπιν ἰδικῆς μου ἀνακοινώσεως ὅτι κατεῖχον μίαν μέθοδον προσδιορισμοῦ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, κατασκευῆς ἐφαπτομένων καὶ ἀναλόγων πράξεων, ἐφαρμοσίμων τόσον ἐπὶ ρητῶν ὅσον καὶ ἐπὶ ἀρρήτων ἐκφράσεων, μέθοδον τὴν ὁποίαν ἀπέκρυψα δι' ἀναμίξεως τῶν γραμμάτων, ποὺ εἰσέρχονται εἰς τὴν φράσιν: «Data aequatione quotcunque...» (βλ. ἀνωτέρω) «ὁ διαπρεπὴς ἐπιστήμων ἀπήντησεν ὅτι καὶ ἐκεῖνος ἐπίσης διεμόρφωσε μίαν μέθοδον, τῆς αὐτῆς φύσεως, τὴν ὁποίαν μοῦ ἀνεκοίνωσε καὶ ἡ ὁποία δὲν διαφέρει τῆς ἰδικῆς μου παρὰ μόνον εἰς τὰς λέξεις καὶ τὸν συμβολισμόν. Θεμέλιον ἀμφοτέρων εἶναι τὸ περιεχόμενον τοῦ προηγουμένου λήμματος» (διαφόρισις δυνάμεως).

Εἰς τὰς μετρημένας αὐτὰς λέξεις ὁ Leibniz καὶ ἄλλοι μετ' αὐτοῦ ἐθεώρησαν, ὅτι εὗρον ρητὴν ἀναγνώρισιν τῶν δικαιωμάτων του εἰς τὴν μεγαλειώδη ἀνακάλυψιν. Ἄνθρωποι ὅμως, θεωρούμενοι ὡς αὐθεντικοὶ ἑρμηνευταὶ τῆς σκέψεως τοῦ Newton, ἀντελήφθησαν ἀντιθέτως ὅτι ὁ τελευταῖος ἠθέλησεν ἀποκλειστικῶς νὰ βεβαιώσῃ ὅτι ἐκεῖνος π ρ ῶ τ ο ς εἶχε κάμει εἰς τὸν Leibniz ἀνακοίνωσιν περὶ τοῦ θέματος. Ἐὰν τοιαύτη ἦτο πράγματι ἡ πρόθεσίς του, ἁρμόζει νὰ πιστεύσωμεν ὅτι ἐπρέσβευεν ὁ Newton ὡς ὑπη-

ρεσίαν τοῦ λόγου τὴν ἀπόκρυψιν καὶ ὄχι τὴν ἀποκάλυψιν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως. Ὁ Leibniz, ποὺ ὅπως γνωρίζομεν εὑρίσκετο τότε εἰς ταξείδιον, ἀπορροφημένος εἰς ἀναδιφήσεις τῶν ἀρχείων, δὲν ἐγνώρισεν — ἂν δώσωμεν πίστιν εἰς τοὺς λόγους του — τὰ Principia ἢ τοὐλάχιστον δὲν ἔδωσεν εἰς αὐτὰ τὴν ἀπαιτουμένην προσοχήν. Καὶ ὅταν ἐστράφη ἐκ νέου εἰς φυσικομαθηματικὰς μελέτας, ἐδημοσίευσεν εἰς τὰ A.E. τοῦ Ἰανουαρίου 1689 ἕνα ἀτυχὲς Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente (Σχεδίασμα ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως τῶν μέσων καὶ κινήσεως βαρέων βλημάτων ἐν μέσῳ ἀνθισταμένῳ), εἰς τὸ ὁποῖον, χωρὶς ν' ἀναφέρῃ τὸν Newton, ἐξέθετε μερικὰ ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τελευταῖος εἶχε φθάσει προγενεστέρως, προσθέτων μάλιστα ἐκ μέρους του ἀρκετὰ σφάλματα. Τοῦτο ὑπῆρξε τὸ δεύτερον ὀλίσθημα ἐκ μέρους τοῦ φιλοσόφου τῆς αἰσιοδοξίας, τὸ ὁποῖον προεκάλεσε τὴν παρέμβασιν τοῦ Wallis. Ὁ τελευταῖος, διὰ νὰ στηρίξῃ ἐπὶ στερεῶν βάσεων τὰ δικαιώματα τοῦ Newton ἐπὶ τῶν νέων ἀλγορίθμων, παρενέβαλεν εἰς τὸν Τόμον II (1695) τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν του μερικὰ χωρία ἐκ τοῦ ἔργου Tractatus de quadratura curvarum, ποὺ περέμενεν ἀνέκδοτον.

481. Παρὰ τὰ ἐπεισόδια αὐτά, τὰ ὁποῖα μόνον ἀργότερα ἔλαβον τὸν χαρακτῆρα ἀψιμαχίας προαγγελούσης μίαν ἀληθῆ μάχην, αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο κορυφαίων ἀνταγωνιστῶν δὲν ὑπέστησαν ριζικὰς μεταβολάς. Ἀρκοῦν νὰ τὸ ἀποδείξουν α) ἡ δημοσίευσις εἰς τὴν Ἀγγλίαν (τῇ συγκαταθέσει τοῦ Newton, ὁ ὁποῖος ἐδιάβασε τὸ χειρόγραφον) ἑνὸς ἔργου μὲ γεῦσιν Leibniz, ὅπως ἐκεῖνο τοῦ Craig (§ 461) καὶ β) ἡ ἀκόλουθος δήλωσις, τὴν ὁποίαν παρενέβαλεν ὁ μαρκήσιος de l' Hôpital εἰς τὸν Πρόλογον τοῦ βιβλίου του Analyse : «Μία δικαιοσύνη ὀφείλεται ἀκόμη εἰς τὸν σοφὸν κ. Newton, τὴν ὁποίαν καὶ αὐτὸς ὁ κ. Leibniz τοῦ ἀπέδωσεν : ὅτι εἶχεν ἐπίσης εὕρει κάτι παρόμοιον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ θαυμασίου Βιβλίου του τοῦ φέροντος τὸν τίτλον Philosophiae naturalis principia mathematica, τὸ ὁποῖον μᾶς ἔδωσε τὸ 1687, καὶ τὸ ὁποῖον σχεδὸν ἐν τῷ συνόλῳ του δὲν εἶναι παρὰ ἕνας τοιοῦτος λογισμός. Ὁ συμβολισμὸς ὅμως τοῦ κ. Leibniz καθιστᾷ τὸν ἰδικόν του εὐκολώτερον καὶ ἀποτελεσματικώτερον, πλὴν τῆς δυνατότητος ἐφαρμογῆς του εἰς ποικιλίαν περιπτώσεων». Προσθέτομεν ὅτι τὰ φιλικὰ αἰσθήματα τοῦ Leibniz διαφαίνονται ἐπίσης ἐκ τῶν φράσεων ποὺ ἔγραψεν ὁ ἴδιος πρὸς τὸν Huygens, ὅταν ἔμαθεν (ἀπὸ πρόσωπα, ποὺ τὰς εἶχον ὑπερβάλει) τὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν νευρασθένειαν ποὺ εἶχε παροδικῶς καταλάβει τὸν Newton (§ 431).

Ἡ κατάστασις ὅμως αὐτὴ τῶν πραγμάτων ὑπέστη μίαν βαθεῖαν μεταμόρφωσιν ἐξ αἰτίας τοῦ Faccio de Duillier (λατινικά : Fatio Duillerius, συγγραφέως ἑνὸς μικροῦ ἔργου δημοσιευθέντος εἰς Λονδῖνον τὸ 1699

ἐπὶ τῆς «linea brevissimi descensus», δηλαδὴ τῆς βραχιστοχρόνου καμπύλης, καὶ ἐπὶ τῆς καμπύλης γενετείρας τοῦ ἐκ περιστροφῆς στερεοῦ ἐλαχίστης ἀντιστάσεως. Ἐπρόκειτο περὶ καθαρῶς ἐπιστημονικῶν θεμάτων. Ὁ συγγραφεὺς ὅμως, ἐπιθυμῶν νὰ δώσῃ διέξοδον εἰς προσωπικά του αἰσθήματα ἐναντίον τοῦ Leibniz, δι' ὑποτιθεμένην ἀδικίαν, διαπραχθεῖσαν εἰς βάρος του ἐκ μέρους τοῦ φιλοσόφου*, καὶ χωρὶς ἀμφιβολίαν διὰ νὰ καταστῇ εὐνοούμενος εἰς τὸ περιβάλλον του, ἔκαμε (αὐθορμήτως ἢ κατ' ἐπίδρασιν ὑψηλῆς ἐμπνεύσεως;) μίαν προκαταβολικὴν διαμαρτυρίαν ἐναντίον οἱουδήποτε, ὅστις θὰ εἶχε τὴν πρόθεσιν νὰ τὸν συγκαταριθμήσῃ μεταξὺ τῶν μαθητῶν τοῦ Leibniz, προσθέτων ὅτι ὁ Newton ὑπῆρξεν ὁ π ρ ῶ τ ο ς ἐ φ ε υ ρ έ τ η ς τῶν νέων λογισμῶν καὶ ὅτι δὲν δύναται ὁ Leibniz νὰ διεκδικήσῃ παρὰ μόνον τὸν τίτλον τοῦ δ ε υ τ έ ρ ο υ**. Ἐβεβαίωνε δὲ περαιτέρω, ὅτι ἐθεώρει ἑαυτὸν ὑποχρεωμένον νὰ κάμῃ αὐτὴν τὴν δήλωσιν, ἵνα μὴ οἱ στομφώδεις ἐγκωμιασμοὶ τῶν ὀπαδῶν τοῦ Leibniz καὶ ἡ μετριόφρων σιγὴ τοῦ Newton ὁδηγήσουν τὸ μαθηματικὸν κοινὸν εἰς ἐντελῶς πεπλανημένας ἐκτιμήσεις***. Λόγοι ἀσφαλῶς πικροὶ καὶ σκληροί, οὐχὶ ὅμως βλαπτικοὶ τῆς ὑπολήψεως τοῦ Leibniz, ἀφοῦ δὲν περιεῖχον καμμίαν νύξιν ἀναρμόστου ἰδιοποιήσεως. Ὁ Leibniz ἀπήντησεν (Α.Ε. Μαΐου 1700) ἀναφέρων ὡς ἀδιαφιλονίκητον ἀπόδειξιν τῶν δικαιωμάτων του τὸ περιεχόμενον τοῦ προαναφερθέντος σχολίου εἰς τὰ Principia. Ὁ Faccio ἐπεχείρησε ν' ἀνταπαντήσῃ ἐπιβεβαιώνων τὴν ἰδικήν του ἄποψιν, ἀλλὰ μᾶς εἶναι ἄγνωστος ἡ ἐπιχειρηματολογία του, διότι τὸ χειρόγραφόν του (καίτοι ἐπιδοκιμασθὲν ὑπὸ τοῦ Ἰακώβου Bernoulli) ἀπερρίφθη ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τῶν Α.Ε., ἡ ὁποία, πιθανῶς ἔπειτα ἀπὸ εἰσήγησιν τοῦ Leibniz, ἐδήλωσεν ὅτι κατ' ἀπαράβατον ἀρχὴν δὲν ἐνθαρρύνει πολεμικὰς παντὸς εἴδους. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ διένεξις προσωρινῶς κατεπνίγη· ἡ δᾲς ὅμως διετηρεῖτο καίουσα ὑπὸ τὸν μόδιον!

482. Ὅπως εἴδομεν, ὁ Newton δημοσιεύων τὸ 1704 τὴν Ὀ π τ ι κ ὴ ν του, προσέθεσεν ἐν παραρτήματι τὰς ἐργασίας του Tractatus de quadra-

* Περὶ τίνος ἀκριβῶς πρόκειται μᾶς εἶναι ἄγνωστον· ἴσως ἐπρόκειτο διὰ μίαν φανταστικὴν ὕβριν, διότι εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν Leibniz — Huygens ἀπαντῶνται εὐνοϊκαὶ κρίσεις διὰ τὸν Faccio. Ἡ στάσις τοῦ τελευταίου ἠμπορεῖ ἐπίσης νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἐκδήλωσις εὐγνωμοσύνης, τὴν ὁποίαν ᾐσθάνετο ἀπέναντι τοῦ Newton, διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ εὐνοϊκὴν κρίσιν ἐργασίας τοῦ Faccio ἀφορώσης ἐξήγησιν τῆς αἰτίας τῆς βαρύτητος, ἐργασίαν τὴν ὁποίαν ὁ F. Bopp ἀνεκάλυψε καὶ ἐδημοσίευσε τελευταίως (βλ. Schriften der Strassburger Wissen, Gesell. X Heft, 1929).

** Εἶναι μία γνώμη, τὴν ὁποίαν εἶχε διατυπώσει ὁ Faccio ἀπὸ τῆς 28ης Δεκεμβρίου 1691 γράφων πρὸς τὸν Huygens.

*** Ἐκ τινων φράσεων ποὺ ἀναφέρει ὁ Dutens εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ γενομένην ἔκδοσιν τῶν Ἀ π ά ν τ ω ν τοῦ Leibniz (Τόμος III, σελ. 488), προκύπτει ὅτι ὁ Newton ἐβεβαίωσεν ὅτι ὁ Faccio «ἦτο εἰς θέσιν νὰ ἐκφέρῃ ἀληθῆ κρίσιν» ἐν προκειμένῳ.

tura curvarum καὶ Enumeratio linearum tertii ordinis. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κείμενον τοῦτο δὲν ἔχει τὴν παραμικρὰν σχέσιν μὲ τὴν θεωρίαν τοῦ φωτός, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ δημοσίευσις ἀπεφασίσθη μόνον πρὸς διασφάλισιν τῶν δικαιωμάτων πνευματικῆς ἰδιοκτησίας τοῦ συγγραφέως. Τοῦτο ἄλλωστε εὑρίσκει ἐπιβεβαίωσιν καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι εἰς τὸ Προοίμιον τοῦ ὅλου βιβλίου ἀναφέρεται ὅτι πρόκειται περὶ ἐργασιῶν ἀναγομένων εἰς τὰ ἔτη 1665 - 1666. Τοῦ ἐν λόγῳ παραρτήματος τὰ Α.Ε. τοῦ Ἰανουαρίου 1705 ἐδημοσίευσαν μίαν ἀνώνυμον κριτικήν, ἡ ὁποία ὅμως εἶναι γνωστόν, ὅτι ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Leibniz. Δὲν θὰ θεωρηθῇ ἐκτὸς τοῦ προγράμματός μας, ἐὰν ἀναφέρωμεν ἐδῶ τὰ ἐμφαντικώτερα χωρία τοῦ ἱστορικοῦ τούτου κειμένου.

«Ὁ εὐφυέστατος συγγραφεὺς προτοῦ φθάσῃ εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων (ἢ διὰ νὰ ὁμιλήσωμεν ἀκριβέστερα τῶν καμπυλογράμμων σχημάτων) παραθέτει βραχεῖαν εἰσαγωγήν. Διὰ νὰ τὴν κατανοήσῃ κανεὶς καλῶς πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι, ὅταν ἕνα τυχὸν μέγεθος αὐξάνῃ συνεχῶς, ὅπως π.χ. μία εὐθεῖα αὔξουσα διὰ κινήσεως ἑνὸς σημείου της, ποὺ τὴν διαγράφει, αἱ στιγμιαῖαι αὐξήσεις καλοῦνται διαφοραί, τουτέστι μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως τοῦ μεγέθους καὶ τῆς νέας ποὺ προῆλθεν ἐκ τῆς στιγμιαίας μεταβολῆς· ἐντεῦθεν προῆλθεν ὁ ὅρος διαφορικὸς λογισμός, καὶ ὁ ἀντίστροφός του ἀθροιστικὸς λογισμός, τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἐξετέθησαν εἰς τὰ Α.Ε. ὑπὸ τοῦ G. W. Leibniz καὶ ἐδόθησαν τούτων ποικίλαι ἐφαρμογαὶ τόσον ὑπὸ τοῦ ἰδίου, ὅσον καὶ ὑπὸ τῶν ἀδελφῶν Bernoulli καὶ τοῦ μαρκησίου de l' Hôpital (τοῦ ὁποίου ὁ πρόσφατος πρόωρος θάνατος πρέπει νὰ λυπήσῃ βαθύτατα ὅλους ἐκείνους ποὺ ἀγαποῦν τὴν ἀληθῆ ἐπιστήμην). Ἀντὶ τῶν διαφορῶν τοῦ Leibniz, ὁ Newton χρησιμοποιεῖ καὶ ἐχρησιμοποίησε πάντοτε τὰς ῥοὰς «quae sint quam proxime ut fluentium augmenta aequalibus temporis particularis quam minimis genita»[40]. Εἰς τὸ βιβλίον του Principia ὅπως καὶ εἰς ἄλλας μεταγενεστέρας ἐργασίας ἔκαμε μίαν κομψὴν χρῆσιν αὐτῶν, ὅπως ὁ Onorato Fabri εἰς τὸ ἔργον του Synopsis geometrica ἐπέτυχε μίαν πρόοδον εἰς τὴν ἐπιστήμην ἀντικαθιστῶν μὲ τὴν κίνησιν τὴν μέθοδον τοῦ Cavalieri».

Μεταξὺ τῶν ἄλλων γίνεται ἐκεῖ μία σύγκρισις, οὕτως εἰπεῖν, τῆς ἀγγλικῆς μεθόδου καὶ τῆς γερμανικῆς, καὶ ἐπὶ πλέον λέγεται ὅτι ὁ Newton εἰς τὰ Principia ἔκαμε χρῆσιν τῶν «ῥοῶν» ἀντὶ τῶν «διαφορικῶν», διὰ νὰ ἐξαχθῇ μὲ λεπτότητα τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἐκεῖνος παρέλαβεν ἐκ τῶν κειμένων τοῦ Leibniz τὴν βασικὴν ἰδέαν τῆς χρησιμοποιηθείσης μεθόδου. Ἀκριβῶς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἀντελήφθη ὁ Newton τὰς φράσεις ἐκείνας τῆς κριτικῆς καὶ ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἐθεώρησε τὸν ἑαυτόν του βαρύτατα θιγόμενον. Μία ἀπάντησις λοιπόν, ὑφ' οἱανδήποτε μορφήν, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ παραλειφθῇ. Παρὰ ταῦτα αὐτη ἐχρειάσθη τρία ἔτη ἀναμονῆς

καὶ ἐνεφανίσθη τέλος εἰς τὰ P.T. τοῦ 1708 ὑπὸ τὴν μορφὴν ἐπιστολῆς τοῦ Keill (τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη ὡς δημιούργημα τοῦ Newton, § 460) πρὸς τὸν Halley (ὁ ὁποῖος ἦτο ὁ φανατικώτερος θαυμαστὴς τοῦ Newton). Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιστολὴ ἔχει τὴν ὄψιν ἐπιστημονικῆς ἀνακοινώσεως ἐπὶ τοῦ νόμου τῶν κεντρικῶν δυνάμεων. Εἰς ἕνα ὅμως χωρίον αὐτῆς διατυποῦται ἡ γνώμη ὅτι ὁ Newton εἶναι χωρὶς καμμίαν ἀμφιβολίαν ὁ πρῶτος ἐφευρέτης τοῦ λογισμοῦ τῶν ροῶν, τοῦ Leibniz περιορισθέντος εἰς τὴν χρῆσιν διαφόρου συμβολικοῦ συστήματος.

Ἦτο ἄραγε αὐτὸ ἰσοδύναμον πρὸς μίαν ἀντίκρουσιν τῆς ὑποτιθεμένης κατηγορίας διὰ λογοκλοπίαν; Γεγονὸς εἶναι ὅτι ὡς τοιαύτη ἐξελήφθη ὑπὸ τοῦ Leibniz, ὁ ὁποῖος θεωρῶν, οὐχὶ ἀδίκως, τὸν Keill ὡς ἁπλοῦν ἐκτελεστὴν ἄλλοθεν ἐκπορευομένης θελήσεως, ἀπηυθύνθη κατὰ Μάρτιον τοῦ 1711 (ἃς σημειώσῃ ὁ ἀναγνώστης μὲ ποίαν βραδύτητα ἐπροχώρουν τότε τὰ πράγματα), ὡς F.R.S., πρὸς τὸν Hans Sloane*, τότε γραμματέα τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας, μὲ ἔντονον διαμαρτυρίαν ἐναντίον ἐκείνης τῆς δηλώσεως συνοδευομένην μὲ τὴν ἀξίωσιν, ὅπως ἐπιβληθῇ εἰς τὸν Keill ἡ ὑποχρέωσις νὰ διατυπώσῃ ἀπεριφράστως τὴν σκέψιν του ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πρῶτον στάδιον ἀναπτύξεως τῶν νέων ἀλγορίθμων. Εἰς ἐνίσχυσιν δὲ τῆς ἀπαιτήσεώς του αὐτῆς ἐπεκαλεῖτο ὁ Leibniz τὴν μαρτυρίαν αὐτοῦ τούτου τοῦ Newton (εἰς σχόλιον περιεχόμενον εἰς τὰ Principia).

483. Ἡ ἐπιστολὴ τοῦ μεγάλου ἐπιστήμονος, ἀναγνωσθεῖσα εἰς συνεδρίασιν τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἐπομένου Ἀπριλίου, ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς μίαν μακρὰν καὶ ζωηροτάτην συζήτησιν, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ὁ ἴδιος ὁ πρόεδρος, ἐξερχόμενος τῆς ἐπιφυλακτικότητος ποὺ τοῦ ἦτο τόσον συμπαθής, ἔλαβε τὸν λόγον διὰ νὰ ἐξιστορήσῃ τὰ ἀφορῶντα τὴν γένεσιν τῶν ἀνακαλύψεών του. Ἡ συζήτησις τελικῶς ἔκλεισε μὲ ἐντολὴν πρὸς τὸν Keill νὰ συνοψίσῃ τὰ ὅσα κατὰ τὴν συνεδρίασιν ἀνέπτυξεν ὁ Newton εἰς μίαν ἐπιστολὴν σταλησομένην πρὸς τὸν Leibniz, κατόπιν ἐγκρίσεως αὐτῆς ὑπὸ τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας.

Ὁ Keill ἐξεπλήρωσε μετὰ σπουδῆς τὴν ἀνατεθεῖσαν εἰς αὐτὸν ἐντολὴν εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἐργασία του ἠδυνήθη ν' ἀναγνωσθῇ καὶ νὰ ἐγκριθῇ εἰς μίαν συνεδρίασιν τῆς Ἑταιρείας γενομένην πρὸ τῆς ἐκπνοῆς τοῦ Μαΐου 1711. Μὲ τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία ἤρχισε νὰ λαμβάνῃ ἐπι-

---

* Ὁ ἐξαίρετος αὐτὸς ἀνήρ, διάσημος ὡς ἰατρός, ὡς βοτανικὸς καὶ ὡς ταξιδιώτης, ἐγεννήθη τὴν 16ην Ἀπριλίου 1660. Ἀπὸ τῆς 21ης Ἰανουαρίου 1685 ἦτο F.R.S., κατὰ τὴν περίοδον 1693 - 1712 ἦτο γραμματεύς, καὶ κατὰ τὴν περίοδον 1727 - 1741 πρόεδρος τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας. Ἀπέθανε τὴν 11ην Ἰανουαρίου 1753.

σήμως μέρος εἰς τὴν ἔριδα καί, διὰ στόματος τοῦ Keill, ἐδήλωσεν ὅτι ὁ Newton πράγματι ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος ἐφευρέτης τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ὡς διατυπώσας τὰς ἀρχὰς αὐτοῦ εἰς ἐπιστολήν του γραφεῖσαν ἀκριβῶς διὰ ν' ἀνακοινωθῇ εἰς τὸν Leibniz, διὰ μέσου φράσεων καταληπτῶν μόνον ὑπὸ προσώπου τῆς ἰδικῆς του εὐφυΐας (ἂς σημειωθῇ ὅτι γίνεται ὑπαινιγμὸς τοῦ γνωστοῦ μας ἀναγράμματος, § 479). Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ κατηγορία περὶ λογοκλοπίας ἐξησθένει, ἀλλὰ δὲν ἀπεσύρθη ἐντελῶς.

Ὅπως ἦτο ἑπόμενον, ὁ Leibniz δὲν ἱκανοποιήθη ἀπὸ τὸ μέτριον αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Ὡς φιλόσοφος τῆς αἰσιοδοξίας, ἐγνώριζεν εἰς τὴν πρᾶξιν νὰ διαβλέπῃ πότε τὰ πράγματα δὲν προχωροῦν κατὰ τὸν καλύτερον ἀπὸ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ λήγοντος τοῦ 1711 (29 Δεκεμβρίου) ἔγραψε καὶ πάλιν εἰς τὸν Sloane, διὰ νὰ ὑπογραμμίσῃ προπάντων ὅτι, κατ' αὐτόν, ὁ Keill εἰς τὴν ἐπιστολήν του τὸν προσέβαλεν ἀκόμη ζωηρότερον ἀπὸ ὅσον ἔκαμεν εἰς τὸ προγενέστερον δημοσίευμά του, διὰ νὰ βεβαιώσῃ δεύτερον, ὅτι μόνος του ἔφθασεν εἰς τὴν ἐπινόησιν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ τέλος διὰ ν' ἀξιώσῃ ἀπὸ τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν ν' ἀποδοκιμάσῃ διὰ ψηφίσματός της τὴν συμπεριφορὰν ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐτόλμησε νὰ θίξῃ τὴν ἐντιμότητα ἑνὸς ἐκ τῶν μελῶν της.

Ἡ ἐπιστολὴ τοῦ Leibniz, ἀνακοινωθεῖσα εἰς συνεδρίασιν τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας περὶ τὰς ἀρχὰς Μαρτίου τοῦ 1712, προεκάλεσε παροξυσμὸν εἰς τὰ ἤδη ἐρεθισμένα πνεύματα. Τὸ σοβαρὸν σωματεῖον, τιθέμενον εὐθέως ὑπὸ κατηγορίαν, ἐκ φόβου μήπως, «ab irato» διασκεπτόμενον, καταλήξῃ εἰς ἀπόφασιν, διὰ τὴν ὁποίαν ἐνδεχομένως νὰ μετανοήσῃ εἰς τὸ μέλλον, προσεκολλήθη εἰς τὸ σύνηθες σύστημα τῆς παρατάσεως, ποὺ ἐφαρμόζεται εἰς ὅλας τὰς λεπτὰς περιστάσεις ἀπὸ ὅλα τὰ συνέδρια ποὺ σέβονται ἑαυτά. Ἀνέθεσε λοιπὸν εἰς μίαν ἐπιτροπὴν νὰ ἐξετάσῃ λεπτομερῶς τὰς ἐπιστολὰς καὶ τὰ λοιπὰ δοκουμέντα, τὰ σχετικὰ μὲ τὸ ζήτημα τῆς προτεραιότητος, ποὺ ἀνεκίνησεν ὁ Leibniz καὶ νὰ ἀναφέρῃ περὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐρεύνης.

Εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ἐπρόκειτο περὶ ἐπιτροπῆς συσταθείσης ἐξ ἀμερολήπτων διαιτητῶν (διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἔπρεπε νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὸν Leibniz τὸ δικαίωμα νὰ συμμετέχῃ κατά τινα τρόπον εἰς τὴν σύνθεσιν αὐτῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὰς ἀποφάσεις της), ἀλλὰ περὶ ὁμάδος προσώπων ἐξουσιοδοτημένων ν' ἀποδείξουν τὰ δικαιώματα ἑνὸς ἐκ τῶν διαμαχομένων. Ἀρχικῶς ἡ ἐπιτροπὴ ἦτο ἑξαμελής, κατόπιν ὅμως ἐκρίθη σκόπιμον νὰ διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μελῶν. Ἐκτὸς τῶν εἰς ἡμᾶς γνωστῶν μαθηματικῶν (Halley, Jones, Burnet, Machin, de Moivre, Brook Taylor) ἐκλήθησαν νὰ συμμετάσχουν μερικὰ πρόσωπα ἄσχετα πρὸς τὴν ἐπιστήμην, μεταξὺ τῶν ἄλλων καὶ ὁ πρέσβυς τοῦ βασιλέως τῆς Πρωσσίας παρὰ τῇ Αὐλῇ τῆς Ἀγγλίας. Ὁ Newton δὲν περιελαμβάνετο εἰς τὰ μέλη τῆς Ἐπιτροπῆς, ἀλλὰ μετεῖχε σταθερῶς εἰς τὰς ἐργασίας της, τόσον διὰ τὴν προσκόμισιν

τῶν ὑπ' αὐτοῦ κατεχομένων δοκουμέντων, ὅσον καὶ διὰ τὴν καθοδήγησιν τῶν μελῶν, διευθύνων τὰς ἐργασίας μὲ τὴν δεξιότητα, ποὺ εἶναι εὔλογον ν' ἀναμένῃ κανεὶς ἀπὸ μίαν διάνοιαν, ὅπως ἡ ἰδική του.

Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιτροπὴ ἐτέθη δραστηρίως ἐπὶ τὸ ἔργον καὶ τὸ διεξήγαγε μὲ τοιοῦτον ζῆλον, ὥστε πρὸ τοῦ τέλους Μαΐου τοῦ 1712, ἦτο εἰς θέσιν νὰ κάμῃ εἰς τοὺς ἐντολεῖς της ἀπολογισμὸν τῶν συμπερασμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα κατέληξεν. Συμφώνως πρὸς αὐτά, ὁ Keill, ἀποκαλῶν τὸν Newton πρῶτον ἐφευρέτην τῶν νέων ἀλγορίθμων, δὲν διέπραξεν ἀδικίαν ἔναντι τοῦ Leibniz· διὸ ἡ ἐνέργειά του ἦτο ἀξία γενικῆς καὶ πλήρους ἐπιδοκιμασίας.

Ἡ αὐτὴ ἐπιτροπή, ἔχουσα τὴν ἀξιέπαινον πρόθεσιν νὰ φέρῃ τοὺς διαμαχομένους εἰς θέσιν ν' ἀναμετρήσουν τὴν ἀξίαν τοῦ «σκεπτικοῦ» τῆς ἀνωτέρω ἀποφάσεως, ἐπρότεινε τὴν δημοσίευσιν ἑνὸς τόμου, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ περιελαμβάνοντο πιστὰ ἀντίγραφα τῶν ἐπιστολῶν ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι παρέχουν μαρτυρίας περὶ τῶν ἀνακαλύψεων τοῦ Newton. Ἡ σώφρων αὐτὴ εἰσήγησις ἐγένετο δεκτὴ ἄνευ ἀντιρρήσεων, ἐπεφορτίσθησαν δὲ οἱ Halley, Jones καὶ Machin νὰ ἐπιμεληθοῦν τῆς συνθέσεως καὶ ἐκτυπώσεως τοῦ ἐν λόγῳ τόμου. Τοιουτοτρόπως ἔλαβεν ὑπόστασιν τὸ διάσημον ἔργον, ποὺ φέρεται συνήθως ὑπὸ τὸν συντετμημένον τίτλον Commercium epistolicum (Ἐπιστολικὴ ἐπικοινωνία) καὶ τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον τυπωθὲν ἀντίτυπον ὑπεβλήθη εἰς τὴν Βασιλικὴν Ἑταιρείαν τοῦ Λονδίνου κατὰ τὴν ἐναρκτήριον συνεδρίασιν αὐτῆς τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1713. Ἐκτυπωθὲν εἰς μικρὸν ἀριθμὸν ἀντιτύπων, διενεμήθη κατ' ἐντολὴν τοῦ Newton, ὑπὸ τὴν ἰδιότητά του ὡς προέδρου τοῦ μεγάλου ἐκείνου σωματείου, εἰς τοὺς ἐπιτρόπους καὶ εἰς τὰ πρόσωπα τὰ κατά τινα τρόπον ἐπιδείξαντα ἐνδιαφέρον ἐπὶ τῆς ἔριδος. Ὁ Newton ὁ ἴδιος ἔγραψε μίαν βραχεῖαν κριτικὴν τῆς ἐκδόσεως, κριτικὴν ἡ ὁποία ἐδημοσιεύθη ἀμέσως ἀνωνύμως εἰς τὰ Philosophical Transactions.

485. Ὁ Leibniz, ὁ ὁποῖος εὑρίσκετο τότε εἰς Βιέννην, ἔλαβε μίαν πρώτην πληροφορίαν ἀπὸ τὸν γνωστότατον φιλόσοφον Χριστιανὸν Wolf καὶ κατόπιν τὸ δι' αὐτὸν προοριζόμενον ἀντίτυπον μέσῳ τοῦ διπλωμάτου, ὁ ὁποῖος ἐξεπροσώπει τότε εἰς Λονδῖνον τὸν ἐκλέκτορα τοῦ Ἀννοβέρου. Προτοῦ ἀποφασίσῃ περὶ τοῦ πρακτέου, ἠθέλησε νὰ γνωρίσῃ τὴν ἐπ' αὐτοῦ γνώμην τοῦ ἐκλεκτοῦ φίλου του Ἰωάννου Bernoulli. Ὁ τελευταῖος δὲν ἐδίστασε νὰ τοῦ τὴν καταστήσῃ γνωστήν, ἀπαιτῶν ὅμως νὰ τηρηθῇ ἄκρα ἐχεμύθεια, ἵνα μὴ διαταραχθοῦν αἱ ἐγκάρδιοι σχέσεις του μὲ τὸν Newton καὶ τοὺς ἄλλους μαθηματικοὺς τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας.

Ὁ Leibniz ὅμως, ἐπειδὴ ἡ κρίσις τοῦ Bernoulli ἦτο ἀνεπιφυλάκτως εὐνοϊκὴ δι' αὐτόν, δὲν ἠδυνήθη ν' ἀντιστῇ εἰς τὸν πειρασμὸν τῆς ἀνακοινώσεώς της καὶ μόλις ἐπέστρεψεν εἰς τὸ Ἀννόβερον ἔδωσε πρὸς ἐκτύπωσιν (29 Ἰουλίου 1713) τὴν ἐπιστολὴν ποὺ τοῦ ἔγραψεν ὁ τότε καθηγητὴς τῆς

Βασιλείας. Διὰ νὰ καθησυχάσῃ, ἐν τούτοις, τὴν συνείδησίν του, ἡ ὁποία τὸν ἠνώχλει διὰ τὴν ἀδιακρισίαν αὐτήν, τὴν ἐδημοσίευσεν ὡς προερχομένην ἀπὸ «ἐξέχοντα μαθηματικόν», προσέθεσε δὲ μετ' αὐτὴν τὰς ἰδικάς του σκέψεις. Οἱ δύο πρωταγωνισταὶ τῆς διενέξεως ἐδηλοῦντο μὲ τὰ συνθηματικά, ἀλλὰ διαφανέστατα σύμβολα N...n καὶ L...z. Τὸ δημοσίευμα ἔγινεν εἰς λατινικὴν γλῶσσαν ὡς «charta volans». Ἔσπευσεν ὅμως ὁ Leibniz νὰ τὸ μεταφράσῃ εἰς τὴν γαλλικὴν διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὴν ἀναδημοσίευσιν αὐτοῦ εἰς τὴν Journal littéraire, ἐν εἴδει ἀπαντήσεως εἰς μίαν κριτικὴν ποὺ ἐδημοσίευσεν ἐκεῖ ὁ Keill ἀναφορικῶς μὲ τὸ ἐκδοθὲν ἐν Ἀγγλίᾳ Commercium epistolicum.

Οἱ πάντες ἀντελήφθησαν ποῖος ἦτο ἐκεῖνος «ὁ ἐξέχων μαθηματικός» φίλος τοῦ Leibniz, ὁ δὲ Newton βαθύτατα ἐπληγώθη ἀπὸ τὰς δηλώσεις αὐτοῦ, διότι τοῦ ἐφάνη ὅτι διέκρινεν εἰς αὐτὰς μίαν κατηγορίαν διὰ κακὴν πίστιν καὶ ἐπιστημονικὴν ἀνεντιμότητα. Προτιθέμενος ν' ἀποδείξῃ τὸ ἀβάσιμον αὐτῆς ὁ Newton — ὁ ὁποῖος κατὰ τὴν διάρκειαν ὅλης αὐτῆς τῆς διαμάχης ἐπροτίμα τὸν ρόλον τοῦ εἰσηγητοῦ ἀπὸ τὸν ρόλον πρωταγωνιστοῦ — παρέδωσεν εἰς τὸν ἔμπιστον Keill τὰ στοιχεῖα διὰ μίαν ἐξαντλητικὴν ἀνασκευὴν τοῦ κειμένου τῶν δύο φίλων, ἡ ὁποία καὶ ἔκαμε τὴν ἐμφανισίν της τὸ αὐτὸ ἔτος 1714 εἰς τὴν ἰδίαν Journal littéraire. Περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἰς τὴν ἀνασκευὴν αὐτὴν βεβαιοῦται ὅτι ὁ «ἐξέχων μαθηματικός» πρὸς τὸν ὁποῖον ἐστράφη ὁ Leibniz, ἄλλος δὲν ἦτο παρὰ ὁ δεύτερος Bernoulli. Ὁ τελευταῖος τρομοκρατηθεὶς ἀπὸ τὴν θύελλαν, τῆς ὁποίας τοὺς κρότους ἤκουεν ἤδη νὰ συγκλονίζουν τὴν ἄθῳαν κεφαλήν του, ἔσπευσε μὲ ἀγωνίαν νὰ γράψῃ πρὸς ὅλους τοὺς γνωστούς του (φθάνων καὶ μέχρι τοῦ ὅρκου), ὅτι ἡ ἀπόδοσις εἰς αὐτὸν τοῦ κειμένου ἐκείνου ἦτο τελείως φανταστικὴ καὶ ψευδής, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ δυνηθῇ νὰ πείσῃ οὔτε ἕνα φίλον του, διότι ἡ ἀλήθεια εἶχε πλέον κατέλθει καὶ περιεπάτει εἰς τὴν λεωφόρον.

486. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι ἡ διένεξις ἐλάμβανε, ἡμέραν μὲ τὴν ἡμέραν, διαστάσεις μεγαλυτέρας, μὲ ἐκδηλώσεις ὀξύτητος, βαιαιότητος καὶ πείσματος, ἐνῷ συγχρόνως παρέσυρεν εἰς τὴν δίνην της ὁλοὲν μεγαλύτερον ἀριθμὸν προσώπων. Φυσικὸν ἦτο λοιπὸν νὰ ἐγερθῇ εἰς τὸν νοῦν μερικῶν ἡ ἰδέα νὰ μεσολαβήσουν πρὸς διευθέτησιν τῆς διχονοίας. Ἀπὸ τοῦ 1714 ἐνεφανίσθη πράγματι ἕνας ἄγγλος εὐπατρίδης, ὀνόματι Chamberlayne, ὁ ὁποῖος ἐμφορούμενος ἀπὸ μίαν τοιαύτην ἀγαθὴν πρόθεσιν ἐστράφη ἀρχικῶς κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸν Leibniz. Δὲν ἐχρειάσθη ὅμως πολὺν χρόνον διὰ ν' ἀναγνωρίσῃ, ὅτι ἐπρόκειτο περὶ προσπαθείας ὑπερβαινούσης πολὺ τὰς ἰδικάς του δυνάμεις. Τὸ ἔργον τοῦ εἰρηνοποιοῦ ἀνέλαβε τότε ὁ ἀββᾶς Conti· κατόπιν ἰδικῆς του πρωτοβουλίας, τὸ προεδρεῖον τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου ἐκάλεσε τοὺς πρεσβευτὰς τῶν ξένων δυνά-

μεων, ποὺ ἦσαν διαπεπιστευμένοι παρὰ τῇ Αὐλῇ τοῦ Ἁγίου Ἰακώβου, εἰς μίαν ἀπὸ κοινοῦ ἐξέτασιν τοῦ συνόλου τῶν ὑπαρχόντων στοιχείων, σχετικῶς μὲ τὴν «θλιβερὰν ὑπόθεσιν» (vexata quaestio).

Ποῖοι ἐξ αὐτῶν ἀπεδέχθησαν τὴν πρόσκλησιν μᾶς εἶναι ἄγνωστον, ὅπως ἄλλωστε εὑρισκόμεθα εἰς τὸ σκότος καὶ ὡς πρὸς τὰς λεπτομερείας τοῦ συνεδρίου, τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ λάβῃ ἱστορικὴν σημασίαν. Τὸ μόνον ποὺ γνωρίζομεν εἶναι ὅτι ὁ βαρῶνος τοῦ Kilmannsegg, ἐκπροσωπῶν τὸ Ἀννόβερον, ἐπρότεινεν ὅπως, διὰ νὰ τεθῇ τέρμα εἰς τὴν μακρὰν καὶ ἀκανθώδη φιλονικίαν, ἐκθέσῃ γραπτῶς ὁ ἴδιος ὁ Newton πρὸς τὸν ἀνταγωνιστήν του τοὺς λόγους του. Ἡ ἰδέα αὐτὴ ἐγένετο δεκτὴ ἀπὸ τοὺς συνέδρους καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Newton, ὁ ὁποῖος διὰ νὰ μὴ ἀπομακρυνθῇ τῆς ἀρχῆς του, ἐπροτίμησε ν' ἀπευθύνῃ τὴν ἐπιστολὴν πρὸς τὸν Conti μὲ τὸν σκοπὸν νὰ τὴν κοινοποιήσῃ ἐκεῖνος πρὸς τὸν Leibniz. Ἡ ἐπιστολὴ ἐγράφη ὑπὸ χρονολογίαν 26 Φεβρουαρίου 1715-16. Ταχέως ὅμως κατεδείχθη ὅτι ἡ θεωρηθεῖσα ὡς ἀλάνθαστος συνταγὴ δὲν ἔφερε κανένα ἀποτέλεσμα ἐναντίον μιᾶς ἀσθενείας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶχον πλέον προσβληθῆ ὅλοι οἱ μετέχοντες εἰς τὸν θίασον ἐπὶ τῆς σκηνῆς.

Ὁ Leibniz πράγματι ἀπέστειλεν εἰς τὸν Conti μίαν ἀπάντησιν κάθε ἄλλο παρὰ φιλικήν, μάλιστα δὲ πολὺ ὑπεροπτικήν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς αὐτὴν ἄξιον σημειώσεως, ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος, εἶναι ὅτι ὁ Leibniz «διὰ νὰ ψηλαφήσῃ τὸν σφυγμὸν τῶν ἄγγλων μαθηματικῶν» (μὲ ἄλλους λόγους τοῦ Newton!) ἐπρότεινεν εἰς αὐτοὺς νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν, μὲ τὸ ὁποῖον, ἐκτὸς τοῦ ἰδίου, εἶχον ἤδη ἀσχοληθῆ καὶ οἱ δύο Bernoulli. Διηγοῦνται (καὶ τὸ ἀνέκδοτον ἔλαβεν εὐρεῖαν διάδοσιν, ὥστε νὰ τὸ περιλάβῃ καὶ ὁ Fontenelle εἰς τὸ Ἐγκώμιον ποὺ ἔγραψε διὰ τὸν Leibniz), ὅτι ὁ Newton ἐδιάβασε τὴν ἐκφώνησιν ἐπιστρέφων εἰς τὴν οἰκίαν του κατὰ τὰς 4 τὸ ἀπόγευμα, ἔπειτα ἀπὸ μίαν ἡμέραν ἐντόνου ὑπηρεσιακῆς ἀπασχολήσεως. Προτοῦ κατακλιθῇ εἶχε λύσει τὸ πρόβλημα, καθ' ὃν τρόπον ἐκτίθεται εἰς ἕνα ἀνώνυμον ἄρθρον, δημοσιευθὲν ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τὰ P.T. τοῦ 1716 (ὅπου ματαίως θ' ἀνεζήτει κανεὶς τὸ ὄνομα τοῦ Leibniz).

487. Εἰς τὴν ἐπιστολὴν τοῦ Newton, ἔκρινεν ὁ Leibniz σκόπιμον ν' ἀπαντήσῃ ἐπίσης δημοσίᾳ μὲ ἄλλην ἐπιστολὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τοὺς γάλλους μαθηματικούς, τοὺς μόνους ἐκ τῶν ὁποίων ἤλπιζε ν' ἀκούσῃ μίαν κρίσιν ἀμερόληπτον καὶ ψύχραιμον. Συγχρόνως ἔστρεψε τὴν σκέψιν του πρὸς ἕνα νέον Commercium Epistolicum εἰς ἀντιπαράστασιν ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν ἡ Βασιλικὴ Ἑταιρεία *. Φαίνεται δὲ πιθανόν, ὅτι καθ' ὃν

* Ἕνα ἀπόσπασμα δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Leibniz ὑπὸ τὸν τίτλον

χρόνον εἰς τὸν νοῦν του συνεκέντρωνε καὶ ἐταξινόμει τὴν ὕλην τοῦ ἰδικοῦ του Commercium, διέπραξε μίαν ἀπρέπειαν, ἡ ὁποία δὲν εὗρε συγχώρησιν οὔτε ὑπὸ τῶν στενωτέρων εὐνοουμένων του. Πράγματι, εἰς μίαν σελίδα περιέχουσαν ἕνα πρῶτον δεῖγμα διαφορικοῦ λογισμοῦ, μετέβαλε τὴν χρονολογίαν 1675 εἰς 1673, μὲ τὸν προφανῆ σκοπὸν νὰ βελτιώσῃ τὰ τεκμήριά του ὡς πρὸς τὴν ἀνεξαρτησίαν τῶν ἰδικῶν του ἀνακαλύψεων ἀπὸ ἐκείνων τοῦ ἀντιζήλου του. Ἡ ἀκόρεστος περιέργεια τῶν μεταγενεστέρων — ἐνίοτε φθάνουσα τὰ ὅρια ἀσυγχωρήτου ἀδιακρισίας, ἀλλ' εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἀληθῶς ἐξ ἀγαθῆς Προνοίας ἐκπορευομένη χάριν τῆς ἀληθείας καὶ τῆς δικαιοσύνης — ἀνεκάλυψε τὴν ἀποκρουστικὴν αὐτὴν ἀπόπειραν καὶ κατεδίκασεν ἀνεκκλήτως τὸν δράστην, ἔστω καὶ ἂν αὕτη δὲν εἶχε πρακτικὸν ὑπὲρ αὐτοῦ ἀποτέλεσμα. Διότι τὸ τρομερὸν ὅπλον, μὲ τὸ ὁποῖον ὁ Leibniz ἤλπιζε ν' ἀποστομώσῃ τὸν ἀμείλικτον ἀντίπαλον (δηλαδὴ τὸ σχεδιαζόμενον νέον Commercium) παρέμεινεν ἄσφαιρον, λόγῳ τοῦ μεσολαβήσαντος θανάτου τοῦ τολμηροῦ μαχητοῦ.

Δυστυχῶς ὅμως τὰ μίση τῶν ἀνθρώπων πολὺ συχνὰ δὲν σβήνουν οὔτε ἐμπρὸς εἰς τὴν ἱερότητα ἑνὸς τάφου. Ἀπόδειξις ὅτι ὁ θάνατος τοῦ Leibniz δὲν ἠρέμησε τὸν διάσημον ἀνταγωνιστήν του, τοῦ ὁποίου ἡ μῆνις ἐξηκολούθει νὰ παραμένῃ ζωηρά, ὅπως ἀποδεικνύουν αὐθεντικὰ ἱστορικὰ τεκμήρια, τὰ ὁποῖα ὁ ἱστορικός, ἔστω καὶ μὲ πικρίαν, εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ καταγράψῃ. Μόλις ἐπληροφορήθη τὸν θάνατον τοῦ φιλοσόφου - μαθηματικοῦ, ἔσπευσε (1715) νὰ δημοσιεύσῃ δύο ἐπιστολὰς ἀναφερομένας εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, συνοδεύων αὐτὰς διὰ σχολίων τόσον μᾶλλον ἀκαίρων ὅσον ἦτο πλέον ἀδύνατος ἡ ἀνασκευή των. Ἐπὶ πλέον ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Raphson τὰ βασικὰ δεδομένα διὰ τὴν ὑπὸ τοῦ τελευταίου συγγραφὴν τῆς History of fluxions (Ἱστορία τῶν ροῶν, § 460) ἡ ὁποία ὄχι μόνον ἀνάγεται τελικῶς εἰς μίαν ἀπολογίαν τοῦ Newton, ἀλλὰ συγχρόνως εἶναι τόσον μεροληπτική, ὥστε ὁ συγγραφεὺς δὲν ἐδίστασε νὰ ὑποστηρίξῃ, ὅτι ὁ Leibniz εἶχε κατορθώσει ν' ἀποκρυπτογραφήσῃ τὸ γνωστὸν νευτώνειον ἀνάγραμμα (§ 379). Τοιουτοτρόπως, διὰ ν' ἀποσπάσῃ ἕνα πολύτιμον λίθον ἀπὸ τὸ ἀπαστράπτον διάδημα, ποὺ στέφει τὴν κεφαλὴν τοῦ κορυφαίου φιλοσόφου, ἔφθασεν εἰς σημεῖον νὰ τοῦ ἀποδώσῃ μαντικὰς δυνάμεις κυριολεκτικῶς ὑπερανθρώπους.

488. Προτιθέμενος ὁ Newton νὰ δώσῃ εἰς τὸ Commercium epistolicum εὐρυτέραν διάδοσιν ἀνὰ τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον προεκάλεσε νέαν ἔκδοσιν (1722), ἐπωφελούμενος τῆς εὐκαιρίας νὰ ἐπιφέρῃ ἐπιδεξίους ἀναψηλαφήσεις, νὰ γράψῃ νέον πρόλογον καὶ νὰ προσθέσῃ τὴν κριτικὴν ἐπὶ τῆς

Historia et origo calculi differentialis προωρίζετο ἴσως νὰ χρησιμεύσῃ ὡς πρόλογος τῆς σχεδιαζομένης ἐκδόσεως.

I ἐκδόσεως, ἡ ὁποία, ὡς εἴπομεν, εἶχε δημοσιευθῆ εἰς τὰ P.T. Καὶ ὁ πρόλογος καὶ ἡ κριτικὴ φέρονται ἀνωνύμως, ἀλλ' οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ὀφείλονται εἰς ἰδικόν του κάλαμον. Τέλος ἔλαβε πρόνοιαν, ὥστε εἰς τὴν III ἔκδοσιν (1726) τῶν Principia νὰ τροποποιηθῇ ριζικῶς τὸ διάσημον σχόλιον τὸ ἀφορῶν τὸν Leibniz (§ 480) εἰς τρόπον, ὥστε ν' ἀφανισθῇ τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου, καὶ κατόπιν πολλῶν δισταγμῶν (πιστοποιουμένων ἀπὸ μερικὰς σελίδας χειρογράφους ὑφισταμένας ἀκόμη σήμερον) κατέληξεν εἰς τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν:

«Εἰς μίαν ἐπιστολήν μου πρὸς τὸν J. Collins, ἀφοῦ περιέγραψα μίαν μέθοδον διὰ τὰς ἐφαπτομένας, περὶ τῆς ὁποίας εἶχον ὑποψίας μήπως συνέπιπτε μὲ μίαν ἄλλην ὀφειλομένην εἰς τὸν Sluse, τότε ἀνέκδοτον, προσέθεσα τὴν ἀκόλουθον παρατήρησιν: 'Αποτελεῖ τοῦτο μερικὴν περίπτωσιν ἢ καλύτερα πόρισμα μιᾶς γενικῆς μεθόδου, ἐφαρμοσίμου εἰς οἱονδήποτε κοπιώδη λογισμόν, ὄχι μόνον διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἐφαπτομένων εἰς ὅλας τὰς γεωμετρικὰς ἢ μηχανικὰς καμπύλας ἢ ἐκείνας ποὺ σχετίζονται πρὸς ἄλλας, ἀλλ' ἀκόμη καὶ διὰ τὴν λύσιν ποικιλίας ἄλλων προβλημάτων, ὅπως εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς καμπυλότητος, ὁ τετραγωνισμός, ἡ εὐθειοποίησις καὶ τὰ κέντρα βάρους τῶν καμπύλων. Καὶ δὲν εἶναι ἰσχύος περιωρισμένης (ὅπως ἡ μέθοδος τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τοῦ Hudde) μόνον εἰς ἐξισώσεις μὴ περιεχούσας ἀρρήτους ἐκφράσεις. Τὴν μέθοδον αὐτὴν συνέπλεξα μὲ τὴν ἄλλην ποὺ χρησιμεύει πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων δι' ἀναγωγῆς των εἰς σειρὰς μὲ ἀπείρους ὅρους. Αὐτὸ εἶναι τὸ περιεχόμενον τοῦ σχετικοῦ χωρίου τῆς ἐπιστολῆς. Αἱ τελευταῖαι δὲ αὐταὶ λέξεις ἀναφέρονται εἰς ὑπόμνημα, τὸ ὁποῖον ἔγραψα ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου τὸ 1671. Τὸ θεμέλιον τῆς γενικῆς ταύτης μεθόδου εὑρίσκεται εἰς τὸ προηγούμενον λῆμμα».

Συγκρίνοντες τώρα τὸ νέον κείμενον πρὸς τὸ παλαιόν, βλέπομεν ὅτι ὁ Newton μὲ τὸ νὰ διατηρήσῃ ἀμεταβλήτους τὰς πρώτας καὶ τὰς τελευταίας λέξεις ὡς καὶ τὴν γενικὴν πορείαν τοῦ λόγου, ἠθέλησε νὰ συγκαλύψῃ τὴν οὐσιώδη ἀλλοίωσιν, τὴν ὁποίαν ἐπέφερεν εἰς τὸ σχόλιον ἐκεῖνο. Ἠπατήθη ὅμως στηρίξας τὰς ἐλπίδας του εἰς τὴν τυφλότητα ἢ τὴν ἀπροσεξίαν τῶν ἀναγνωστῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιθέτως, ἀναγνωρίσαντες τὸ ἐπιτήδειον ἀλλ' ἀθέμιτον τέχνασμα τοῦ συγγραφέως, δὲν ἐδίστασαν νὰ ἐκφέρουν ἐναντίον του πάνδημον μομφήν, τὴν ὁποίαν ἡ ἀδέκαστος ἱστορία ἔσπευσε νὰ ἐπικυρώσῃ.

489. 'Αλλ' οὔτε ὁ θάνατος καὶ τοῦ δευτέρου ἐκ τῶν διαμαχομένων συνέβαλεν εἰς τὸν κατευνασμὸν τῶν πνευμάτων καὶ εἰς τὴν κατάπαυσιν μιᾶς ἀντιδικίας*, ἡ ὁποία ἀπὸ μίαν συζήτησιν καθαρῶς θεωρητικήν, κατέληξε

* «Δίκης ποὺ δὲν ἐτελείωσεν ἀκόμη» ἔγραψε τὸ 1740 ὁ Buffon εἰς τὸν πρόλογον τῆς μεταφράσεως ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἐν § 459.

νὰ λάβῃ τόνους ἀληθοῦς ἀγῶνος μεταξὺ δύο λαῶν, σπανίως φίλων, ἀλλ' οἱ ὁποῖοι κατὰ τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ XVIII αἰῶνος εὑρίσκοντο εἰς κατάστασιν μονίμου διχονοίας, λόγῳ τῶν μυστικῶν μηχανορραφιῶν (πρὸς τὰς ὁποίας δὲν ἦτο ξένος καὶ ὁ Leibniz), αἱ ὁποῖαι, ἀποθανούσης τῆς βασιλίσσης Ἄννης (1714), κατέληξαν νὰ φέρουν εἰς τὸν θρόνον τῆς Ἀγγλίας τὸν Γεώργιον I τῆς Αὐλῆς τοῦ Ἀννοβέρου.

Μόνον ὅταν ἤρχισαν ὀλίγον κατ' ὀλίγον νὰ δημοσιεύωνται σκέψεις κατ' ἐξοχὴν προσωπικαί, ἡ μεγάλη ἔρις ἤρχισε καὶ αὐτὴ νὰ χάνῃ ὀξύτητα καὶ βιαιότητα οὕτως, ὥστε τὸ ζήτημα τῆς προτεραιότητος νὰ δυνηθῇ τέλος νὰ συζητηθῇ μὲ τὴν ἁρμόζουσαν ἠρεμίαν καὶ δικαιοσύνην, ἀκόμη καὶ ἀπὸ ἱστορικοὺς ἀνήκοντας εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν δύο χωρῶν.

Μολονότι μία ἐτυμηγορία ὁριστικὴ καὶ πλήρης δὲν θὰ καταστῇ ἐφικτὴ πρὶν ἢ τεθοῦν εἰς τὴν διάθεσιν ὅλων τὰ ἐμπιστευτικώτερα χειρόγραφα ποὺ ἄφησαν οἱ δύο ἀνταγωνισταί, ἐν τούτοις εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχυρισθῇ κανεὶς ὅτι οἱ νέοι ἀλγόριθμοι δὲν ὑπῆρξαν ἀποκλειστικῶς καὶ ἐξ ὁλοκλήρου ἔργον ἰδικόν των. Εἶναι ἀληθέστατον ὅτι εἰς αὐτοὺς ἀνήκει ἡ διαρκὴς καὶ ἀδιαφιλονίκητος δόξα, ὅτι ἀνεγνώρισαν πῶς ἡ ἄπειρος ποικιλία τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων, ποὺ ἀναφύονται εἰς τὰς περιοχὰς τῆς ἀλγέβρας, τῆς γεωμετρίας, τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας, ἠμποροῦν νὰ μελετηθοῦν κατὰ τρόπον ἀσφαλῆ καὶ ὁμοιόμορφον, ὅταν ὁ ἐρευνητὴς εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐκτελῇ τὰς δύο πράξεις, δηλαδὴ τὴν διαφόρισιν καὶ τὴν ὁλοκλήρωσιν· ὅτι ἐπὶ πλέον κατέστησαν φανερὰν τὴν ἐσωτερικὴν συνάφειαν τῶν δύο πράξεων καὶ μάλιστα ἐδίδαξαν τὰς μεθόδους ἐκτελέσεως αὐτῶν, τοὐλάχιστον εἰς τὰς κοινοτέρας περιπτώσεις.

Θὰ ἦτο ὅμως ματαία κάθε προσπάθεια ν' ἀρνηθῶμεν ὅτι τόσον ὁ ἕνας ὅσον καὶ ὁ ἄλλος συνεπλήρωσαν, ἀπὸ διαφόρου σκοπιᾶς καὶ μὲ ἰδικά του κριτήρια ἕκαστος, ἕνα θαυμαστὸν οἰκοδόμημα, τοῦ ὁποίου αἱ ἀσφαλεῖς βάσεις εἶχον ἤδη τεθῇ εἴκοσι περίπου αἰῶνας προηγουμένως ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Οἰκοδόμημα ποὺ εἶχεν ἤδη λάβει αἰσθητὸν ὕψος χάρις εἰς τὰς ἀξιολόγους συμβολὰς μερικῶν μαθητῶν τοῦ Γαλιλαίου (ἐκ τῶν πρώτων: B. Cavalieri καὶ E. Torricelli), τῶν Kepler καὶ Wallis, τῶν Descartes καὶ Fermat ὡς καὶ ἄλλων ἐρευνητῶν μικροτέρας στάθμης ποὺ δὲν παρελείψαμεν νὰ μνημονεύσωμεν εἰς τὰς προηγηθείσας σελίδας.

Ὅσα προσέθεσαν οἱ δύο μεγάλοι ἀντίζηλοι, ἕκαστος διὰ λογαριασμόν του, εἶναι τόσον διαφορετικοῦ χαρακτῆρος, ὥστε — χωρὶς ν' ἀποκλείεται μιὰ πιθανὴ καὶ ἴσως μὴ συνειδητὴ ἐπίδρασις τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου — ἡ ἀπόλυτος κυριότης ἑκάστου ἐπὶ τῶν ὅσων ἔγραψαν δὲν δύναται λογικῶς νὰ τεθῇ ἐν ἀμφιβόλῳ.

Εἰς τὸν Newton εἶναι προφανὴς ἡ ἐναγώνιος προσπάθεια νὰ ἐξηγήσῃ καὶ νὰ περιγράψῃ μαθηματικῶς τὰ φυσικὰ φαινόμενα. Ὁ Leibniz δὲν

ἠδυνήθη ποτὲ ν' ἀποβάλῃ τὴν νοοτροπίαν ἐκείνην, ποὺ προσιδιάζει εἰς τοὺς προσκεκολλημένους εἰς τὴν φιλοσοφίαν καὶ τὴν λογικήν. Διὰ τὸν Newton ὁ προσδιορισμὸς τοῦ περιεχομένου τῶν σχημάτων μιᾶς, δύο ἢ τριῶν διαστάσεων εἶναι ὁ ὑπέρτατος σκοπὸς τῆς ἀνωτέρας ἀναλύσεως. Διὰ τὸν Leibniz ἡ διαφόρισις ἀποτελεῖ τὴν θεμελιώδη πρᾶξιν, πρὸς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ συγκλίνουν αἱ προσπάθειαι τοῦ ἐργάτου τῆς ἀναλύσεως. Ἡ δὲ μεθοδικὴ χρῆσις τῶν συμβόλων d καὶ ∫ εἶναι τόσον σύμφωνος μὲ τὴν τάσιν πρὸς τὸν συμβολισμὸν ποὺ χαρακτηρίζει ὁλόκληρον τὸ ἔργον τοῦ Leibniz, ὥστε, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν ὑφίσταντο περὶ αὐτοῦ ἀποδείξεις ἀδιαφιλονίκητοι, θὰ ἠδύνατο ν' ἀποδώσῃ κανεὶς εἰς αὐτὸν τὴν ἐπινόησίν των, στηριζόμενος μόνον εἰς τὴν ἰδιάζουσαν αὐτὴν νοοτροπίαν του.

490. Θὰ ἴδωμεν, ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὴν Ἱστορίαν μας, ὅτι εἰς τὰ σύμβολα αὐτὰ ὀφείλει τὴν ζωήν της ἡ σύγχρονος μαθηματικὴ ἀνάλυσις. Καὶ ἀποτελεῖ πεποίθησίν μας ὅτι, ἐὰν ὁ Newton ἠγωνίσθη μὲ τόσον πεῖσμα, διὰ τὴν ἀναγνώρισιν τῶν δικαιωμάτων πνευματικῆς ἰδιοκτησίας του ἐπὶ τῶν νέων μεθόδων, τοῦτο συνέβη διότι, εἰς τὸ βάθος τῆς καρδίας του, ἀνεμέτρησε τὴν ἀναμφισβήτητον ὑπεροχὴν τῶν δημοκρατικῶν μεθόδων τῆς ἠπειρωτικῆς εὐρώπης ἔναντι τῆς πολυπλόκου γεωμετρικο-μηχανικῆς μεθόδου, τῆς ὁποίας ἴσως μόνον αὐτὸς θὰ ἔπρεπε ν' ἀναγνωρισθῇ ἀπολύτως κάτοχος καὶ δεξιοτέχνης χειριστής.

Δυστυχῶς, τοῦ ἀγῶνος κηρυχθέντος, οἱ διαμαχόμενοι, ὅπως συχνότατα συμβαίνει, δὲν ὑπῆρξαν πάντοτε εὐθεῖς εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν ὅπλων. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ἄπταιστον συμπεριφοράν, τὴν ὁποίαν ἐπέδειξαν πρὸς ἀλλήλους προτοῦ ἐκσπάσῃ ἡ ἐχθρότης, μὲ τὰς ἀξιοθρηνήτους πράξεις, τὰς ὁποίας κατεδέχθησαν νὰ ἐπιχειρήσουν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς διαμάχης, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἐνθυμηθῶμεν τὸν ἥρωα τοῦ Machiavelli, ὁ ὁποῖος διετηρεῖτο ἐνάρετος μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ἐτέθη ἐνώπιόν του ἡ δυνατότης νὰ κατακτήσῃ ἕνα στέμμα.

Εἰς τοιαύτας προσβολὰς τοῦ ἠθικοῦ κώδικος δὲν ὑπάρχει δικαστὴς εὐσυνείδητος, ποὺ θὰ ἐξέφερεν ἀθωωτικὴν ἀπόφασιν. Ὁ ἱστορικὸς ὅμως, ἀτενίζων ἐξ ἀποστάσεως τὴν μεγαλειώδη ἄνθησιν, ἡ ὁποία ἐκάλυψε τὰς νέας ἐπαρχίας τῆς ἐπιστήμης, χάρις εἰς τὰς ἀνακαλύψεις τῶν δύο αὐτῶν μεγάλων ἀνδρῶν, δὲν ἐπιμένει εἰς θέματα ξένα πρὸς τὸν κύριον σκοπόν, ἀλλ' οἰστρηλατούμενος ἀπὸ τὴν εὔλογον ἀνυπομονησίαν τῶν ἀναγνωστῶν θ' ἀρχίσῃ τὴν ἀφήγησιν νέων ἀγώνων καὶ τὴν περιγραφὴν νέων ταραχωδῶν νικῶν, τῶν ὁποίων θέατρα ὑπῆρξαν τὰ κατακτηθέντα ἐδάφη.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΟΥ

1 (σ. 103).

«Λύσις παντὸς εὐκλειδείου προβλήματος καὶ ἄλλων, πρὸς τοῦτο ἀναγκαίως εὑρισκομένων, μὲ ἕνα καὶ μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου».

2 (σ. 103).

«Καὶ παρ' ὅλους ἐκείνους τοὺς ἐξαιρετικωτάτους μαθηματικούς, ἀρχαίους καὶ νεωτέρους, οἱ ὁποῖοι ἐθεώρουν ἀδύνατον τὴν λύσιν τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος μὲ ἄλλον τρόπον διάφορον τοῦ εἰς τὸ Βιβλίον I τοῦ Εὐκλείδου, ἀριθ. κβ', παρεχομένου, ἰδοὺ ὅτι ἐγὼ ἐπέτυχον τοῦτο σὺν Θεῷ τὴν 15ην Ὀκτωβρίου 1552».

3 (σ. 109).

«Γεωμετρικῶν κατασκευῶν κανονικὴ ἀπογραφή».

4 (σ. 116).

Ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἶχε διατυπωθῆ ἡ ἀπορία κατὰ πόσον τὸ σχῆμα ποὺ προκύπτει ἐκ τῆς ἐπαφῆς εὐθείας καὶ καμπύλης ἢ δύο καμπύλων, εἶναι γωνία καὶ ἐν καταφατικῇ περιπτώσει πῶς θὰ ὁρισθῇ τὸ μέγεθός της. Ἀπήχησιν τοῦ ζητήματος τούτου ἀποτελεῖ ἡ εὐκλείδειος πρότασις III, 16, ὅπου ὁ Στοιχειωτὴς ἀποδεικνύει ὅτι ἡ γωνία ποὺ σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου (ὀνομασθεῖσα ἀργότερα κ ε ρ α τ ο ε ι δ ή ς) εἶναι μικροτέρα οἱασδήποτε εὐθυγράμμου γωνίας. «Καίτοι τοιαῦται μικτόγραμμοι γωνίαι δὲν ἐμφανίζονται πλέον εἰς σοβαρὰ κείμενα τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἡ συζήτησις ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῆς κερατοειδοῦς γωνίας ἐσυνεχίσθη μεταξὺ τῶν διαφόρων ὑπομνηματιστῶν μέχρι τῶν Clavius, Peletarius, Viète, Galilei καὶ Wallis» (T. Heath : A manual of greek mathematics). Τὸ πρόβλημα τέλος εὗρε τὴν ἀκριβῆ διευκρίνησιν καὶ διατύπωσιν μόνον διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἐπαφῶν διαφόρων τάξεων (βλ. I. Χατζηδάκη : Διαφορικὸς Λογισμός, Ἀθῆναι, 1911, σ. 59) (βλ. καὶ § 416 τῆς παρούσης Ἱστορίας).

5 (σ. 117).

«Περὶ σφαιρικῶν τριγώνων, Βιβλία V».

6 (σ. 119).

«Κανὼν τῆς τριγωνομετρίας, νῦν τὸ πρῶτον ἐκδιδόμενος ὑπὸ τοῦ G. I. Raetico».

7 (σ. 132).

«Ὀλλανδὸς Ἐρατοσθένης· ἀληθὲς μέγεθος τῆς περιφερείας τῆς γῆς».

8 (σ. 132).

«Κανὼν τριγωνομετρίας, Βιβλία IV».

9 (σ. 136)

«Μέρος πρῶτον μαθηματικῶν ἰδεῶν ἢ μέθοδος τῶν πολυγώνων, ὅπου δίδονται

μὲ ἀκριβεστάτην καὶ ἀσφαλεστάτην μέθοδον ἐρεύνης αἱ πλευραί, αἱ περίμετροι καὶ τὰ ἐμβαδὰ τυχόντος πολυγώνου, καθὼς καὶ ἕνας τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου».

10 (σ. 174).

«Συμπλήρωμα εἰς τὸν Ἀρχιμήδη· περὶ στερεομετρίας σχημάτων ἐρχομένων ἀμέσως μετὰ τὰ κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ».

11 (σ. 204).

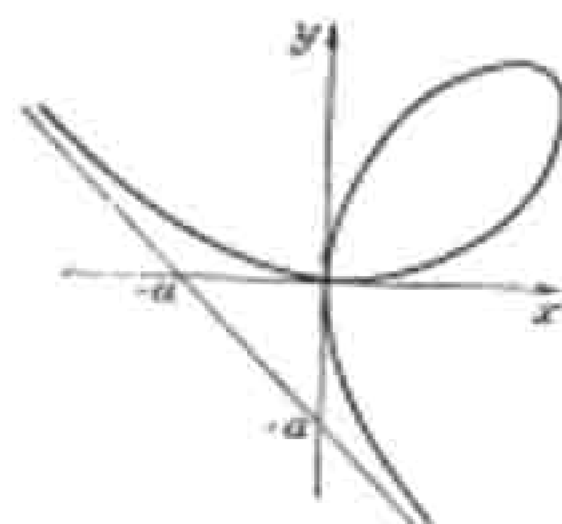
«Περὶ μαθηματικῆς ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως».

12 (σ. 220).

Ὁ Issaac Todhunter, ἄγγλος μαθηματικὸς τοῦ 19ου αἰῶνος (1820 - 1884), διέπρεψεν εἰς διαφόρους κλάδους τῆς γνώσεως, κατ' ἐξοχὴν ὅμως εἶναι γνωστὸς ὡς συγγραφεὺς πολυαρίθμων καὶ ἐξαιρετικῶν μαθηματικῶν βιβλίων διδακτικοῦ χαρακτῆρος, ὡς εἶναι τὰ ἀκόλουθα: Διαφορικὸς Λογισμὸς (1852), Ἀναλυτικὴ Στατιστικὴ (1853), Ἐπίπεδος γεωμετρία τῶν συντεταγμένων (1855), Παραδείγματα ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τριῶν διαστάσεων (1858), Ἄλγεβρα (1858), Τριγωνομετρία (1859), Ἡ θεωρία τῶν ἐξισώσεων (1861) Ἱστορία τῆς ἐξελίξεως τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα (1861), Ἱστορία τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων ἀπὸ τοῦ Pascal μέχρι τοῦ Laplace (1865), Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν θεωριῶν τῆς ἕλξεως ἀπὸ τοῦ Newton μέχρι τοῦ Laplace (1873), Ἡ σύγκρισις τῶν μελετῶν (1873), Συναρτήσεις τοῦ Laplace (1875), Ἱστορία τῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος (1886).

13 (σ. 242).

Τὸ «φύλλον τοῦ Καρτεσίου», $x^3+y^3=3ax$, εἶναι καμπύλη ἀποτελουμένη ἐξ ἑνὸς βρόχου, προεκτείνοντος δύο κλάδους εἰς τὸ ἄπειρον μὲ κοινὴν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν $x+y+a=0$ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας $y=x$. Αἱ περιεργότεραι ἰδιότητες τῆς καμπύλης εἶναι: α) Τὸ ἐμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο κλάδων καὶ τῆς ἀσυμπτώτου εἶναι πεπερασμένον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βρόχου, β) ἀμφότερα τὰ χωρία τετραγωνίζονται, ὡς ἴσα ἕκαστον πρὸς $3\cdot a^2/2$, ἤτοι πρὸς τρία ἰσοσκελῆ καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα πλευρᾶς α (βλ. παρακείμενον σχῆμα).



14 (σ. 253).

«Γεωμετρικὴ διατριβὴ περὶ συγκρίσεως καμπύλων γραμμῶν».

15 (σ. 258).

«Ἡμεῖς ἐν τούτοις δὲν λυπούμεθα καθόλου διὰ μίαν ἔστω πρόωρον καὶ ἀνώριμον ἐργασίαν, συμφέρει δὲ ἄλλωστε εἰς τοὺς μεταγενεστέρους νὰ μὴ φθονοῦνται τὰ ἄμορφα ἔμβρυα τῆς ἐπιστήμης ἐκείνης, ἡ ὁποία τὰ ἀρχικῶς ἀνεπεξέργαστα καὶ ἀτελῆ ἔργα δύναται νὰ τελειοποιῇ καὶ ἐπαυξάνῃ διὰ νέων ἐφευρέσεων».

16 (σ. 263).

Περὶ τοῦ Fermat καὶ τοῦ «μεγάλου θεωρήματος» αὐτοῦ δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ εὕρῃ περαιτέρω ἐνδιαφερούσας πληροφορίας εἰς Τόμον ΙΣΤ, Γ' 1935 τοῦ Δελτίου τῆς ΕΜΕ (σελ. 201 - 232), ὅπου δημοσιεύεται τὸ κείμενον σχετικῆς διαλέξεως τοῦ ἐκλιπόντος καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Σπ. Σαραντοπούλου.

17 (σ. 269).

Savilian professor ὀνομάζεται εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὁ κατέχων ὁμώνυμον ἕδραν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Henry Savile (1549 - 1622), διατελέσαντος διευθυντοῦ τοῦ Ἱδρύματος καὶ ἱδρυτοῦ ἐξ ἰδίων πόρων δύο ἑδρῶν γεωμετρίας καὶ ἀστρονομίας εἰς αὐτὸ (§ 293). Αἱ δύο Σεβιλιαναὶ ἕδραι (Savilian chairs) καταληφθεῖσαι διαδοχικῶς ἀπὸ ἐπιφανεῖς ἐπιστήμονας ἐπὶ τρεῖς καὶ πλέον αἰῶνας ἐγένοντο ἀφορμὴ μεγάλων προόδων τῆς ἐπιστήμης.

18 (σ. 276).

«Περὶ μετασχηματισμοῦ καὶ ἁπλοποιήσεως τῶν ἐξισώσεων τῶν καμπύλων.

19 (σ. 277).

«Ἡ γεωμετρία τῶν Ἀρχαίων προαγομένη εἰς ἑπτὰ βιβλία περὶ κυκλοειδῶν».

20 (σ. 277).

«Περὶ συγκρίσεως τῶν καμπύλων γραμμῶν πρὸς εὐθείας».

21 (σ. 284).

«Ὑποδειγματικὸν σχεδίασμα ἑνὸς γενικοῦ τρόπου ἀρχιτεκτονικῆς λιθοτομίας καὶ διασάφησις ἑνὸς τρόπου συντομεύσεως τῶν πράξεων προοπτικῆς καὶ γεωμετρογραφίας ὡς καὶ χαράξεως ἴσων ἡλιακῶν ὡρῶν ἐπὶ οἱασδήποτε ὡρολογιακῆς πλακός».

22 (σ. 298).

«Μερικαὶ σκέψεις ἐπὶ τῶν τεθέντων χρηματικῶν ὅρων σχετικῶς μὲ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀφορώντων τὴν κυκλοειδῆ».

23 (σ. 298).

«Ἱστορία τῆς roulette, καλουμένης ἄλλως τροχοειδοῦς ἢ κυκλοειδοῦς, ὅπου γίνεται λόγος περὶ τοῦ πῶς ἔφθασαν βαθμηδὸν εἰς τὴν γνῶσιν τῆς καμπύλης αὐτῆς».

24 (σ. 303).

«Ἔκθεσις ἐπὶ τῆς ἐξετάσεως καὶ κρίσεως τῶν ἀποσταλεισῶν λύσεων διὰ τὰ προταθέντα δημοσίως βραβεῖα ἀναφορικῶς πρὸς τὴν κυκλοειδῆ, ὅπου διαπιστοῦται ὅτι οὐδὲ βραβεῖον ἐδόθη, διότι οὐδεὶς ἔφθασεν εἰς ἀληθῆ λύσιν τῶν προβλημάτων».

25 (σ. 304).

«Συνέχεια τῆς ἱστορίας τῆς κυκλοειδοῦς, ὅπου ἀποκαλύπτεται ἡ δρᾶσις ἑνὸς προσώπου θελήσαντος σήμερον ν' ἀποδώσῃ εἰς τὸν ἑαυτόν του τὴν ἐπινόησιν τῶν προβλημάτων, ποὺ ἐπροτάθησαν ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης».

26 (σ. 309).

«Κυλινδροειδῶν καὶ δακτυλιοειδῶν, Βιβλία IV».

27 (σ. 310).

«Στοιχεῖα ἐπιπέδου καὶ στερεᾶς γεωμετρίας, εἰς τὰ ὁποῖα προστίθενται ἐπίλεκτα θεωρήματα ἐκ τῶν τοῦ Ἀρχιμήδους».

28 (σ. 310).

«Θεωρία καὶ πρᾶξις τῆς ἀριθμητικῆς μετ' αὐστηρῶν ἀποδείξεων».

29 (σ. 311).

«Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς συνθέσεως τῶν κινήσεων καὶ ἐπὶ τῶν τρόπων κατασκευῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας».

30 (σ. 313).

«Περὶ ἀναγνωρίσεως τῶν ἐξισώσεων καὶ γεωμετρικῆς λύσεως ἐπιπέδων καὶ κυβικῶν ἐξισώσεων».

31 (σ. 324).

Lucasian Professor ὀνομάζεται εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὁ κατέχων ὁμώνυμον ἕδραν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge, τῆς ἕδρας ὀνομασθείσης οὕτω ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἱδρυτοῦ της Henry Lucas (; - 1663). Οὗτος ἐφοίτησεν εἰς τὸ ἐν λόγῳ Πανεπιστήμιον, λαβὼν τίτλον M.A. (1635 - 1636), ἐξελέγη δὲ ἀντιπρόσωπος τούτου εἰς τὴν Βουλὴν κατὰ τὴν περίοδον 1639 - 1640. Διὰ δωρεᾶς του ἱδρύθη ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία ἐκ τοῦ ὀνόματός του ἐκλήθη Λουκασιανὴ (Lucasian chair). Πρῶτος κάτοχος τῆς ἕδρας ὑπῆρξεν ὁ Barrow (§ 398), τὸν ὁποῖον μετὰ ἑξαετίαν διεδέχθη ὁ μαθητής του Isaac Newton (29 Ὀκτ. 1669, § 428). Εἰς τὸν ἐναρκτήριον λόγον του ὁ Barrow εἶπε διὰ τὸν Lucas: «Εὐεργετικὸν ἄστρον μὲ ἕνα φῶς ἀληθείας καὶ ἀγαθότητος, οἷον οὐδέποτε ἔλαμψεν ὑπὲρ τὸν ἀκαδημαϊκὸν ὁρίζοντα».

32 (σ. 351).

Πρόκειται περὶ τοῦ ὑπ' ἀρ. ε' τῶν ὅρων τοῦ Βιβλίου VI τῶν Στοιχείων: «Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινα» ἤ, κατὰ μετάφρασιν τοῦ κ. Ε. Σταμάτη: «Λόγος λέγεται ὅτι σύγκειται ἐκ λόγων, ὅταν αἱ πηλικότητες—τὰ μέτρα—τῶν λόγων πολλαπλασιασθεῖσαι ἐφ' ἑαυτὰς σχηματίζωσι λόγον τινα».

33 (σ. 370).

«Ἀνάλυσις εἰς ἐξισώσεις ἀπειροπληθῶν ὅρων».

34 (σ. 370).

«Μέθοδος τῶν ροῶν καὶ ἀπείρων σειρῶν».

35 (σ. 374).

«Ἀγάλλονται οἱ θνητοὶ γιαὐτὸν ποὺ ἀναδείχτηκε τέτοιο ἀνεκτίμητο κόσμημα τοῦ γένους τῶν ἀνθρώπων».

36 (σ. 382).

«Μία μέθοδος συνισταμένη εἰς ἐξαγωγὴν ρεούσης ποσότητος ἀπὸ ἐξίσωσιν περιέχουσαν ἐπίσης ροὴν αὐτῆς. Καὶ ἄλλη, συνισταμένη εἰς τὴν παραδοχὴν σειρᾶς ἀντὶ τῆς ἀγνώστου ποσότητος, ἐξ ἧς τὰ λοιπὰ εὐκόλως προκύπτουν, καὶ εἰς σύγκρισιν τῶν ὁμολόγων ὅρων τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως πρὸς εὕρεσιν τῶν ὅρων τῆς παραδεδεγμένης σειρᾶς».

37 (σ. 405).

«Νέα μέθοδος εὑρέσεως μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ὡς καὶ ἐφαπτομένων, μὴ κωλυομένη ὑπὸ κλασμάτων ἢ ἀρρήτων καὶ ἰδιάζων τρόπος ὑπολογισμοῦ τούτων».

38 (σ. 408).

«Νομικο-μαθηματικὴ μελέτη ἁπλοῦ ἀνατοκισμοῦ».

39 (σ. 420).

«Ἀντίστροφος μέθοδος τῶν ροῶν ἢ νόμοι ἐξαγωγῆς τῶν ρευσῶν».

40 (σ. 449).

«αἱ ὁποῖαι εἶναι τοσοῦτον πλησιέστεραι πρὸς τὰς ἐν ἴσοις χρονικοῖς μορίοις αὐξήσεις τῆς μεταβλητῆς (ρεούσης), ὅσον τὰ τελευταῖα ταῦτα γίνονται μικρότερα».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

1. N. TARTAGLIA, Nova scientia inventa de N. T. (Venezia, 1537).
2. N. TARTAGLIA, La nova scientia de N. T., con una gionta al terzo Libro (Ivi, 1550).
3. EUCLIDE MEGARENSE, philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice, diligentemente reassettato et alla integrità ridotto (Venezia, 1543).
4. Opera Archimedis Siracusani, philosophi et mathematici ingeniosisimi, per NICOLAUM TARTALEAM BRIXIANUM (Venezia, 1543).
5. ARCHIMEDIS, De insidientibus aquae (I Libro, Venezia, 1543; II Libro, ivi, 1565).
6. Quesiti et inventioni diverse, di NICOLO TARTAGLIA (Venezia, 1546).
7. General trattato di numeri et misure, di NICOLO TARTAGLIA (Parti I-VI, Venezia, 1556 e 1560).
8. B. BONCOMPAGNI, Intorno ad un testamento inedito di Nicolo Tartaglia (Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini; Milano, 1881).
9. A. BERTOLOTTI, I tastementi di Girolamo Cardano, medico, filosofo e matematico del secolo XVI (Arch. Stor. Lombardo, t. IX, 1882).
10. E. COSTA, Gerolamo Cardano allo studio di Bologna (Arch. Stor. Italiano, V Ser., t. XXXV, 1905).
11. E. RIVARI, Girolamo Cardano accusa e fa bandire da Bologna per furto il figlio Aldo (Studi e Mem. per la storia dell' Univ. di Bologna, t. I, 1907).
12. HIERONYMI CARDANI, medici Mediolanensis, Practica arithmetice et mensurandis singularis (Mediol., 1539).
13. HIERONYMI CARDANI, Artis magnae, sive de regulis algebraicis, Lib. unus (Norimbergae, 1545).
14. HIERONYMI CARDANI, Opera omnia 10 Vol. (Ludguni, 1553). Il I Vol. contiene gli scritti bio-bibliografici intitolati De vita propria Liber e De libris propriis et eorum usu; il IV tutti i lavori matematici.
15. I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di LODOVICO FERRARI, coi sei contro-cartelli in risposta di NICOLO TARTAGLIA, comprendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' alta parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da ENRICO GIORDANI (Milano, 1876).
16. LODOVICO FRATI, Scipione dal Ferro (Boll. di bibl. e storia delle scienze matem., t. XII, 1910).
17. E. BORTOLOTTI, La scuola matematica di Bologna. Cenno storico (Bologna 1928).
18. E. BORTOLOTTI, Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII (Bologna, 1928).
19. L' Algebra. Opera di RAFAEL BOMBELLI da Bologna, divisa in tre Libri. Con

la quale ciascuno da sè potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell' aritmetica (Bologna, 1579). Libri IV e V comprendenti «la parte geometrica», inedita, tratta dal manoscritto, pubblicata a cura di E. BORTOLOTTI (Bologna, 1929).
20. BAPTISTAE BENEDICTI, Patritij Veneti Philosophi, Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum Liber (Taurini, 1585).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

1. GREGORIUS REISCH, Aepitoma omnis philosophiae, alias Margarita phylosophica tractans de omni genere scibili (Freiburg, 1503).
2. G. FRIZZO, De numeris Libri duo, authore IOANNE NOVIOMAGO, esposti e illustrati (Verona-Padova, 1901). Appendice (Ivi, 1903).
3. De arte supputandi Libri quattuor CUTHBERTI TONSTALLI (London, 1522).
4. ORONTII FINEI delphinatis, Protomathesis (Parisiis, 1532)
5. ORONTII FINEI, In sex priores Libros geometricorum Elementorum Euclidis demonstrationes (Ivi, 1536).
6. ORONTII FINEI, De quadratura circuli tandem inventa etc. (Ivi, 1544).
7. ORONTII FINEI, De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII, quibus inter caetera circuli quadratura centum modis et supra, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur (Ivi, 1556).
8. P. S. CIRUELO, Tractatus arithmetice practice qui dicitur Algorismus (Parisiis, 1505).
9. G. WERTHEIM, Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik (Braunschweig, 1896).
10. Die Coss CHRISTOFFS RUDOLFS, die schönen Exempeln der Coss durch MICHAEL STIFEL gebessert und sehr gemehrt (Königsberg, 1553).
11. Arithmetica integra Authore MICHAELE STIFELIO, Cum Praefatione P. Melanchtonis (Norimberga, 1544).
12. R. RECORDE, The Ground of Artes (London, 1540 circa).
13. R. RECORDE, The whestone of witte whiche is the seconde parte of Arithmetike (London, 1557).
14. P. NONII Salaciensi, De erratis Orontii Finoei (Coimbra, 1546).
15. Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria, compuesto per el Doctor PEDRO NUNES (Anvers, 1567).
16. Euclides (I ed., Parigi, 1544; II ed., id., 1549, senza nome d' autore; la II edizione porta una Prefazione del Ramus).
17. P. RAMI, Arithmeticae Libri tres (Parisiis 1555; altre edizioni 1557, 1562, 1569, 1577, 1580, 1581, 1586, 1591, 1592, 1596, 1599, 1611, 1612, 1613, 1627).
18. P. RAMI, Scholarum mathematicarum Libri unus et triginta (Basilae, 1569); altre ediz. 1573, 1599, 1627 (1).
19. H. BOSMANS, La «Practiqve om te leeren cyphern» de Nicolas Petri de Deventer (Revue des questions scientifiques, t. XXXII, 1908).
20. H. BOSMANS, La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres (Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, t. XXVII, I, 1904).
21. H. BOSMANS, Le fragment du Commentaire d' Adrien Romain sur l' algèbre de Mahumed ben Musa el-Chevârezmî (Id., t. XXX, 1906),
22. Les Oeuvres mathematiques de SIMON STEVIN. Le tout revu, corrigé et augmenté par Albert Girard (Leyde, 1634).

23. FRANCISCI VIETAE, Opera mathematica. In unum volumen congesta ac recognita, opuere atque studio Francisci Schooten (Lugd. Batav., 1646).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

1. The Elements of Geometrie of the most ancient Philosoph Euclid of Megara Faithfully (now first) translated into the Englishe tong, by H. BILLINGSLEY, Citizen of London (London, 1570).
2. B. BALDI, Vita di F. Commandino (Giornale dei Letterati d'Italia, t. XX, Venezia).
3. B. BALDI, Cronica de matematici ouvero Epitome dell' istoria delle vite loro (Urbino, 1707).
4. G. B. BENEDETTI, Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessarie inventorum una tantummodo circini data apertura (Venetiis, 1553).
5. THEODOSII, Sphaericorum Elementorum Libri III. Ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici. MENELAI, Sphaericorum Lib. III. Ex traditione ejusdem. MAUROLYCI, Sphaericorum Lib. II. AUTOLYCI, De sphaera quae movetur Libri. THEODOSII, De Habitationibus. EUCLIDIS, Phaenomena brevissime demonstrata. Demonstratio et praxis trium tabellarum scilicet Sinus recti, Fecundae et Beneficae ad Spheralia triangulis pertinentium. Compendium mathematicae mira brevitate ex clarissimis authoribus. MAUROLYCI, De Sphaera sermo (Messenae, 1558).
6. FRANCISCI MAUROLYCI, Opuscula mathematica (Venetiis, 1575).
7. MAUROLYCI, Enodatio et Restitutio Conicorum APOLONII PERGAEI (Messenae, 1554).
8. Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica, quae exitant, ex traditione D. FRANCISCI MAUROLYCI (Panormi, 1685).
9. FEDERICO NAPOLI, Scritti inediti di Francesco Maurolico (Bullettino di bibl. e storia delle scienze mat. e fis., t. IX, 1876).
10. PTOLEMAEI, Planisphaerium; JORDANI, Planisphaerium; F. COMMANDINI in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius (Venetiis, 1558).
11. ARCHIMEDIS, Opera non nulla a F. COMMANDINO nuper in Latinum conversa et Commentariis illustrata (Venetiis, 1558).
12. PAPPI ALEXANDRINI, Mathematicae Collectiones a F. COMMANDINO in latinum conversae (Pisauri, 1558).
13. CLAUDII PTOLEMAEI, Liber de Analemmate (Romae, 1562).
14. ARCHIMEDIS, De iis quae vehuntur in aqua Libri duo. A F. COMMANDINO in pristinum nitorem restituti et Commentariis illustrati (Bononiae, 1565).
15. FEDERICI COMMANDINI, Liber de centro gravitatis solidorum (Bononiae, 1565).
16. APOLLONI PERGAEI, Conicorum Libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitae. SERENI, Antissensis Libri duo. Quae omnia nuper F. COMMANDINO illustravit (Bononiae, 1566).
17. De superficierum divisionibus Liber Machometo Bagdedino ascriptus nunc primum JOANNIS DEE et F. COMMANDINI Opera in lucem editus.
18. F. COMMANDINI, De eadem re libellus (Pisauri, 1570; versione italiana, Pesaro, 1570).
19. ARISTARCHI, De magnitudinibus et distantiis solis et lunae Liber. A F. COMMANDINO in latinum conversus ac commentariis illustratus (Pisauri, 1572).

20. EUCLIDIS, Elementorum Libri XV, una cum Scholijs antiquis. A F. COMMANDINO in latinum conversi (Pisauri 1572; trad. italiana, Urbino, 1575).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIX

1. Thesaurus mathematicus sive Canon sinuum ad radium 1000000000000000 a I. G. RHETICO supputatus, at nunc primun in lucem editus a B. PITISCO (Francoforte, 1613).
2. B. PITISCO, Trigonometriae sive de dimensione triangulorum Libri quinque (Francoforte, 1509).
3. REGIOMONTANO, Tabulae directionum perfectionumque, ed. E. RADOLT (Augsburg, 1490).
4. TYCHONIS BRAHE, Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica. Nunc primum editit Dr. F. STUDNICKA (Pragae, MDXCVII).
5. H. BOSMANS, Le traité des sinus de Michiel Coignet (Revue des questions scientifiques t. XXV, 1901).
6. COPERNICO, Dissertatio de optima monetae cudendae ratione, anno 1526 scripta (nuova ediz., Varsavia, 1816).
7. THOMAE FINKII Flenspurgensis, Geometria rotundi Libri XIIII (Basileae, M. D. LXXXIII).
8. IOANNIS VERNERI, De triangulis sphaericis Libri quatuor, De metereoscopiis Libri sex, cum Proemio G. I. RHETICI. I. De triangulis sphaericis, herausgegeben von A. A. BJÖRNBO (Abhand. zur Gesch. der Mathematik, Hefl, XXIV, 1907).
9. C. CLAVIUS, Opera mathematica (Moguntiae, 1612. Vol I: In Euclidem et in Theodosium Commentarii. De sinibus et lineis tangentibus et secantibus. Triangula rectilinea et triangula sphaerica. Vol. II : Geometria practica. Arithmetica practica. Algebra. Vol. III : In sphaeram J. de Sacro Bosco commentarius. Astrolabium. Vol. IV : Gnomonices Libri octo. Vol. V : Romani calendarii a Gregorio XIII restitutio).
10. A. DI MONFORTE, Epistola ad clarissimum virum A. MAGLIABECXI continens solutiones problematum, quae Leidensis geometra post tabulam latens proposuit (Napoli, 1676).
11. GIACINTO GRISTOFORO, De constructione aequationum (Napoli, 1699).
12. GIACINTO CRISTOFORO, Della dottrina dei triangoli (Venezia, 1720).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XX

1. G. LORIA, Il «Giornale de' Letterati d' Italia» di Venezia e la «Raccolta Calogerà» come fonti per la storia delle matematiche nel Secolo XVIII (Abhandl. z. Gesch. der Mathematik, t. IX, 1899).
2. F. MÜLLER, Die «Bibliothèque germanique», das «Journal littéraire d' Allemagne» und die «Nouvelle Bibliothèque Germanique» als Quellen für die Geschichte der Mathematik im XVIII Jahrhundert (Festschrift M. Cantor, Leipzig, 1909).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXI

1. Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Authore ac Inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1614).

2. A Description of the admirable Table of Logarithmes. With a declaration of the most plentiful easy and speedy use there of in both kindes of trigonometrie as also in all mathematical calculations. Invented and published in latin by that honorable L. JOHN NEPAIR and translated into English by EDWARD WRIGHT. With an Addition by HENRY BRIGGS (London, 1616).
3. Mirifici Logarithmorum Canonis constructio, ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Authore et inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1916).
4. The Construction of the wonderful Canon of Logarithms by JOHN NAPPIER translated from Latin into English by WILLIAM RAE MACDONALD (Edinburgh, 1889).
5. Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas libri duo; cum Appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario. Authore et inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1619).
6. De Arte logistica JOANNIS NEPERI (Edinburgh, 1839).
7. Arithmetica logarithmica sive logarithmorum Chiliades triginta. His numeros primus invenit clarissimus vir JOHANNES NEPERUS et usum illustravit HENRICUS BRIGGIUS (Londini, 1624).
8. J(USTUS) B(YRG), Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen sambt gründlichem Unterricht wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen und verstanden werden sol (Prag, 1620).
9. A. VLACQ, Arithmetica logarithmorum sive logarithmorum cliliades centum pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 100000 (Goudae, 1628).
10. Trigonometria artificialis sive magnus canon triangulorum logarithmicus, ad radium 100000,00000 et ad dena scrupula secunda ab ADRIANO VLACCO Goudano constructus (Goudae, M.DC.XXXIII).
11. P. A. CATALDI, Trattato dei numeri perfetti (Bologna, 1603).
12. P. A. CATALDI, Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti (Ivi, 1603). Aggiunta alla stessa (Ivi, 1604).
13. P. A. CATALDI, Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati, con le cause & inventioni loro, et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari & altre (Ivi, 1613).
14. P. A. CATALDI, Trattato geometrico dove si esamina il modo di formare il pentagono sopra una linea retta, descritto da ALBERTO DURERO (Ivi, 1620).
15. P. A. CATALDI, Difesa d' Archimede. Trattato del misurare o trovare la grandezza del cerchio; dove si diffende Archimede Siracusano dalle oppositioni del Signor Joseffo Scaligero (Ivi, 1620).
16. P. A. CATALDI, Difesa d' Euclide, dove si dimostra le oppositioni date dal sig. Joan Alfonso Molino Cano a molte propositioni degli Elementi d' Euclide non essere di valore, & si mantiene chiara la certissima dottrina d' essi Elementi (Ivi, 1626).
17. F. PATRICI, Della nuova geometria Libri XV. Nei quali con mirabile ordine, e con a maraviglia più facili, e più forti delle usate, si vede che le Matematiche per via regia e più piana che dagli antichi fatto non si è, si possono trattare (Ferrara, 1587).
18. KEPLER, Astronomia nova, seu physica coelestis tradita de commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus Tychonis Brahe (Heidelbergae, 1609).
19. Nova Stereometria Doliorum Vinariorum imprimis austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus et plane singularis. Accessit

Stereometriae Archimedeae Supplementum. Authore JOHANNE KEPLERO (Lincii, MDCXV).

20. Aussug aus der vralten Messe-Kunst Archimedes und deroselben newlich in Latein aussgangener Ergentzung betreffend Rechnung der körperlichen Figuren, holen Gefessen und Weinfässer sonderlich dess Oesterreichischen, gestelt durch JOHANN KEPLERN (Lintz, MDCXVI).
21. JOHANNIS KEPLERI, Harmonices mundi Libri V (Lincii Austriae, MDCIXIX).
22. J. KEPLER, Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos; premissa demonstratione legitima ortus logarithmorum eorumque usus (Marpurgi, 1624). Supplementum chiliadis logarithmorum etc. (Ivi, 1625).
23. JOHANNIS KEPLERI, Astronomi, Opera omnia, edidit C. FRISCH (Francfurti et Erlangae, 1858 - 1871), 8 volumi.
24. JOHANNIS KEPLERI, Neue Astronomie; übersetzi und eingeleitet von MAX CASPAR, Mit XIII und 68 Figuren (München-Berlin, 1929).
25. JOHANNES KEPLER in seinen Briefen. Herausgegeben VON MAX CASPAR und WALTHER VON DYCK (München und Berlin, 1930).
26. F. AGUILONIUS, Opticorum Libri VI (Anversa, 1613).
27. BACHET DE MÉZIRIAC, Problèmes plaisants et delectables qui se font par les nombres (I ed., Lyon, 1612; II ed., ivi, 1624. Un' altra edizione ne fu fatta da A. LABOSNE (Paris, 1884).
28. BACHET DE MÉZIRIAC, Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex et de numeris multangulis Liber unus (Paris, 1621).
29. G. ZACCAGNINI, Storia dello studio di Bologna durante il Rinascimento (Genève, 1930).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXII

1. B. CAVALIERI, Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta, ac regulae demonstrantur, astronomicaeque supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducuntur (Bononiae, 1632).
2. B. CAVALIERI, Compendio delle regole dei triangoli con le loro dimostrazioni (Bologna, 1638).
3. B. CAVALIERI, Centuria di varii problemi per dimostrare l' uso e la facilità de' logaritmi nella gnomonica, astronomia, geografia, altimetria, planimetria, stereometria e aritmetica pratica toccandosi anco qualche cosa nella meccanica, nell' arte militare e nella musica (Bologna, 1639).
4. B. CAVALIERI, Trigonometria plana, et sphaerica, linearis, et logarithmica (Bononiae, 1643).
5. B. CAVALIERI, Lo specchio ustorio, overo trattato delle settioni coniche e di alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono e moto (Bologna, 1632).
6. B. CAVALIERI, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (Bologna, 1535; II ediz. postuma migliorata, Bologna, 1653).
7. B. CAVALIERI, Exercitationes geometricae sex (Bononiae, 1647).
8. Opera geometrica EVANGELISTAE TORRICELLI (Florentiae, 1644).
9. Lezioni accademiche di EVANGELISTA TORRICELLI (Firenze, 1715).
10. Opere di EVANGELISTA TORRICELLI, edite da G. LORIA e G. VASSURA (Faenza, 1919).

11. De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum, Auctore V. VIVIANI (Flor., 1659).
12. Quinto Libro degli Elementi di Euclide ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo con nuov' ordine distesa e per la prima volta pubblicata da V. VIVIANI (Firenze, 1674).
13. V. VIVIANI, Enodatio problematum universis geometris praepositorum a D. Claudio Comiers (Flor., 1677).
14. V. VIVIANI, Formazione e misura di tutti i cieli con la scrittura e quadratura esatta dell' intero e delle parti di un nuovo cielo ammirabile (Firenze, 1692).
15. De Locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libres iniuria temporum amissos Aristaei Senioris Geometrie, auct. V. VIVIANI (Flor., 1702).
16. Apollonii Pergaei Conicorum Libri V, VI, VII. Paraphraste Abalphate Asphahanensis nunc primum editi. Additus in calce Archimedis Assumptorum Liber ex codicibus Arabicis m. ss. ABRAHAMUS ECCHELLENSIS latinos reddidit. I. A. BORELLUS curam in geometricis versioni contulit et notas uberiores in universum opus adiecit (Flor., 1661).
17. M. RICCI, Geometrica exercitatio de maximis et minimis (Roma, 1666).
18. G. A. BORELLI, Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa, brevius et facilius contexta, in quibus praecipue proportionum theoriae, nova firmiorique methodo promuntur (Pisis, 1658).
19. G. A. BORELLI, Euclide rinnovato, ovvero ecc. (Bologna, 1663).
20. G. GIOVANNOZZI, La versione borelliana dei Conici di Apollonio. Con 21 Lettere inedite di G. A. BORELLI (Roma-Firenze, 1916).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIII

1. ALBERT GIRARD, Invention nouvelle en l' algèbre (Amsterdam, 1629. Réipmression par D. Bierens de Haan, Leiden, 1884).
2. ALBERT GIRARD, Table des sinus, tangentes et secantes, selon le raid 100000 parties. Avec un traitè succinct tant des triangles plans, que sphériques. Ou sont plusieurs operations nouvelles, non auparavant mises en lumières, très utiles et necessaires, non seulement aux apprentifs, mais aussi aux plus doctes practiciens des mathématiques (La Haye, 1626, 1627, 1629; trad., in flammingo, 1626).
3. G. OUGHTREDI, Arithmeticae in numeris et speciebus Institutio : quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est (Londini, M. M. MC. XXXI).
4. GUILELMI OUGHTREDI AETONENSIS, Clavis mathematicae denuo limata, potius fabricata. Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus (in due vol.) (Oxoniae, 1652).
5. M. GHETALDI, Apollonius redivivus, seu restituta Pergaei inclinationum geometria (Venet., 1607).
6. M. GHETALDI, Supplementum Apollonnii Galli, seu exsuscitata Apollonnii Pergaei tactionum geometriacarum pars reliqua (Venet., 1607).
7. M. GHETALDI, De resolutione et compositione mathematica (Roma, 1630).
8. The Circle of proportion and the horizontal instrument. Both invented, and the uses of both, written in latin by Mr. W. O. Translated into English : and set forth for the publique benefit by WILLIAM FORSTER (London, 1632).

9. Trigonometry, of the manner of calculating the sides and angles of triangles by the mathematical canon, demonstrated by WILLIAM OUGHTRED (London, 1657). inedita (Oxford, 1676).
10. GUILELMI OUGHTREDI, Opuscula mathematica hactenus inedita (Oxford, 1676).
11. T. HARRIOT, Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas (London, 1631).
12. G. VACCA, Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot (Boll. di bibliografia e storia delle scienze matematiche, t. V, 1902).
13. P. HERIGONE, Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus, per notas reales et universales circa usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles. Cours de mathematiques demonstré d' une nouvelle briève et claire méthode etc. (Paris, MDCXXXIV). I Vol. : Euclides Elements XV Lib. etc. II Vol. : Arithmetica practica, computus ecclesiasticus et algebra tum vulgaris tum speciosa, una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sine repetitionem vestigiorum analyseos. III Vol. : Constructio tab. sin. et logarithmor. una cum ear. usu in anatocismo et triangulor. rectilineorum dimensione. Geom. practica. Ars muniendi. Militia. Mechanica. IV Vol. : Sphaera mundi. Geographia vetus et nova, gradibus et minutis longitudinum ac latitudinum designata. Histiodromia. V Vol.: Optica. Catoptrica. Perspectiva. Sphaericorum trigonometria. Theoricae planetarum tam secundum stantis quam motae terrae hypothesin. Gnomonica. Musica. VI et ult. Vol. : Supplementum continens geometricas aequationum cubicarum purarum atque affectarum affectiones*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIV

1. Oeuvres de Descartes publiées par CHARLES ADAM et PAUL TANNERY sous les auspices du Ministère de l' Instruction publique, 12 Vol. e un Supplemento (Paris, 1897 - 1913 ; nell' Intrudozione al I Vol. il lettore troverà esaurienti notizie sopra le edizioni precedenti ; il Vol. XII contiene una biografia di Descartes dovuta all' ADAM).
2. P. TANNERY, La correspondance de Descartes dans les inédits du Fond Libri étudiée pour l' histoire des mathématiques (Paris, 1893 ; ivi si trovano i libelli del Beaugrand contro Descartes).
3. LEON ROTH, Correspondence of Descartes and Constantin Huygens, 1635 - 1647, edited from Manuscripts now in the Bibliothèque Nationale, formerly in the possession of the late H. W. Buxton (Oxford, 1926 ; contiene documenti relativi alla sfida Descartes - Stampionen - Wassennaer).
4. J. DE BILLY, Doctrinae analyticae inventum novum (Tolosae, 1670 ; una traduzione francese si trova nel III Vol della succitata edizione di Fermat).

---

* Τὸ ἀντίγραφον ποὺ κατέχομεν φέρει ἔτος MDCXIV καὶ τὴν δήλωσιν ὅτι ἡ ἐκτύπωσις ἐπερατώθη τὴν 2αν Ἰουλίου 1642. Εὑρίσκεται δὲ προσηρτημένον ἕνα τομίδιον τοῦ αὐτοῦ μικροσκοπικοῦ σχήματος, περιέχον «Τὰ ἕξ πρῶτα βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου» καὶ μέρη στοιχειωδῶν μαθηματικῶν ἐπεξηγούμενα μὲ τὸ ἴδιον σύστημα, ἀλλὰ εἰς γαλλικὴν γλῶσσαν. Εἰς τὸ τέλος ὑπάρχει «μικρὸν λεξιλόγιον περιέχον τὰς ἐτυμολογίας καὶ ἑρμηνείας τῶν σκοτεινοτέρων μαθηματικῶν ὀνομάτων καὶ ὅρων».

5. Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis inter J. WALLISIUM et alios viros doctrina et nobilitate illustres (Oxoniae, 1658; II ed., id., una traduzione francese se ne legge nel III Vol. delle citate Oeuvres de Fermat).
6. Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de P. TANNERY et CH. HENRY sous les auspices du Ministère de l' Instruction publique, 4 Vol. e un Supplemento per cura di C. de Waard (Paris, 1891, 1894, 1896, 1912, 1922).
7. C. MYDORGE, Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive Conicorum operis II Lib. (Paris, 1631; IV lib., 1639).
8. Solutio duorum problematum circa numeros cubos e quadratos, quae tamquam insolubilia universis Europae Mathematicis a clarissimo viro D. FERMAT sunt proposita, et ad D. Cl. M. LAURENDERIUM Doctorem Medicum transmissa, ad D.B.F.D.B. inventa. Nec non alia duo problemata numerica a D. Cl. M. LAURENDERIUM vicissim proposita, cum quibusdam solutionibus prioris problematis a D. FRANCISCO A SCHOOTEN in Academia Lugdune Batava Professore datis. In qua continentur Sex aliae solutiones prioris Problematis terminis Analyticis ab eodem D.B.F. sub forma Problematis datae. Insuper et Solutio alterius problematis ab eodem Cl. viro D. FERMAT circa numeros unitate a quadrato deficientes propositi; cum ipsius solutionis constructione. (Parisiis, MDCLVII).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXV

1. POUDRA, Oeuvres de Descartes réunies et analysées, In-8°, due vol., Paris, 1864 (ivi leggonsi anche scritti di Bosse, Curabelle, ecc.)
2. Oeuvres de Blaise Pascal publiées suivant l' ordre chronologique avec documents complémentaires, introduction et notes par L. BRUNSCHVIG, P. BOUTROUX et F. GAZIER, 14 Vol., Paris, 1923-1925.
3. C. DE WAARD, Une lettre inédite de Roberval du 6 Janvier 1637 contenant le premier énoncé de la cycloïde (Bulletin des sciences mathém., 1921).
4. Lettera a Filaleti di TIMAURO ANTIATE: Della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell' argento vivo (Firenze, 1663, ristampato al termine del Vol. I delle Opere di E. Torricelli, ed. Loria e Vassura, Faenza, 1919).
5. LALOUVÈRE, Veterum geometria promota in septem de cycloide libris (Tolosa, 1660).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVI

1. GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO, Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni (Antwerp., 1647).
2. GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO, Opus geometricum posthumum ad mesolabum, per rationum proportionabilium novas proprietates (Gandavi, 1668).
3. A TACQUET, Opera mathematica, 2 Vol. (Antwerpiae, 1669, 1707).
4. Ouvrages de M. DE ROBERVAL (Mém. de l' Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu' à 1699, Paris, 1730).
5. JOHANNIS WALLIS, Opera mathematica, Oxoniae, 1695-1699. (Il Vol. I contiene: Oratio inauguralis. Mathesis universalis; seu Opus arithmeticum, philologice et mathematice traditum. Arithmeticam numerosam et speciosam, aliaque continens.

1657*. Adversus Marci Meibomii De proportionibus Dialogum, tractatus elenchticus, 1656. De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus, 1655. Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata, 1655. Tractatus duo. Prior, de cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, epistolaris in quo agitur de cissoide et corporibus inde genitis et de curvarum tum linearum εὐθύνσει, tum superficierum πλατυσμῷ 1659. Mechanica : sive de motu tractatus geometricus : Pars I, 1669 : Pars II, 1670 ; Pars III, 1671. Il Vol. II contiene : De Algebra tractatus, historicus et practicus. De combinationibus, alternationibus et partibus aliquotis, 1685. De sectionibus angularibus tractatus, 1685. De angulo contactus et semicirculi tractatus, anno 1656 editus, ejusque defensio edita anno 1685. De postulato quinto et definitione quinta Lib. 6 Euclidis, Disceptatio geometrica. Cono - cuneus seu corpus partim conum partim cuneum repraesentans, geometrice consideratum, anno 1685 anglice editum. Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum anno 1658 primo editum. Trigonometria plana et sphaerica authore JOH. CASWELL. Il Vol. III contiene : PTOLOMAEI, Harmonicorum ; PORPHIRIUM in Harmonica Ptolemaei Commentarius. ARCHIMEDIS, Arenarius, Dimensio circuli. EUTOCII in Archimedis Commentariis. ARISTARCHI, De magnitudinibus et distantia solis et lunae. PAPPI ALEX., Libri secundi Coll. Math. Epistolarum quarundam Collectio 1693 - 1698).

6. J. WALLIS, Treatise of algebra, both historical and practical (London, 1673 e 1685).
7. R. DE SLUSE, Mesolabum, seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exibitae (Leodij Ebunonum, 1659; II ed., ivi, 1668).
8. C. LE PAIGE, Correspondance de René - François de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d' une Introduction (Bull. di bibl. e storia, t. XVII, 1814).
9. L. ROSENFELD, René - François de Sluse et le problème des tangentes (Isis, Vol. X, 1928).
10. S. DEGLI ANGELI, De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rationibus ipsarum [partium [eorumdem genitis, una cum nonnullis ad praedictarum magnitudinem, aliarumque centra gravitatis (Venezia, 1654 e 1663).
11. S. GEGLI ANGELI, Problemata geometrica sexaginta circa conos, sphaeras, superficies conicas, sphaericasque praecipue versantia (Venezia, 1658).
12. S. DEGLI ANGELI, Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum (Venezia, 1659 e 1660).
13. S. DEGLI ANGELI, De infinitorum spiralium spatiorum mensura (Venezia, 1660).
14. S. DEGLI ANGELI, De superficie ungulae et de quartis liliorum parabolicum et cycloidalium (Venezia, 1661).
15. S. DEGLI ANGELI, De infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis (Venezia, 1661).
16. S. GEGLI ANGELI, De infinitis spiralibus inversis, infinitisque hyperbolis, ac aliis geometricis (Venezia, 1667).
17. P. MENGOLI, Viae novae quadraturae arithmeticae, seu de additione franctionum (Bononiae, 1650).

* Ἡ χρονολογία αὐτὴ καὶ αἱ ἀνάλογοι ἀναφέρονται εἰς τὰς πρώτας δημοσιεύσεις τῶν σχετικῶν κειμένων.

18. P. MENGOLI, Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam et planimetriam (Bononiae, 1655).
19. P. MENGOLI, Geometriae speciosae elementa (Bononiae, 1659).
20. P. MENGOLI, Circolo (Bononiae, 1672).
21. P. MENGOLI, Arithmeticae rationalis elementa quatuor (Bononiae, 1674).
22. Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati, Opera I. BARROW, (Londini, 1655).
23. Archimedis Opera ; Apollonii Pergaei Conicorum Libri quatuor ; Theodosii Sphaerica. Methodo novo et succincto demonstrata per I. BARROW (Londini, 1675).
24. The Mathematical Works of Isaac Barrow, edited by W. Whewell (Cambridge, 1860). (Questo volume comprende : I. BARROW, Lectiones mathematicae XXIII ; in quibus Principia matheseos generalia exponuntur ; habitae Cantabrigiae A. D. 1664, 1665, 1666, Londini, 1683 ; Lectiones XVIII Cantabrigiae in Scholis publicis habitae ; in quibus opticorum Phaenomenon genuine rationes investigantur, ac exponuntur, Londini, 1669 ; Lectiones geometricae ; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur, Londini, 1670).
25. The geometrical Lectures of ISAAC BARROW, translated by J. M. CHILD (Chicago and London, 1916).
26. N. MERCATOR, Logarithmotechnia, seu Methodus nova accurata et facilis construendi logarithmos (Lond., 1668 ; I ed., 1674).
27. W. BROUNCKER., The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers (Phil. Trans. R. Society, 1668).
28. J. GREGORY, Vera circuli et hyperbolae quadratura (Patav., 1667).
29. J. GREGORY, Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi et mensurae (Venet., 1667).
30. J. GREGORY, Exercitationes geometricae (Lond., 1668).
31. J. BOULLIAUD, Opus novum ad arithmetica infinitorum (Lut. Par., 1682).
32. D. GREGORY, Exercitatio geometrica de dimensione figurarum (Edinb., 1684).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVII

1. RENATI DESCARTES, Geometria opera atque studio FRANCISCI A SCHOOTEN. Francfurti ad Moenum MDCVCV. (Contiene : R. DESCARTES Geometria, tribus libris comprehensa. L. DEBEAUNE, in illam Notae breves. FRANCISCI A SCHOOTEN, in eandem Commentarii recogniti & aucti. F. A SCHOOTEN, De Cubicarum aequationum resolutione. F. A SCHOOTEN, Additamentum in quo continentur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis ; & generalis regula de extrahendi quibuscumque radicibus binomits. J. HUDDENII, Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit. H. VAN HEURAET, Epistola, de curvarum linearum in rectas transmutatione).
2. RENATI DESCARTES, Matheseos universalis seu Introductio ad Geometriae methodum conscripta ab ER. BARTHOLINO. Id. Id. (Contiene: inoltre F. DEBEAUNE, Duo tractatus posthumi, alter de batura et constitutione, altre de limitibus aequationum. J. DE WITT, De elementis curvarum linaerum libri duo. F. A. SCHOOTEN, Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico in lucem editus a F. A SCHOOTEN. Notae et admadversiones tumultuariae in universum opus).

3. F. DE LA HIRE, Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des paraboles, des ellipses et des hyperboles (Paris, 1673).
4. F. DE LA HIRE, Nouveaux éléments des sections coniques (Paris, 1679).
5. F. DE LA HIRE, Les lieux géométriques (Paris, 1679).
6. F. DE LA HIRE, La construction des lieux analytiques (Paris, 1679).
7. F. DE LA HIRE, Sectiones conicae in novem libros distributae (Paris, 1685).
8. Analysis geometrica sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones. Pars Prima: De planis. Authore D. ANTONIO HUGONE DE OMERIQUE Sanlucarense (Gadibus, 1698).
9. J. OZANAM, Ttaité des lignes de premier genre expliquées par une méthode nouvelle et facile. Traité de la construction des équations pour la resolution des problèmes déterminés. Traité des lieux géométriques expliqués par un méthode courte et facile (Paris, 1687)*.
10. J. OZANAM, Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques (Paris, 1690).
11. J. OZANAM, Cours de mathématiques, 5 Vol. (Paris, 1693).
12. J. OZANAM, Récréations mathématiques et physiques (Paris, 1694; Nouv. éd. Amsterdam, 1700; altra edizione curata dal MONTUCLA, Paris, 1778).
13. C. HUYGENS, Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro. Quibus subjuncta est Ἐξέτασις Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à Sancto Vincentio, editae anno MDXLVII (Lugd. Bat., Anno MDCLI).
14. C. HUYGENS, De curcili magnitudine inventa, accedunt eiusdem Problematum quorundam illustrium constructiones (Lugd. Batav., MCCLIV).
15. C. HUYGENS, Ad C. V. Franc. Xaver. Ainscom S.I. Epistola, qua diluuntur ea quibus Cyclometriae Ἐξέτασις Gregorii à Sancto Vincentio impugnata fuit (Hagae Com., MDCLVI).
16. C. HUYGENS, Tractatus de ratiocintis in ludo aleae (Lugd. Batav., 1657).
17. C. HUYGENS, Opera varia (Lugd. Bat., 1682).
18. C. HUYGENS, Opuscula posthuma (Lungd. Bat., 1703).
19. C. HUYGENS, Opera reliqua (Lugd. Bat., 1728).
20. Oeuvres complétes de HUYGENS, publiées par la Société hollandaise des sciences (sinora 16 Vol.; La Haye, 1888 - 1929).
21. A. ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie contenant, outre un ordre tout nouveau & des nouvelles démonstractiones des propositiones les plus communes, des nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, des nouvelles mesures des angles, dont on ne s' était pas avisé, et des nouvelles manières de trouver & de démontrer la proportion des lignes (Paris, 1667).
22. A. ARNAULD, Solution d' un des plus celèbres et des plus difficiles problèmes d' arithmétique appelé communement les quarrez magiques (Paris, 1667).
23. V. GIORDANO, Euclide restituto overo gli antichi Elementi geometrici ristampati e facilitati (Roma, 1680).
24. D. SCHWENTER, Deliciae physico - mathematicae oder mathematische und philosophische Erquickstunden (Nürnberg, 1636).

* Ἀνάλογα θέματα περιέχονται εἰς ὀγκῶδες χειρόγραφον, ὑφιστάμενον εἰς τό Μόναχον, ποὺ ἀποδίδει ὁ P. Tannery ἀκριβῶς εἰς τὸν Ozanam.

25. C. HENRY, Problèmes de géométrie pratique de Mydorge. Enoncés et solutions (Bull. di bibl. e storia delle scienze fis. e mat., t. XVII, 1883).
26. G. MOHR. Euclides danicus bestaende ludi too deele Amsterdam 1672; nuova ed., accompagnata da una versione in tedesco, Kobenhavn, 1928).
27. G. E. RAHN, Teutsche Algebra, oder algebraische Rechenkunst zusamt ihrem Gebrauch (Zürich, 1659).
28. G. CARAMUEL, Cursus mathematicus (il IV Vol. è intitolato Mathesis biceps, vetus, ed è datato Campania 1760).
29. The Works of EDMUND GUNTER, containing the descriptions and use of sector, cross-staff, quadrant and other instruments (London, 1624).
30. E. WINGATE, L'usage de la règle de proportion en arithmétique (Paris, 1624)
31. E. WINGATE, The use of the rule of proportion (London, 1626).
32. E. WINGATE, Arithmétique logaritmique (Paris, 1626).
33. E. WINGATE, Λογαριθμοτεχνία, (London, 1635; traduzione dell'opera precedente).
34. E. WINGATE, Of natural and artificial arithmetique (Londra, 1630).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXVIII

1. Philosophiae naturalis Principia mathematica. Auctore IS. NEWTON (Londini, 1687; II ed., 1713; III ed., 1726).
2. Opticks. Also two treatise of the species and magnitudes of curvilinear figures (cioè Enumeratio linearum tertii ordinis e Tractatus de quadratura curvarum; London, 1704).
3. Arithmetica universalis (Cambridge, 1707).
4. Commercium epistolicum D. JOHANNIS COLLINS et aliorum de analysi promota, jussu Societatis Regiae in lucem editum (London, 1712; altre edizioni, 1722 e 1725; la più recente fu fatta per cura di J. B. BIOT e F. LEFORT (Paris, 1856), con numerose aggiunte e commenti).
5. I. NEWTON, Opuscula mathematica, philosophica et philologica recensuit J. CASTILLIONEUS (3 Vol. Genevae et Lausannae, 1744; t. I, Matematica; t. II, Filosofia: t. III, Cronologia).
6. ISAACI NEWTON, Opera quae extant omnia. Commentariis illustrabat S. HORSELEY (5 Vol., London 1779-1785, l'ultimo volume contiene gli scritti cronologici e teologici).
7. A Catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers written by or belonging to SIR ISAAC NEWTON, the scientific portion of which has been presented by the EARL OF PORTSMOUTH to the University of Cambridge (Cambridge, 1888).
8. DUNCAN C. FRASER, Newton's interpolation formulas (London, 1927).
9. D. E. SMITH, Two unpublished Documents of Sir Isaac Newton (nel volume commemorativo Is. Newton 1642-1727, London, 1927).
10. S. J. RIGAUD, Correspondence of scientific men of the seventeenth Century, 2 Vol. (Oxford, 1841).
11. W. W. ROUSE BALL, An Essay on Newton's Principia (London, 1893; in Appendice trovansi numerose lettere del tempo).
12. J. EDLESTON, Correspondence of Sir I. Newton and Prof. Côtes, including Letters of other eminent men, from the originals in Trinity College, Cambridge (Cambridge, 1850).

13. La Méthode des fluxions et des Suites infinies par M. le Chevalier NEWTON (Paris, 1740).
14. Leibnizers Mathematische Schriften herausgegeben VON C. J. GERHARDT (Berlin - Halle, 7 Vol. e un Suppl., 1849 - 1863).
15. E. BODEMANN, Der Briefwechsel des D. W. Leibniz (Hannover, 1889).
16. E. BODEMANN, Die Leibniz - Handschriften der Höffentlichen Bibliothek zu Hannover (Ivi, 1895).
17. C. J. GERHARDT, Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikem (Berlin, 1891).
18. G. VACCA, Sui manoscritti inediti di Leibniz (Boll. di bibl. e storia delle scienze matematiche, t. II, 1899).
19. L. COUTURAT, Opuscules et Fragments inédits de Leibniz (Paris, 1903).
20. D. MANHKE, Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung (Bibl. math., III Ser., t. XIII, 1912 - 13).
21. J. D. CHILD, The early Manuscripts of Leibniz Translated from the Latin texts, published by C. J. GERHARDT, With critical and historical Notes (Chicago - London, 1920).
22. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von den Preussischen Akademie der Wissenschaften. Darmstadt, 1923 e segg. (L' edizione comprenderà 40 Volumi in 4°).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXIX

1. E. W. VON TSCHIRNHAUSEN, Medicina mentis, sive Tentamen genuinae Logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates. Cui annexa est Medicina corporis, seu Cogitationis adnodum probabiles de conservanda sanitate. (Amstelodami, 1686).
2. JACOBI BERNOULLI Basileensis, Opera (Due vol., Genevae, 1744).
3. JOHANNIS BERNOULLI, Opera omnia in quatuor tomos distributa (Làusannae et Genevae, 1742).
4. JOHANNIS(I) BERNOULLI, Lectiones de calculo differentialium. Mit einem Vorwort von P. SCHAFHEITLIN (Verh. der Naturfoschenden Gesellschaft in Basel, Bd. XXXIV, 1922).
5. Die Differentialrechnung von JOHANNIS BERNOULLI aus dem Jahre 1691/92, übersetzt von P. SCHAFHEITLIN (Ostwald's Klassiker der exakten Gesellschaften Nr. 211, Leipzig, 1922).
6. R. WOLF, Erinnerung an Johann I Bernoulli aus Basel (Archiv für Math. und Physik, t. XIII, 1849 ; ivi l' autobiografia del Bernoulli).
7. DE L' HOPITAL, Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes (Paris, 1696).
8. DE L' HOPITAL, Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu' indéterminez. Ouvrage postume (Paris, 1707).
9. G. ENESTRÖM, Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l' «Analyse des infiniment petits» (Bibliotheca mathematica, nuova serie, t. VIII, 1894 ; ivi si trovano alcune lettere inedite del BERNOULLI).

10. N. FATIO DUILLERIUS, Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex. Cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia (Londini, 1699).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XXX

1. Commercium epistolicum D. JOHANNIS COLLINS et aliorum de Analysi promota: jussu Societatis Regiae in lucem editum (Londini, 1712; II ed., ivi, 1722; III ed., ivi, 1725).
2. Commercium epistolicum J. COLLINS et aliorum de Analysi promota ou Correspondance de J. COLLINS et d' autres savants célèbres du XVII Siècle relative à l' analyse supérieure réimprimée sur l' édition originale de 1712 avec l' indication des variantes de l' édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par J. B. BIOT et F. LEFORT (Paris, 1856).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

(α = ἐκ τῶν ἄνω, κ = ἐκ τῶν κάτω)

Α΄ ΤΟΜΟΥ

Σελίς	*Στίχος*	*Ἀντί*	*Γράφε*
V	15α	τάς ὁποίαν	τάς ὁποίας
17	18κ	μαρτυροῖ	μαρτυρεῖ
29	7, 14, 16, 18, 28α	ψ	y
30	4α	ψ	y
40	6α	προσδιοριθῆ	προσδιορισθῆ
44	9α	$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$	$b = \frac{2ac}{a+c}$
61	13α	ἀπωλεσθεῖσαν	ἀπολεσθεῖσαν
105	11κ	γενέτειράν τους	γενέτειράν του
125	17α	Συναγωγῆς	Συντάξεως
134	9α	ἔρριψαν	ἔρριψαν
253	6κ	ibre	ihre
320	15κ	τῶν ἀριθμῶν	τοῦ ἀριθμεῖν
372	15α	παρέμενεν	παρέμεινεν
375	18κ	τοῦ κ. καθηγητοῦ	τοῦ καθηγητοῦ
377	6α	hasse	Hasse

Β΄ ΤΟΜΟΥ

Σελίς	*Στίχος*	*Ἀντί*	*Γράφε*
1	9α	μιά	μία
36	3α	κατά τοιοῦτον τρόπον. ὥστε νά δημιουργηθῆ χῶρος διά παράθεσιν γεύματος.	μακρυγορῶν κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νά παρέλθῃ ὁ χρόνος ἄπρακτος μέχρι τοῦ γεύματος
36	8α	ὤδυνεν	ὤδινεν
37	5α	κοινωλογήσῃ	κοινολογήσῃ
49	6κ	δευτεβαθμίων	δευτεροβαθμίων
52	5κ	ἀλγέβρος	ἀλγέβρας
95	12α	Giovanni	Giovanni
95	16α	Billingsley*	Billingsley
99	10α	τιμάς	τομάς
148	15α	ἀνάκτορον	μέγαρον
157	16α	E. Savile	H. Savile
161	22α	M=α−b/2α	M=α+b/2α
208	14κ	συν 3x	συν 3α
220	10κ	G. Wallis	J. Wallis
238	9κ	μιάν	μίαν
284	7κ	θεωρητικούς	τούς θεωρητικούς
285	10α	πρακτικῆ . . . , ὑπό	πρακτική . . . , ὑπό
285	6κ	προοπτικῆ	προοπτική
347	14α	ἐξέχουσας	ἐξεχούσας